

UNO INGARD

WILLIAM L. KRAUSHAAR

Departamento de Física  
Massachusetts Institute of Technology



# INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LA MECÁNICA, MATERIA Y ONDAS

*TRATADO MODERNO DE MECÁNICA Y TERMOLOGÍA PARA LOS CURSOS  
INTERMEDIOS DE ENSEÑANZA SUPERIOR*



DONADO POR  
DR. ARTURO H.

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

BARCELONA - BUENOS AIRES - MÉXICO

MCMLXVI

Título de la obra original

# **INTRODUCTION TO MECHANICS, MATTER, AND WAVES**

Editada por

**ADDISON WESLEY PUBLISHING COMPANY, INC.**

**Reading, Massachusetts, U. S. A.**

Versión española por

**Dr. Julián Fernández Ferrer, Catedrático de Física de la Escuela Técnica Superior  
de Arquitectura, Barcelona**

© EDITORIAL REVERTÉ, S. A., 1966

N.º Registro: B. 136-66

Depósito Legal: B. 18.351-1966

---

GRAFESA: Torres Amat, 9 - Barcelona



# INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LA MECÁNICA, MATERIA Y ONDAS



Se nos lleva, de una manera natural, a estudiar el choque de dos cuerpos \* y así puede empezarse el curso estudiando la masa inerte, la cantidad de movimiento y su conservación y el movimiento del centro de masa —aspectos todos ellos fundamentales e interesantes de la Física del movimiento, que no precisan cálculos. Surge entonces el concepto de fuerza como la cantidad de movimiento

\* El instrumental para los experimentos de choque, descrito en el texto, es relativamente sencillo y hemos encontrado que las experiencias de cátedra *cuantitativas* merecen la pena de ser realizadas a pesar del esfuerzo y el tiempo que requieren. Se han tomado fotografías estroboscópicas con una cámara Land, se han revelado y luego proyectado y analizado frente a los alumnos.

que en unidad de tiempo pasa de un cuerpo a otro durante una interacción y, a estas alturas, el curso de Cálculo Infinitesimal que siguen al mismo tiempo los alumnos, ya ha entrado en la diferenciación.

Los principios de conservación —conservación de la masa, de la cantidad de movimiento, de la energía y del momento cinético— se han tratado dándoles una importancia superior a la usual. En realidad, los experimentos de choque y la conservación de la cantidad de movimiento no sólo sirven como punto de partida, sino como tema central de gran parte de este libro.

Los capítulos 5, 8, 10, 12 y 13 estudian, según indican sus títulos, ejemplos importantes especiales de fuerzas y movimiento, y se han elegido y situado de manera que ilustren los conceptos fundamentales a medida que se desarrollan. El capítulo 8, por ejemplo, que trata de oscilaciones, sigue directamente a la introducción del concepto de energía potencial, y el capítulo 10 que trata de órbitas en el campo gravitatorio y dispersión de partículas alfa, sigue al capítulo que introduce el concepto de momento cinético. El estudio del movimiento planetario y la formulación de la ley de la gravitación universal a partir de las leyes de KEPLER, quedan tratados en forma completa.

El capítulo acerca de sistemas móviles de coordenadas y fuerzas de inercia sirve tanto como resumen cuanto como repaso del estudio de las leyes fundamentales del movimiento en la primera parte del libro. En él se pone de manifiesto el importante papel que juega el sistema de coordenadas en la descripción del movimiento, y se hace resaltar la distinción entre fuerzas de interacción y fuerzas de inercia. *Existe* una fuerza que empuja a los pasajeros hacia atrás en un vehículo acelerado, y *existe* una cosa llamada fuerza centrífuga. Consideramos bien empleado el tiempo que se destine a hacer ver al alumno por qué y desde qué punto de vista son correctas las nociones que tenía preconcebidas.

El tránsito del estudio del movimiento macroscópico de los cuerpos al movimiento interno de la materia y las propiedades macroscópicas asociadas a éste se realiza en un capítulo que trata del concepto de temperatura y de las interacciones térmicas y en un capítulo acerca de la teoría elemental de la estructura atómica de la materia. Se han entrelazado los capítulos siguientes que tratan de teoría cinética, termodinámica, y propiedades de la materia, y se mantiene en primer plano la interpretación atómico-molecular de conceptos tales como energía interna y entropía y las propiedades de la materia.

El estudio de la teoría cinética de los gases es relativamente extenso, tanto en lo que respecta a los conceptos fundamentales como a la discusión de los experimentos. Se hace resaltar el fallo de la teoría clásica en el análisis del calor específico y se da una interpretación cualitativa cuántica de los resultados experimentales.

Se estudia con cierto detalle el papel que juegan las fuerzas intermoleculares en la interpretación de la ecuación de estado de los gases reales, junto con inter-

pretaciones moleculares de otras propiedades mecánicas macroscópicas de los gases y los líquidos.

La mecánica de los cuerpos deformables y de las ondas se introduce a través de un estudio de lo que sucede cuando se da un impulso a un cuerpo deformable, mediante una fuerza exterior. A través de una combinación de experimentos y la aplicación de la conservación de la cantidad de movimiento obtenemos rápidamente el comportamiento de los pulsos ondulatorios, su velocidad de propagación y energía, y se dan ejemplos en los que intervienen ondas longitudinales y transversales en medios diferentes. Mediante el principio de superposición se construyen entonces ondas de forma arbitraria y se estudian las propiedades de las ondas armónicas. Análogamente, se resuelve en primer lugar el problema de la reflexión de las ondas en la superficie de separación de dos medios elásticos para el caso de un pulso ondulatorio, aplicando los principios de conservación

Los autores quieren agradecer la crítica constructiva de muchos de sus alumnos y colegas. Nuestras esposas, DORIS INGARD y MARGARET KRAUSHAAR, han contribuido de muy diversas maneras a completar el libro, desarrollando una paciencia heroica.

Junio 1960

U. I.  
W. K.



## INTRODUCCION

*Resumen.* En Física se estudia el movimiento y sus causas. En este capítulo se estudian algunas de las primeras ideas acerca del movimiento y el desarrollo de la Física. Sigue un repaso de los conceptos fundamentales de longitud y tiempo, sus dominios y medidas, y un estudio breve de la descripción matemática del movimiento.

**1-1 Ambito de la Física.** El ámbito de la Física es muy amplio. En realidad, tanto que no puede decirse con precisión cuáles son sus límites. Si consideramos la Geología como el estudio del planeta Tierra, o la Biología como el estudio de la vida, deberemos considerar la Física algo así como el estudio de la materia, el movimiento y la energía. Pero esto no es muy útil para definir los límites de la Física, porque materia, movimiento y energía excluyen pocas cosas. ¿Qué hay en toda ciencia o tecnología que, de alguna manera, no se halle relacionado con una o más de estas tres ideas muy generales, pero nebulosas?

A los primeros investigadores se les llamó filósofos naturales, y se ocupaban de cuestiones tan diferentes como son el movimiento de los cuerpos pesados, la navegación, el movimiento de proyectiles, la naturaleza íntima de la materia y el espacio, la resistencia de los materiales de construcción, la meteorología, la agrimensura, la respiración de animales y plantas, e incluso de alquimia y astrología. En otras palabras, la Filosofía natural es lo que hoy llamamos Ciencia, e incluía los aspectos aplicados tanto como las cuestiones fundamentales referentes a la vida, materia, movimiento y sus causas.

El progreso de la ciencia, si se mide en descubrimientos y número de ideas profundas, se acentuó durante el siglo XVII y después de él. Más tarde, los filósofos naturales tendieron a especializarse y nacieron las diferentes divisiones de la ciencia —Biología, Química, Física, Meteorología, Astronomía, etc. Al hacerse importantes para la sociedad los aspectos específicos de la ciencia aplicada y aumentar el número de especialistas en estos campos, se establecieron divisiones técnicas. Pero la Física, la Astronomía, la Química y la Biología conservaron posiciones que correspondían más fielmente a la antigua Filosofía natural. Estas son las ciencias sobre las que se basan las demás, así como las vastas aplicaciones técnicas.

Los físicos actuales se enfrentan con dos amplias categorías de problemas. El primer tipo, al que podría llamarse Física de las partículas y los campos, se ocupa de la naturaleza de las interacciones o fuerzas que existen entre los constituyentes de la materia. El segundo tipo, se ocupa del comportamiento global de la materia.

Las fuerzas gravitatorias, electromagnéticas y nucleares son, tal vez, las fuerzas de interacción más familiares, y para su estudio se ha desarrollado una gran variedad de técnicas experimentales. En el caso de las interacciones gravitatorias, el cielo ha sido el mejor laboratorio y el movimiento de los planetas alrededor del Sol ha proporcionado el mejor indicio para llegar a las propiedades fundamentales de este tipo de interacción. Por otra parte, el estudio de las interacciones electromagnéticas se puede realizar en el laboratorio con dispositivos experimentales relativamente sencillos. Sin embargo, cuando penetramos en las fuerzas entre las partículas del núcleo atómico, se precisan técnicas experimentales e instrumental de gran complejidad (y tamaño), como, por ejemplo, los aceleradores para energías elevadas en los cuales se lanzan partículas unas contra otras a velocidades próximas a la de la luz.

El problema de las fuerzas de interacción se considera resuelto cuando pueden formularse leyes del movimiento (preferentemente una única ley del movimiento) que puedan explicar las observaciones experimentales y a partir de las cuales pueda predecirse el resultado de nuevos experimentos. Está claro que dicha ley deberá contener conceptos que no pueden definirse o explicarse, sino que deben aceptarse como piedras angulares de la teoría. Dichas cantidades y conceptos son, por ejemplo, longitud, tiempo y carga eléctrica, acerca de las cuales no puede responderse a preguntas tales como «qué es el tiempo», «qué es la longitud» y «qué es la carga eléctrica» en función de cantidades más fundamentales.

Sabemos actualmente que la materia está constituida de átomos y moléculas. El problema fundamental actual es intentar determinar las propiedades macroscópicas de la materia en función de las fuerzas fundamentales entre átomos y moléculas. Por ejemplo: ¿Cómo puede explicarse y calcularse la dilatación térmica de un cuerpo en función de las fuerzas intermoleculares? ¿Cómo están relacionadas las fuerzas intermoleculares con la velocidad del sonido en la materia? ¿Cuál es la naturaleza microscópica de la resistencia eléctrica de un cuerpo y qué propiedades de las moléculas y de su distribución establecen la diferencia entre un conductor eléctrico y un aislador? Hay un sin fin de cuestiones de este tipo que queremos saber y comprender en función del movimiento y las fuerzas moleculares. Aun cuando, en las últimas décadas, se ha adelantado mucho en este campo, nuestro conocimiento de la materia dista mucho de ser completo. Por tanto, en muchos casos debemos conformarnos con descripciones «fenomenológicas» del comportamiento global de la materia. Estas descripciones, que incluyen conceptos tales como los de resistencia eléctrica, módulo de elasticidad,



conductibilidad térmica, reflectividad, etc., son de gran importancia práctica en las aplicaciones técnicas.

La Física se ocupa en gran parte del movimiento. El movimiento es evidente en todo lo que nos rodea. Nos movemos, se mueven los aviones, los árboles, las nubes y las olas. Pero estos movimientos suelen ser complicados y, según vamos a ver, una de nuestras primeras tareas en Física es explorar el movimiento sencillo de cuerpos simples. Más adelante estudiaremos cómo varían los movimientos de los cuerpos —cómo puede afectar al movimiento de un cuerpo la presencia de otro. También hay movimiento «oculto». Examinándolo más detalladamente, podríamos ver que un cuerpo, aunque globalmente esté en reposo, sus constituyentes se hallan en movimiento constante (agitación térmica): Las moléculas de un gas se mueven en una y otra dirección y chocan entre sí y contra las paredes del recipiente, mientras las moléculas de un sólido vibran alrededor de sus posiciones de equilibrio. En una escala aún menor encontramos «movimiento» de los electrones atómicos y de los neutrones y protones del núcleo. En este sentido puede decirse con toda libertad que el Universo carece de reposo \* y es natural, por tanto, que el estudio de la Física se inicie con el del movimiento. La mayoría de las propiedades de la materia pueden relacionarse con el movimiento, al menos en una escala atómica o subatómica. El calor y la temperatura pueden describirse directamente en función del movimiento molecular, y las ondas electromagnéticas (radio, calor, luz, rayos X y rayos  $\gamma$ ) pueden relacionarse con el movimiento de partículas cargadas. Tradicionalmente, al estudio del movimiento y de sus causas se le ha dado el nombre de «Mecánica»; el Electromagnetismo, la Óptica, la Física atómica, la Física nuclear, etc., son otras ramas de la Física. Todos estos aspectos de la Física están también relacionados con el movimiento, pero lo que separa la Mecánica del resto es el hecho de que la Mecánica se ocupa del movimiento y de sus causas *per se*, y de la formulación de leyes y propiedades generales del movimiento que son independientes del tipo de interacción (gravitatoria, electromagnética, nuclear, etc.) que interviene.

**1-2 Movimiento; breve introducción histórica.** Las ideas que acerca del movimiento sobrevienen en forma natural a un observador casual son, en su mayor parte, las mismas que las de ARISTÓTELES (384-322 a.C.). Separándolas del sistema filosófico del que formaban parte, las ideas aristotélicas acerca del movimiento eran las siguientes: Toda la materia accesible está compuesta de Tierra, Agua, Fuego y Aire, y estos cuatro elementos tienen estados naturales —Fuego y Aire encima de Tierra y Agua. De aquí se sigue que el humo y el vapor suben, y las piedras y el agua caen. Como los objetos grandes contienen más Tierra que los

---

\* Para un estudio lúcido de la Física, véase MAX BORN, *The Restless Universe*, Dover Publications, Inc., Nueva York, 1951.

pequeños, los objetos grandes caerán más deprisa. El tiempo de caída es inversamente proporcional al peso. El estado natural de los cuerpos es el de reposo, por lo que es necesario hacer algo a un cuerpo para ponerlo en movimiento o para mantenerlo moviéndose. Los cuerpos celestes no están comprendidos en este esquema y no están sometidos a las leyes ordinarias de la Física. Todos ellos, incluidos el Sol y la Luna, giran alrededor de la Tierra siguiendo órbitas circulares y la Tierra no se mueve.

Estas ideas no dejan de ser razonables. Las «deducciones» y enunciados están de acuerdo con la observación cualitativa. Hay que señalar que las ideas aristotélicas acerca del movimiento formaban parte de un conjunto mucho mayor —una Filosofía que consideraba la Religión tanto como la Naturaleza y en la cual el acabado, la belleza y la simetría de la Filosofía en sí prevalecían sobre otras discrepancias «secundarias».

La autoridad de la doctrina aristotélica llegó a consolidarse y no fue discutida durante siglos. Hubo algunas disconformidades, pero hasta el Renacimiento nadie opuso argumentos ni forzó evidencias en contra. Uno de los puntos de controversia se refería al movimiento celeste, el movimiento aparente del Sol, la Luna, los planetas y las estrellas; otro se refería al movimiento de los cuerpos sobre la Tierra.

*Movimiento celeste.* Menos de un siglo después de ARISTÓTELES, ARISTARCO presentó la sugerencia de que las estrellas estaban fijas y la Tierra y los planetas giraban alrededor del Sol. Aparentemente, esta idea no tuvo aceptación. Ofrecía una explicación razonable de las variaciones de brillo de los planetas (las distancias entre la Tierra y los planetas variarían, naturalmente) pero no parecía tener otra ventaja sobre la idea aristotélica del geocentrismo. Según el punto de vista heliocéntrico, existiría un paralaje anual, es decir, una variación de la posición aparente de una estrella al ir la Tierra rodeando el Sol. No se observó este paralaje y la idea heliocéntrica encontró poca acogida entre los astrónomos de la época, especialmente porque contradecía las enseñanzas de ARISTÓTELES.

El punto de vista geocéntrico fue muy perfeccionado por TOLOMEO (100-170 d.C.). En aquel tiempo, las observaciones astronómicas de los planetas, el Sol, la Luna y las estrellas fijas eran suficientemente precisas y completas para indicar que no todos los objetos celestes podían rodear a la Tierra siguiendo trayectorias perfectamente circulares centradas en ella. Las rígidas hipótesis geocéntricas se relajaron un poco. Se conservó a la Tierra en el centro de la esfera celeste y el Sol, la Luna, los planetas y las estrellas seguían moviéndose en su derredor. Sin embargo, los movimientos no tenían lugar según trayectorias perfectamente circulares centradas en la Tierra. TOLOMEO encontró necesario aceptar un conjunto cada vez más complicado de hipótesis adicionales. En primer lugar, habían epicicloides, como las representadas en la figura 1-2. Se precisaban para interpretar el movimiento retrógrado o inversiones aparentes en las trayectorias de los planetas. Luego, la Tierra tenía que estar situada ligeramente apartada del centro

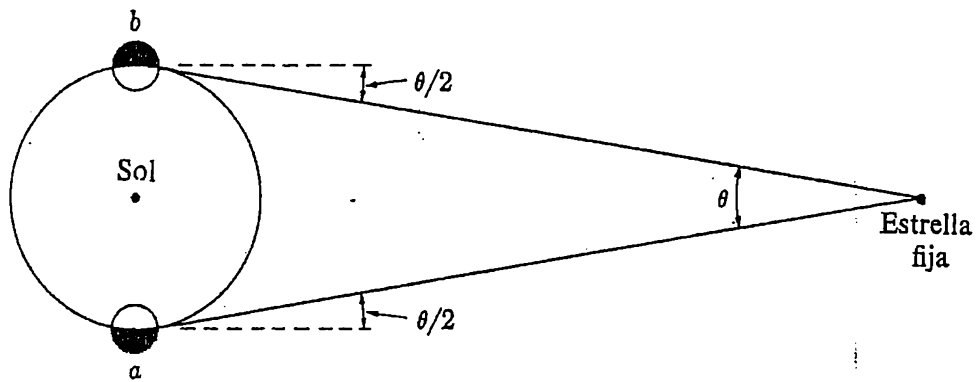


Fig. 1-1. Al moverse la Tierra de  $a$  a  $b$  (en seis meses), varía la posición aparente de la estrella fija en la esfera celeste. El ángulo  $\theta$  depende de lo lejos que esté la estrella del sistema solar.

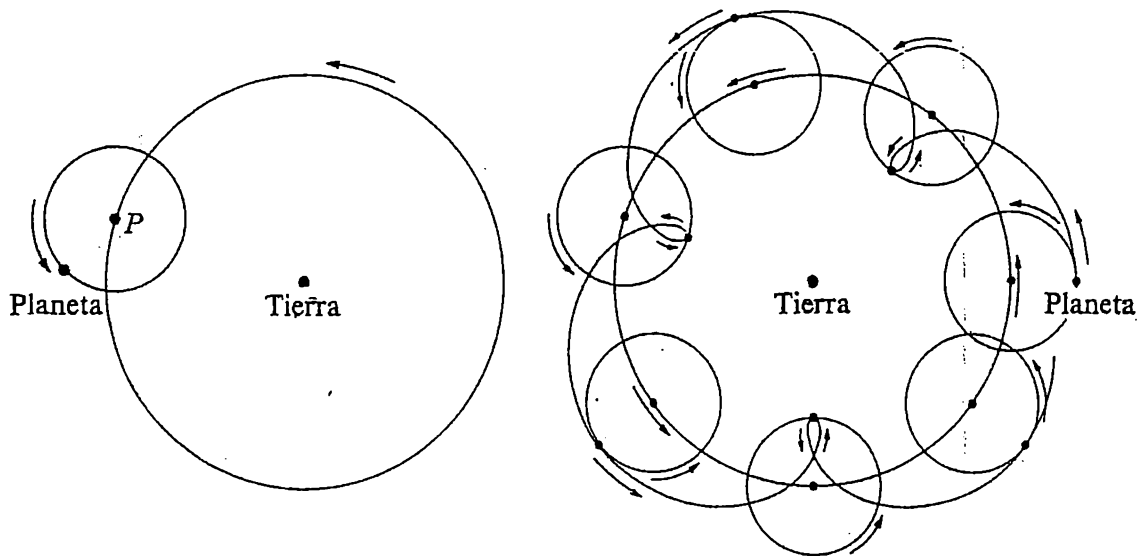


Fig. 1-2. Movimiento epicicloidal necesario en el modelo geocéntrico. El punto  $P$  se mueve con velocidad angular uniforme en torno a la Tierra y el planeta se mueve con velocidad angular uniforme alrededor de  $P$ .

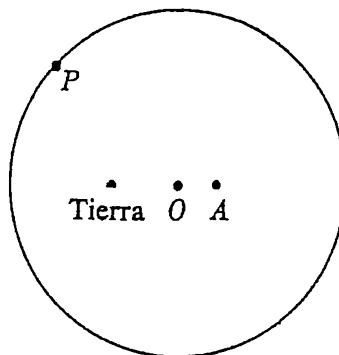


Fig. 1-3. El punto  $P$  gira alrededor de  $O$  con velocidad angular uniforme, pero la Tierra no está en  $O$ .

de rotación, como se indica en la figura 1-3. Esto era necesario para explicar los cambios observados en el brillo de los planetas. Por último, se encontró necesario suponer que mientras el punto  $P$ , indicado en las figuras 1-2 y 1-3, se movía siguiendo una trayectoria circular alrededor de un cierto punto  $O$  (no de la Tierra), se movía con una velocidad angular variable alrededor de dicho punto. La velocidad angular era constante para algún otro punto del espacio, por ejemplo el  $A$  de la figura 1-3. Con este mecanismo, TOLOMEO explicó satisfactoriamente la mayoría de las características del movimiento celeste. Fue un logro gigantesco e ingeniosísimo, y por vez primera pudieron predecirse las posiciones de los cuerpos celestes, con precisión razonable.

El sistema geocéntrico tolomeico prevaleció durante unos 1400 años. Incluso entonces no murió brusca ni pacíficamente. En realidad, aun hoy en día se emplea el sistema geocéntrico para algunos fines en navegación; y aún hablamos de la salida y la puesta de los distintos cuerpos celestes. La idea del sistema heliocéntrico fue resucitada por NICOLÁS COPÉRNICO (1473-1543). Es evidente que a COPÉRNICO le molestaban las complejidades del sistema tolomeico y encontró especialmente desagradables las rotaciones no uniformes en torno al centro ( $O$  en fig. 1-3). El sistema heliocéntrico propuesto por COPÉRNICO era análogo al de ARISTARCO, pero el esquema de COPÉRNICO era cuantitativo. No sólo eran relativamente sencillos los movimientos de los planetas y de la Tierra alrededor del Sol, sino que también los planetas conocidos se hallaban situados en sus posiciones relativas correctas y se especificaban los períodos de rotación alrededor del Sol. COPÉRNICO señaló que los planetas más alejados del Sol tenían períodos más largos que los de los planetas más próximos. Por lo que a la paralaje se refería, COPÉRNICO dijo, simplemente, que debía ocurrir que las estrellas fijas estuvieran demasiado alejadas para permitir que el efecto fuera mensurable.

El sistema de COPÉRNICO no encontró el beneplácito de casi nadie. El sistema geocéntrico era doctrina establecida tanto en Religión como en Filosofía natural. Las distancias necesarias para explicar la ausencia de paralaje de las estrellas fijas se consideraban absurdas. Los dos sistemas, el geocéntrico y el heliocéntrico, explicaban las observaciones astronómicas y mientras el sistema heliocéntrico ofrecía una simplicidad muy atractiva, su aceptación habría precisado de la hipótesis herética de que nuestro Universo no estaba centrado en la Tierra.

El siguiente desarrollo importante en la controversia entre los sistemas heliocéntrico y geocéntrico surgió del trabajo de GALILEO GALILEI (1564-1642). Sus logros y contribuciones fueron múltiples y volveremos a hablar de él en el próximo apartado. Comprendió que por lo que se refería a descripción pura, los sistemas heliocéntrico y geocéntrico eran equivalentes y la cuestión estribaba en elegir un sistema de referencia (sistema de coordenadas). Pero a causa de su sencillez y a causa de sus propias observaciones telescópicas (fue el primer hombre que observó el cielo con un telescopio), se adhirió entusiastamente al sistema

heliocéntrico de COPÉRNICO. Entre las evidencias en su favor que ofreció GALILEO se cuenta el descubrimiento de las fases del planeta Venus y el descubrimiento de cuatro de las lunas de Júpiter. Encontró que estas lunas se movían alrededor de Júpiter exactamente de la manera que él suponía que se movían los planetas alrededor del Sol. Además, las lunas más alejadas de Júpiter tenían períodos más largos. Para GALILEO, sus observaciones de Júpiter y sus lunas eran equivalentes a la observación directa de un pequeño sistema solar y no le cupo duda alguna acerca de la corrección del sistema de COPÉRNICO. En cambio, para la mayoría de sus contemporáneos el sistema geocéntrico era evidentemente correcto y no admitían discusión acerca de ello.

Las ideas de GALILEO y la evidencia que ofrecía, le pusieron en contra a la Iglesia. Su *Dialogo sopra i due massimi Sistemi del Mondo* lo llevó ante la Inquisición. En 1631 fue interrogado, se le obligó a firmar una renuncia de sus ideas en pro del sistema de COPÉRNICO y se le encarceló \* durante los restantes once años de su vida.

El desarrollo de las ideas acerca del movimiento celeste fue un verdadero empeño internacional. ARISTÓTELES y ARISTARCO eran griegos. La labor de TOLOMEO en astronomía y matemáticas se realizó en Alejandría. COPÉRNICO era polaco, si bien estudió en Italia y GALILEO era italiano. Las tres figuras importantes que mencionaremos a continuación son BRAHE, KEPLER y NEWTON. BRAHE era danés, KEPLER alemán y NEWTON inglés.

TYCHO BRAHE (1546-1601) fue un magnífico astrónomo. Los datos de que se disponía en los tiempos anteriores a él, no eran particularmente fidedignos y eran muy poco precisos. TYCHO construyó un nuevo observatorio en Copenhague y construyó una gran cantidad de instrumental de precisión para las observaciones. Aún no se había ideado el anteojo astronómico de GALILEO y las observaciones de TYCHO se hacían a simple vista. Sus medidas angulares tenían un error inferior a medio minuto de arco. Uno de los fines de TYCHO era hallar y medir la paralaje de las estrellas fijas. No tuvo éxito en ello y creyendo, evidentemente, que no había paralaje, desarrolló un nuevo sistema geocéntrico propio. En dicho sistema, la Tierra estaba en reposo. Mercurio y Venus daban vueltas en torno al Sol y éste, a su vez, daba vueltas alrededor de la Tierra. No obstante, la contribución importante de TYCHO no fue su sistema geocéntrico sino la enorme cantidad de datos astronómicos de precisión que dejó a su sucesor JOHANNES KEPLER.

JOHANNES KEPLER (1571-1630), discípulo un tiempo de TYCHO, fue un convencido de la teoría de COPÉRNICO. Estaba seguro en cierto modo de que en medio

---

\* El encarcelamiento técnico incluía su reclusión y la supresión de sus obras. No estuvo, en realidad, en la cárcel. Un partidario anterior del sistema de Copérnico, GIORDANO BRUNO (1548-1600), fue llevado ante la Inquisición y quemado en la hoguera.

de tanta complejidad debía existir una simplicidad básica que podría expresarse en términos geométricos y matemáticos. Hay que hacer resaltar que los datos de TYCHO se habían dejado en un estado un tanto indigesto. Constituían registros voluminosos del tiempo de paso y posiciones angulares de los distintos miembros del sistema solar, pero había que reducir todos esos datos para ser interpretados. KEPLER intentó ajustar el sistema de COPÉRNICO con los datos de TYCHO y halló que, particularmente en el caso de Marte, eran necesarias hipótesis tan complicadas como las involucradas en el sistema de TOLOMEO. Posteriormente, abandonó la hipótesis de movimiento circular y encontró que los planetas seguían órbitas elípticas alrededor del Sol. Cada elipse tenía en el Sol uno de sus focos. Esto es lo primero que se conoce acerca de las tres leyes de KEPLER del movimiento planetario.

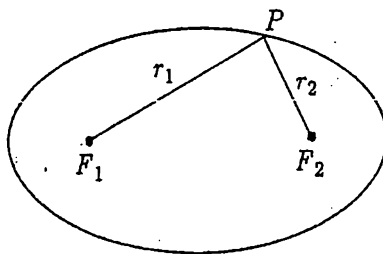


Fig. 1-4. Elipse. La distancia  $r_1 + r_2$  es constante para todo punto  $P$  de la curva.

La elipse es una de las secciones cónicas, y tiene la propiedad de que la suma de las distancias de uno cualquiera de sus puntos a los dos focos, es constante. Cuando los focos están muy separados, la elipse es alargada. Al irse aproximando los focos, la curva se aproxima a una circunferencia.

La segunda de las leyes experimentales de KEPLER dice que al moverse un planeta alrededor del Sol, el área barrida en unidad de tiempo por el radio vector Sol-planeta permanece constante. A esta ley se la suele conocer con el nombre de ley de las áreas.

La tercera ley es el enunciado cuantitativo de un hecho observado por COPÉRNICO y discutido por GALILEO en relación con el movimiento de las lunas de Júpiter. Los planetas más alejados del Sol tienen los períodos más largos. La tercera ley de KEPLER es cuantitativa y dice que

$$T^2 = CR^3, \quad (1-1)$$

donde  $T$  es el tiempo empleado en una revolución alrededor del Sol (un año para la Tierra) y  $R$  es la distancia media del Sol al planeta. La Constante  $C$  es la misma para todos los planetas.

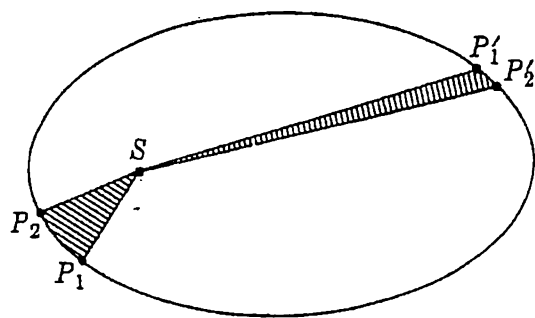


Fig. 1-5. Al moverse el planeta alrededor del Sol, la recta que une el Sol con el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales. En la figura, el área  $SP_1P_2$  es igual al área  $SP'_1P'_2$  y, por tanto, el tiempo que emplea el planeta en ir de  $P_1$  a  $P_2$  debe ser igual al que emplea en ir de  $P'_1$  a  $P'_2$ .

Por fin se alcanzó la sencillez. KEPLER consiguió hallar una descripción matemática concisa del movimiento de los planetas. Su logro fue notable por diversas razones. La primera y más evidente fue la enorme magnitud de la tarea. KEPLER era un hábil matemático y empleó 17 años en elaborar sus tres leyes. La segunda fue que la obra de KEPLER, junto con la de GALILEO, marcaron el principio de la era de las aplicaciones fructíferas del pensamiento matemático a la descripción e interpretación de la Naturaleza. La tercera fue la bella y concisa descripción matemática que KEPLER dio del movimiento planetario y que constituyó la base de los desarrollos aún más espectaculares de ISAAC NEWTON quien, 80 años después de KEPLER, formulaba las leyes generales de la Mecánica.

ISAAC NEWTON (1642-1727) fue un filósofo natural en el sentido más amplio. Aportó grandes contribuciones a las Matemáticas, Mecánica, Calor, Astronomía y Óptica, y su labor en uno cualquiera de esos campos lo hubiera consagrado como uno de los mayores pensadores del mundo. Siendo estudiante en la Universidad de Cambridge, descubrió el teorema del binomio, los métodos de las series infinitas y el cálculo diferencial. Tenía 24 años entonces y había formulado la primera definición clara de fuerza y había demostrado que un conjunto único de hipótesis (sus leyes del movimiento y su ley de la gravitación universal) explicaban y resumían el movimiento planetario, así como el movimiento de los cuerpos sobre la superficie terrestre. La Mecánica elemental, que es la presentada en este libro por ejemplo, está en su mayor parte tal como la dejó NEWTON. Éste era una persona complicada. Era débil y modesto, un devoto estudiante y autor de Teología y al mismo tiempo un audaz aventurero intelectual que intervenía frecuentemente en acalorados debates con sus contemporáneos acerca de la prioridad de invención y de descubrimiento.

*Movimiento sobre la superficie terrestre.* GALILEO GALILEI nació en Pisa en 1564. Era evidentemente, un superdotado. Su padre, VINCENZIO GALILEI, decidió

que estudiara Medicina y así lo hizo durante un tiempo, pero pronto se volvió su atención hacia las Matemáticas y las Ciencias. Como ha ocurrido con la mayoría de las personalidades especialmente creadoras, su genio se hizo patente muy pronto y en 1592, a la edad de 28 años, se le concedía la cátedra de Matemáticas en Padua. Ya había sido profesor en Pisa durante dos años, pero no fue suficientemente prudente en la expresión de sus puntos de vista, lo que le obligó a marcharse. En cambio, en Padua fueron muy populares sus lecciones y se acrecentó su fama. En 1610 se conocía su labor en toda Europa y fue invitado a volver a Pisa como Matemático y Filósofo del Gran Duque de Toscana. Un año más tarde se iniciaron los disgustos de GALILEO a causa de sus puntos de vista favorables a las ideas de COPÉRNICO. La historia de su vida, su renuncia a sus ideas acerca del sistema heliocéntrico y su condena por la Inquisición dan un interés máximo a la lectura de su biografía, la cual resulta muy recomendable por la información que contiene. \*

Las contribuciones de GALILEO a la Física se presentan en forma muy atractiva en sus dos Diálogos, *Diálogos referentes a los dos grandes sistemas del mundo* (1630) y *Diálogos referentes a dos nuevas ciencias* (1638). Los diálogos están escritos en forma de conversaciones entre SIMPLICIO, quien representa el punto de vista aristotélico; SALVIATI, quien presenta y discute los puntos de vista de GALILEO; y SAGREDO en cuya casa se reúnen los tres.

Recordemos uno de los puntos de vista aristotélicos que mencionamos anteriormente. El estado natural de los cuerpos es el de reposo, por lo que para poner o mantener en movimiento un cuerpo, habrá que hacer algo sobre él. Esta idea es totalmente razonable. Incluso sobre el hielo de una pista de patinar, un objeto deslizante disminuye eventualmente su velocidad y se detiene. Si queremos mantener en movimiento dicho objeto, deberemos hacerle algo —soplar sobre él, empujarlo, etc. Incluso un cuerpo montado sobre ruedas con los mejores cojinetes que puedan concebirse disminuiría su velocidad y llegaría a detenerse si no hiciéramos nada para ayudarle a mantenerse en movimiento. Acerca de esta cuestión, el punto de vista aristotélico no era falso. Sin embargo, era improductivo.

En cambio, GALILEO adoptó otro punto de vista totalmente diferente. Como se trata de una idealización, su corrección será tal vez menos evidente, pero resultó productivo. Es un punto de vista que permite un desarrollo cuantitativo del tema. En efecto, GALILEO decía que los cuerpos en reposo tendían a estar en reposo, que los cuerpos en movimiento tendían a estar en movimiento y que hay que hacerle algo al cuerpo para cambiar su estado de movimiento. Veamos cómo presentaba su caso en *Diálogos referentes a los dos grandes sistemas del*

---

\* Véase, p.e., J. J. FAHIE, *Galileo: His Life and Work*, James Pott and Co., New York, 1903.



*mundo.* \* SALVIATI había estado discutiendo con SIMPLICIO el movimiento de una esfera dura sobre un plano inclinado. SIMPLICIO se había convencido de que una esfera que se mueva hacia *arriba* del plano tenía retardado su movimiento, es decir, se desaceleraba, mientras que una esfera que se mueva hacia abajo del plano incrementa su movimiento (se acelera). Entonces prosigue SALVIATI:

---

Ahora, dime qué pasaría al mismo cuerpo móvil situado sobre una superficie sin pendiente ni hacia arriba ni hacia abajo.

*Simplicio:* Debo pensar mi respuesta. No habiendo pendiente hacia abajo, no puede haber tendencia natural alguna al movimiento; y no habiendo pendiente hacia arriba, no puede haber ninguna resistencia al movimiento, por lo que habría indiferencia entre la propensión y la resistencia al movimiento. Por tanto, me parece que debería mantenerse naturalmente estable. Pero lo olvidaba; no hace mucho que Sagredo me dio a entender que esto es lo que ocurriría.

*Salviati:* Creo que así ocurriría si se tuviera la bola apretada firmemente hacia abajo. Pero, ¿qué ocurriría si se le diera un ímpetu en una dirección cualquiera?

*Simplicio:* Debe seguirse que se movería en dicha dirección.

*Salviati:* Pero, ¿con qué clase de movimiento? Continuamente acelerado, como en el plano inclinado hacia abajo, ¿o crecientemente retardado como en el plano hacia arriba?

*Simplicio:* No puedo ver causa alguna de aceleración o desaceleración, no habiendo pendiente hacia arriba o hacia abajo.

*Salviati:* Exactamente. Pero si no hay causa alguna para el retardo de la bola, menos debería haberla para que alcance el estado de reposo; luego, ¿hasta qué distancia continuará moviéndose la bola?

*Simplicio:* Tanto como continúe la superficie sin subir ni bajar.

*Salviati:* Luego, si dicho espacio fuera ilimitado, el movimiento en él, sería análogamente ilimitado? Es decir, ¿perpetuo?

*Simplicio:* Así me lo parece, si el cuerpo móvil fuera de material duradero.

*Salviati:* Así se supone, claro está, ya que dijimos que se suprimían todos los impedimentos externos y accidentales y que toda fragilidad por parte del cuerpo móvil sería en este caso uno de los impedimentos accidentales.

---

Aquí GALILEO echa mano de un experimento imaginativo idealizado para hacer plausible su aseveración de que si se «suprimen todos los impedimentos exteriores y accidentales» un cuerpo que se mueva sobre un plano horizontal seguiría haciéndolo perpetuamente. No ha negado el hecho que de las condiciones prescritas para su experimento son imposibles de lograr en la práctica. La

---

\* De la traducción al inglés de STILLMAN DRAKE, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1953.

resistencia del aire, el rozamiento, las imperfecciones de la bola, una ligera rugosidad del plano, el tamaño finito de la Tierra —todo ello afectará, en la práctica, al movimiento de la bola. Pero el estudio de GALILEO de la materia— el único sobre el que se han basado con éxito desarrollos ulteriores— llevaba consigo la idea razonable (pero no evidente) de que el estado de movimiento natural, o sin influencias, de un cuerpo es el estado en el cual el cuerpo se mueve con velocidad constante. Brevemente, algo hay que hacerle a un cuerpo para que varíe su velocidad. Esta fue la gran idea que abrió el camino a la Mecánica. Como la mayoría de las buenas ideas en Física, resulta ser muy sencilla. Hoy en día se la conoce como la primera de las tres leyes de NEWTON.

En los *Diálogos referentes a dos nuevas ciencias*, GALILEO discutía otros muchos aspectos del movimiento. Es particularmente interesante la presentación de sus ideas y experimentos acerca de caída de cuerpos y movimiento de proyectiles. Sus razonamientos y deducciones son agudos y bien tramados. Sus experimentos son ingeniosamente sencillos, estando destinados a hacer resaltar lo más vívidamente posible el punto que desea presentar. Veamos cómo presentaba GALILEO su caso relativo al movimiento de caída de cuerpos de pesos diferentes. \* Recordemos la afirmación de ARISTÓTELES de que el tiempo de caída es inversamente proporcional al peso.

*Salviati*: ... dudo mucho que ARISTÓTELES comprobara nunca experimentalmente si era cierto que dos piedras, una diez veces más pesada que la otra, si se dejan caer en el mismo instante desde una altura de, digamos, cien codos, difieran tanto en velocidad que cuando la más pesada haya llegado al suelo, la otra no haya caído más de diez codos.

*Simplicio*: Su lenguaje parecía indicar que había intentado el experimento, porque dice: *Vemos el más pesado*; la palabra  *vemos*  indica que ha hecho el experimento.

*Sagrado*: Pero yo, Simplicio, que he hecho el experimento, puedo asegurarte que una bala de cañón que pesa cien o doscientas libras, o tal vez más, no alcanzará el suelo con tanta ventaja respecto a una bala de mosquete que sólo pesa media libra, dejándolas caer desde una altura de 200 codos.

*Salviati*: Pero, incluso sin más experimentos, es posible demostrar claramente, mediante un razonamiento corto y concluyente, que un cuerpo más pesado no se mueve más rápidamente que otro más ligero si los dos cuerpos son del mismo material y en resumen, como los mencionados por ARISTÓTELES. Pero dime, Simplicio, si admites que cada cuerpo en su caída adquiere una velocidad definida fijada por la Naturaleza, una velocidad que no puede incrementarse o disminuirse salvo mediante el empleo de la fuerza [violencia] o resistencia.

*Simplicio*: No puede haber duda de que el cuerpo que se mueve en un medio único tiene una velocidad fija determinada por la Naturaleza y que no puede incrementarse

---

\* De la traducción al inglés de HENRY CREW y ALFONSO DE SALVIO. Dover Publications, Inc., New York, 1952.

mas que por la adición de una cantidad de movimiento [ímpeto] ni disminuirá mas que por una resistencia que la retarde.

*Salviati:* Entonces, si tomamos dos cuerpos cuyas velocidades naturales sean diferentes, es evidente que, al unirlos, el más rápido será parcialmente retardado por el más lento, y éste algo acelerado por el otro. ¿No estás de acuerdo con mi opinión?

*Simplicio:* No hay duda de que tienes razón.

*Salviati:* Pero si esto es cierto y si una piedra grande se mueve con una velocidad de, digamos, ocho mientras otra menor se mueve con una velocidad de cuatro, cuando se unan, el sistema se moverá con una velocidad inferior a ocho; en cambio, cuando las dos piedras estén juntas constituirán una piedra mayor que aquella que antes se movía con velocidad ocho. Luego, el cuerpo más pesado se mueve a menor velocidad que el ligero; efecto contrario a tu hipótesis. Puedes ver así que de tu hipótesis de que el cuerpo más pesado se mueve con mayor velocidad que el ligero, deduzco yo que el cuerpo más pesado se mueve más lentamente.

Después de discutir algo más, prosiguen:

*Simplicio:* Tu discusión es realmente admirable; sin embargo, no encuentro fácil creer que un perdigón cae tan rápidamente como una bala de cañón.

*Salviati:* ¿Por qué no decir un grano de arena tan rápidamente como una muela? Pero, Simplicio, confío que no seguirás el ejemplo de otros muchos que apartan la discusión de su intento principal y se agarran a algún enunciado mío que se aparta un pelo de la verdad y tras este pelo esconden el fallo de otro que es grueso como un calabrote. ARISTÓTELES dice que «una bola de hierro de cien libras que cae desde una altura de cien codos alcanza el suelo antes de que una bola de una libra haya caído un solo codo». Yo digo que llegan al mismo tiempo. Al realizar el experimento, encuentras que la mayor adelanta a la menor en dos dedos, es decir, cuando la mayor ha alcanzado el suelo, la otra se halla a dos dedos de él; no puedes esconder tras esos dos dedos los noventa y nueve codós de ARISTÓTELES, ni puedes tener en cuenta mi pequeño error y al mismo tiempo silenciar su error mucho mayor.

. . . . .

*Simplicio:* Tal vez el resultado sería diferente si la caída tuviera lugar no desde pocos codós, sino desde varios miles de codós.

*Salviati:* Si fuera esto lo que quería decir ARISTÓTELES, le cargas con otro error que equivaldría a una falsedad; porque, puesto que en la Tierra no disponemos de alturas verticales tan grandes, es evidente que ARISTÓTELES no podría haber realizado el experimento; con todo, él pretende darnos la impresión de haberlo realizado cuando habla de dicho efecto como de algo que podemos ver.

---

En estudios posteriores, GALILEO establece que cuerpos de materiales diferentes, al dejarlos caer simultáneamente desde una misma altura, alcanzan el suelo al mismo tiempo (o en instantes casi coincidentes). Atribuye correctamente

las pequeñas diferencias de tiempo de caída a diferencias en el enfrenamiento por parte del aire sobre cuerpos de formas y tamaños diferentes, y afirma su creencia de que al dejar caer los cuerpos en el vacío, todos alcanzarían el suelo al mismo tiempo.

No se pueden resumir en forma concisa las contribuciones de GALILEO a la Mecánica. No sólo practicó el método experimental en la Física sino que, junto con KEPLER, introdujo y demostró la utilidad del razonamiento matemático en el estudio de los fenómenos físicos. Dio la fuerza y el impulso finales que acabaron con la autoridad de ARISTÓTELES. En un sentido más técnico, proporcionó la base real de los futuros desarrollos de NEWTON, ya que fue GALILEO quien introdujo la idea de que los empujes y tracciones (fuerzas) sirven para hacer variar el estado de movimiento de un cuerpo. Fue a GALILEO a quien se refirió NEWTON al decir que si él (NEWTON) había realizado más que otros era porque se apoyó sobre hombros de gigantes.

Según indicamos en el apartado anterior, ISAAC NEWTON reunió los movimientos local y celeste y demostró que el mismo sistema de leyes conducía a una descripción correcta de los dos tipos de fenómenos.

NEWTON y sus contemporáneos y predecesores se ocuparon principalmente de los empujes y tracciones de los tipos de «contacto» y gravitatorio. Un cuerpo cae a causa de la tracción que le ejerce la Tierra (fuerza gravitatoria) y cuando alcanza el suelo se detiene a causa de una fuerza de «contacto». Después de NEWTON, durante los siglos XVIII y XIX, se estudiaron detalladamente las fuerzas electrostáticas y electromagnéticas. A COULOMB y a CAVENDISH se debe la mayoría de los avances en Electrostatica, y a FARADAY y HENRY la mayor parte del desarrollo del magnetismo. JAMES CLERK MAXWELL (1831-1879) reunió los fenómenos magnéticos y electrostáticos en una teoría general, de la cual nació nuestro conocimiento de las ondas y fuerzas electromagnéticas. Durante el siglo XX ha aumentado nuestro conocimiento de todas estas fuerzas, gravitatorias, electromagnéticas y de contacto (interatómicas últimamente), hallándose en estudio actualmente las fuerzas nucleares.

**1-3 Longitud y tiempo.** La longitud y el tiempo son los ingredientes fundamentales en el estudio del movimiento. Si quisiéramos formular una definición operativa, es decir, una descripción de estas cantidades en función del método de medida, encontraríamos que no hay nada que sea mucho más profundo que lo que podemos decir en principio de que «la longitud es lo que medimos con una regla graduada o con un instrumento basado en ella», y que «tiempo es lo que medimos con un reloj». Una ulterior explicación lleva consigo una descripción de las propiedades de los instrumentos de medida de longitud y de los relojes. En el desarrollo de la teoría (no relativista) del movimiento supondremos que esas propiedades son las que nos son familiares en nuestra experiencia diaria.

Por ejemplo, supondremos que las longitudes y tiempos medidos por dos observadores que se mueven uno respecto al otro, no están influidos por el movimiento. Esta hipótesis viene corroborada experimentalmente a las velocidades que aparecen en la vida diaria. En cambio, a velocidades próximas a la de la luz no resulta posible una descripción de las observaciones del movimiento que sea compatible con la hipótesis que acabamos de mencionar. En su lugar, debe suponerse que las medidas de longitud y tiempo realizadas por dos observadores que se mueven uno respecto a otro, depende de su movimiento. Este tema, la Relatividad restringida (EINSTEIN) es muy importante para el estudio del movimiento de las partículas atómicas y subatómicas, que frecuentemente alcanzan velocidades del orden de la de la luz.

*Unidades.* La medida de una longitud lleva consigo una comparación con un patrón elegido como unidad de longitud y la unidad puede dividirse en fracciones de su longitud. Por ejemplo, una regla de un metro está dividida en centésimas (centímetros) y milésimas (milímetros). La unidad fundamental de longitud (el metro) es la distancia entre dos marcas practicadas en una barra de platino iridiado que se conserva en Sèvres (Francia). La distancia entre esas dos marcas que define el metro, se ha tomado arbitrariamente. En otros muchos lugares de la Tierra se dispone de patrones secundarios fabricados con precisión. La Conferencia Internacional de Pesas y Medidas, organismo internacional, ha considerado la posibilidad de definir el metro en función de un cierto número de longitudes de onda de la luz de una línea espectral atómica particular. La definición seguiría siendo arbitraria, pero una tal definición tiene la ventaja de que el patrón primario de longitud sería independiente del ambiente y estaría a la disposición de cualquiera que quisiera instalar los instrumentos necesarios.

La primera base para el concepto de tiempo la constituyen nuestras experiencias subjetivas. El tiempo que transcurre entre latidos de nuestro pulso, entre inspiraciones sucesivas de nuestra respiración, el crecimiento, envejecimiento —todo ello, junto con el paso de los días y de las estaciones, establecen nuestra noción de tiempo. Con anterioridad al siglo XVII y a la invención de cronómetros de precisión, \* la unidad de tiempo se basaba en el día solar, siendo éste el tiempo que transcurre entre dos pasos consecutivos del Sol por el cenit. Sin embargo, se encontró que la duración del día solar variaba a causa del hecho de que la Tierra recorre una trayectoria elíptica en torno al Sol y que el plano de la elipse no coincide con el del ecuador terrestre. Se adoptó el día solar medio, definido como la duración del día solar promediada para un año entero. [Evidentemente, el segundo es  $1/(24 \cdot 3600)$  de día]. Este patrón de tiempo se mantuvo

---

\* Acerca de la interesantísima historia de la importancia y desarrollo de relojes buenos para la navegación, véase «The Longitude» de LLOYD A. BROWN en *The World of Mathematics*, Vol. 2, editado por J. R. Newman. Simon and Schuster, New York, 1956.

hasta hace poco que se encontró que el período de la rotación terrestre calculado a partir del movimiento aparente de las estrellas, variaba aproximadamente 0,03 s cada año. Esta variación no tiene importancia para los actos ordinarios de la vida, pero es mucho mayor que la incertidumbre en las medidas de tiempo realizadas en el laboratorio con relojes atómicos. Es interesante observar cuánto se ha apartado la Ciencia de los puntos de vista aristotélicos, en los que no se ponía en duda que el mejor registro del tiempo residía en la propia Tierra.

*Medida y dominios del tiempo y la longitud.* La longitud y el tiempo y sus métodos de medida conocidos por la experiencia diaria se utilizan en Física tanto para fenómenos a muy pequeña escala como a escala muy grande. Ciertamente, no podemos estudiar aquí todos los tipos de medidas de longitud y tiempo. Tal estudio nos llevaría a través de la mayor parte de la Ciencia y desde luego, a través de toda la Física. Las medidas «directas» —medidas de longitud con cintas métricas, reglas graduadas o micrómetros, y medidas del tiempo con relojes y cronómetros— no nos hacen penetrar mucho en los dominios en los que pueden y deben hacerse medidas. Debemos recurrir a medidas indirectas.

Inmediatamente por debajo del dominio de los micrómetros ( $10^{-3}$  cm), los microscopios ópticos y electrónicos hacen posible la observación y medida de microorganismos y de las macromoléculas. Con microscopios ópticos estas medidas tienen un límite inferior de pocas longitudes de onda de la luz, o sea unos 10 000 Å (una unidad ångström equivale a  $10^{-8}$  cm). Por otra parte, el microscopio electrónico permite el estudio de detalles en la región de los 100 Å, y puede realizarse medidas hasta de 10 Å quizá. Las moléculas inorgánicas son de pocos ångström y los átomos tienen tamaños del orden de 1 Å. Los núcleos atómicos tienen diámetros comprendidos entre  $10^{-12}$  cm y  $10^{-13}$  cm.

Al igual que la luz tiene longitud de onda, también la tienen las partículas de las que está constituida la materia. Cuanto más rápida sea la partícula, tanto menor se hace su longitud de onda. Las longitudes de onda de algunas partículas

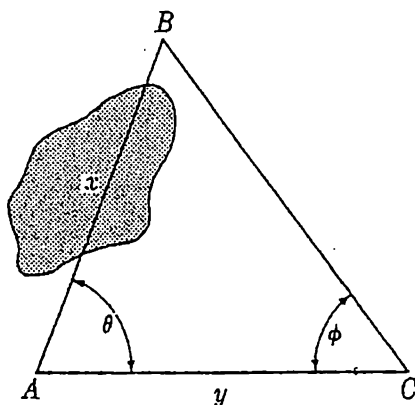


Fig. 1-6. La distancia  $x$ , que no puede medirse directamente, puede hallarse a partir de la distancia  $y$  y de los ángulos  $\theta$  y  $\phi$ .

especialmente las aceleradas en ciclotrones, sincrotrones, etc., son del orden de  $10^{-15}$  cm. Las longitudes de onda más cortas de las partículas son del orden de  $10^{-23}$  cm y corresponden a las partículas más energéticas de los rayos cósmicos.

Un tipo de medida indirecta que nos es familiar, es la triangulación. Supongamos que queremos conocer la distancia  $x$  entre los puntos  $A$  y  $B$  que, por alguna causa, no son accesibles a la medida directa. Entonces, según se muestra en la figura 1-6, puede determinarse la distancia  $x$  si se conocen los dos ángulos  $\theta$  y  $\phi$  y la distancia  $y$ .

Ya habíamos estudiado anteriormente la medida indirecta de distancias por triangulación al hablar de la controversia entre los sistemas geocéntrico y heliocéntrico. Hasta 1838 no se pudo medir la paralaje estelar y hallar (indirectamente) la distancia a una estrella por triangulación. La estrella más próxima al sistema solar se halla a una distancia de 4,3 años-luz y tiene una paralaje de menos de un segundo de arco. La mayoría de estrellas y galaxias se hallan demasiado alejadas para que las medidas de su paralaje puedan tener significado. Como ejemplo de medidas aún menos directas estudiaremos brevemente una de las maneras en que pueden medirse estas enormes distancias.

Existe un tipo de estrellas variables llamadas Cefeidas cuyo brillo oscila con el tiempo. Es corriente que una Cefeida aparezca brillante, se oscurezca y luego vuelva a aparecer brillante con un período de, por ejemplo, cinco días. Varias de estas estrellas se descubrieron en la Nube Menor de Magallanes, la galaxia más próxima a la nuestra que es la Vía Láctea. Aparte de su posición angular, hay dos cosas que pueden medirse fácilmente en una Cefeida: su brillo aparente (magnitud) y su período. Trazando una gráfica en la que se represente el período en función de la magnitud (o brillo aparente) y se represente por un punto cada Cefeida de la Nube Menor de Magallanes, hallamos que los puntos no se hallan distribuidos al azar sobre el diagrama, sino que se agrupan a lo largo de una curva de forma regular. Ello significa que el período de una Cefeida depende de alguna manera de su brillo. Ahora bien, el brillo de una estrella depende de la luz total emitida y de lo lejos que esté. Cuando se preparan diagramas para otras galaxias, hallamos que las Cefeidas se agrupan a lo largo de curvas regulares, pero estas curvas están desplazadas de la correspondiente a la Nube Menor de Magallanes. Luego, si suponemos que la luz total emitida por una Cefeida de un período dado es siempre la misma independientemente de la galaxia en la que se encuentre, el desplazamiento de estas curvas nos da una medida relativa de lo alejadas de nosotros que se encuentran dichas galaxias. Esta es una de las maneras de medir las inmensas distancias del Universo. Ciertamente, en medidas indirectas de ese tipo pueden haber fuentes de error. De todas maneras, es importante que estas posibles fuentes de error se hagan explícitas y se tengan siempre presentes.

El diámetro de la Tierra es de  $1,3 \cdot 10^7$  m, mientras su órbita alrededor del Sol es de  $3 \cdot 10^{11}$  m de diámetro. La estrella más próxima, alfa Centauri, se halla a 4,3 años-luz o sea a unos  $4 \cdot 10^{16}$  m, y nuestra galaxia tiene un diámetro de 100 000 años-luz, o sea  $10^{21}$  m. Las Nubes de Magallanes se hallan a pocos diámetros galácticos de nosotros y en el espacio se encuentran galaxias a distancias tan grandes como las mayores que podamos explorar. En la actualidad, la máxima distancia explorada es de unos mil millones de años-luz, o sea  $10^{25}$  m.

Las medidas del tiempo, al igual que las de longitud, cubren muchos órdenes de magnitud por encima y por debajo de los que nos encontramos en nuestra experiencia cotidiana. Las técnicas fotográficas tales como la fotografía de relámpago múltiple que estudiaremos más adelante en este capítulo, son útiles para medir el tiempo en acontecimientos sucesivos entre los cuales transcurra más de  $10^{-4}$  s. En  $10^{-4}$  s, una bala o una onda sonora recorren pocos centímetros y las ondas luminosas y de radio recorren 30 km. Un átomo excitado tarda en emitir luz  $10^{-8}$  s y la luz que sale de esta página tarda  $10^{-9}$  s en llegar a los ojos del lector. Algunas de las partículas descubiertas recientemente en la Física de las altas energías tienen tiempos de vida media de  $10^{-13}$  s y para que la luz recorra un diámetro nuclear se precisa un tiempo de  $10^{-22}$  s. Nos llevaría muy lejos el describir cómo se miden o pueden estimarse estos tiempos tan cortos. No es necesario decir que los métodos son indirectos y muy poco relacionados con los fenómenos familiares que nos sugirieron primitivamente el concepto de tiempo.

En el dominio de los tiempos largos, las medidas no son menos llamativas y quizá aún menos directas. El Hombre tal como el que hoy día existe ocupó la Tierra hace, quizá, 100 000 años, parte muy pequeña de la edad estimada de la Tierra (varios miles de millones de años) y la historia registrada se remonta solamente a 5000 años. Los talentos combinados de la gente en las diversas ciencias han contribuido a reconstruir la historia del Hombre, de la Tierra y del Universo. Cuando contemplamos una estrella, alfa Centauri por ejemplo, vemos la luz que emitió hace 4,3 años por lo que, en cierto sentido, estamos viendo historia. Y, desde luego, se sigue que deberemos esperar 4,3 años para ver la luz emitida hoy.

En ocasiones se considera que la edad del Universo es de unos diez mil millones de años. ¿Qué significa eso? Según hemos mencionado anteriormente en este apartado, se han observado galaxias separadas de nosotros aproximadamente mil millones de años-luz. El movimiento de esas galaxias es tal que tienen velocidades (dirigidas en el sentido de alejamiento de nosotros) proporcionales a las distancias que nos separan de ellas. Esto se ha interpretado considerando que todas las galaxias se están alejando más y más unas de otras y que un observador situado en una galaxia cualquiera vería el mismo movimiento general de las demás galaxias que vemos nosotros. Si suponemos que todas las galaxias que vemos han existido siempre y si sus velocidades han sido siempre propor-



cionales a las distancias de sus alejamientos, en un tiempo debieron haberse hallado en un estado muy condensado y ello debió ocurrir hace diez mil millones de años. Esta estimación se presta a controversias y existen otras interpretaciones de los datos. Resulta interesante el hecho de que la edad de la Tierra, calculada a partir de evidencias geológicas y radiactivas, también se estima en varios miles de millones de años.

**1-4 Velocidad y aceleración.** En este apartado echamos una ojeada a las cantidades *velocidad* y *aceleración* y tendremos la oportunidad de introducir la técnica de fotografía de relámpago múltiple para el estudio del movimiento:

*Velocidad.* Se ilumina el cuerpo cuyo movimiento queremos estudiar, mediante una luz que emite destellos a una velocidad regular. Sobre el objeto se enfoca una cámara fotográfica con su obturador abierto. La duración del destello es muy corta, por lo que si el cuerpo no va demasiado deprisa cada destello dará origen a una imagen neta del cuerpo sobre la fotografía. La figura 1-7 es una fotografía de relámpago múltiple de una bola de billar que rueda sobre una superficie horizontal lisa. A partir de esta fotografía podemos determinar la posición de la bola en cada instante en que se producía un destello. Los datos pueden llevarse a una gráfica que representa la posición  $x$  en función del tiempo  $t$ . En la gráfica de la figura 1-8 hemos tomado como posición  $x = 0$  la correspondiente a la imagen de la bola más extrema a la izquierda. Los puntos se hallan sobre una recta y al trazarla, hemos supuesto que si hubiera habido mayor

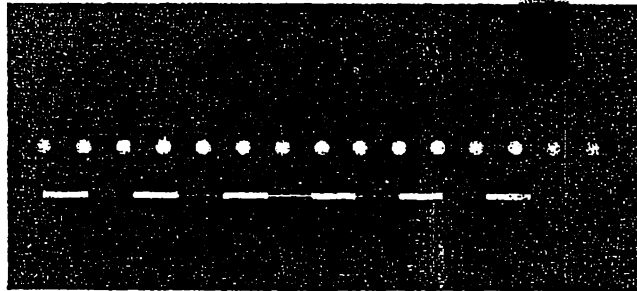


Fig. 1-7. Fotografía de relámpago múltiple de una bola de billar que rueda hacia la derecha a lo largo de una superficie horizontal lisa. Obsérvese que la bola ha recorrido distancias iguales entre destellos sucesivos. (Las franjas blancas sobre la barra son de 10 cm de longitud).

número de destellos por segundo, los puntos adicionales habrían caído sobre esta misma recta. En este caso particular, la distancia recorrida es proporcional al tiempo transcurrido. La constante de proporcionalidad que nos da la distancia recorrida en unidad de tiempo recibe el nombre de velocidad  $v$  y tenemos

$$x = vt$$

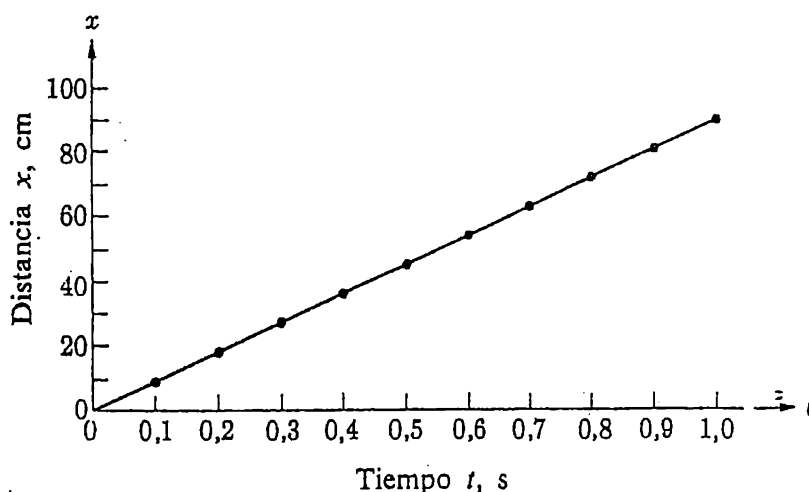


Fig. 1-8. Datos observados, posición  $x$  en función del tiempo  $t$ . La velocidad es constante.

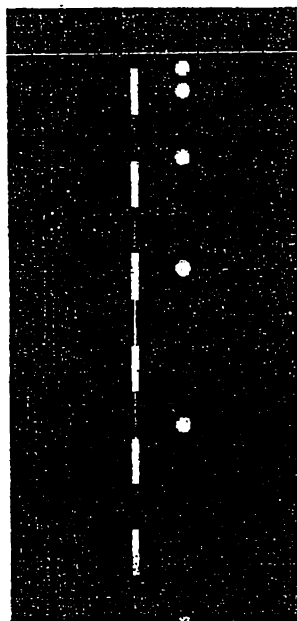


Fig. 1-9. Caída libre. Se soltó el cuerpo en el instante del primer destello, y los destellos siguientes estaban espaciados 0,1 s.

Si tuviéramos que trazar la gráfica de la ecuación algebraica  $y = bx$ , obtendríamos una recta de pendiente  $b$ . Si es  $\theta$  el ángulo que forma la recta con el eje  $x$ ,  $b$  y  $\theta$  estarían relacionados por la expresión  $b = \operatorname{tg} \theta$ . Evidentemente, la velocidad está relacionada con la pendiente de la gráfica de  $x$  en función de  $t$ , ya que aparece en  $x = vt$  de la misma manera que aparece  $b$  en  $y = bx$ . Sin embargo, es poco frecuente que se tracen las gráficas de manera que la unidad de longitud y la unidad de tiempo estén representadas por longitudes iguales sobre los ejes de abscisas y ordenadas. Por tanto, corrientemente no será lícito decir que  $v$

es  $\text{tg } \phi$ , donde  $\phi$  es el ángulo que forma la recta de la gráfica con el eje de abscisas. Aún así, frecuentemente nos referiremos a la velocidad como a la pendiente de la gráfica de  $x$  en función de  $t$  y con esto queremos significar  $v = \Delta x / \Delta t$ , donde  $\Delta x$  es la distancia recorrida durante el intervalo de tiempo  $\Delta t$ .

Utilicemos ahora la técnica de la fotografía de relámpago múltiple para estudiar la velocidad de un cuerpo en caída libre. El primer destello correspondiente a la imagen de la figura 1-9 se produjo en el instante en que se soltaba la bola y los destellos siguientes se produjeron cada 0,1 s. De la figura pueden sacarse a escala las distancias y trazar la gráfica de la posición en función del tiempo que puede verse en la figura 1-10. Por los puntos experimentales se ha trazado una curva regular. Se ve claro que la velocidad aumenta con el tiempo, ya que la distancia recorrida en un tiempo dado,  $\Delta t = 0,1$  s, por ejemplo, crece constantemente. Si calculamos la velocidad de acuerdo con  $v = \Delta x / \Delta t = (x_2 - x_1) / (t_2 - t_1)$ , vemos que debe interpretarse como velocidad *media* del cuerpo entre los instantes  $t_1$  y  $t_2$ , ya que la velocidad varía continuamente. Tomaremos, pues,  $\Delta x / \Delta t$  como definición de velocidad media. \*

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (1-2)$$

Esta velocidad media  $\bar{v}$  puede interpretarse como la pendiente de la secante trazada por los puntos  $(t_1, x_1)$  y  $(t_2, x_2)$ , según se indica en la figura 1-11(a). La curva de  $x$  en función de  $t$  que representa el movimiento de un cuerpo real cualquiera, es siempre de forma regular. Por tanto, si hacemos tender  $t_2$  a  $t_1$  (es decir, haciendo tender a cero el intervalo de tiempo  $\Delta t = t_2 - t_1$ ), la secante a que acabamos de referirnos tendrá una pendiente que tenderá a la pendiente de la tangente a la curva de  $x$  en función de  $t$ , en el punto correspondiente a  $t_1$ . La pendiente de la tangente a la curva de  $x$  en función de  $t$ , en el instante  $t_1$  se toma como velocidad instantánea en  $t_1$ :

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (1-3)$$

donde, con la notación de Cálculo diferencial,  $dx/dt$  es la derivada de  $x$  respecto al tiempo. De momento solamente vamos a hacer uso de la interpretación geométrica de la derivada. Como consideraremos siempre positivo  $\Delta t$ , las definiciones (1-2) y (1-3) indican que una velocidad positiva (es decir, un  $\Delta x$  positivo) corresponde a un movimiento en el sentido de las  $x$  crecientes, y una velo-

---

\* De ahora en adelante, para indicar el valor medio en el tiempo de una cantidad colocaremos una raya sobre la letra representativa de dicha cantidad.

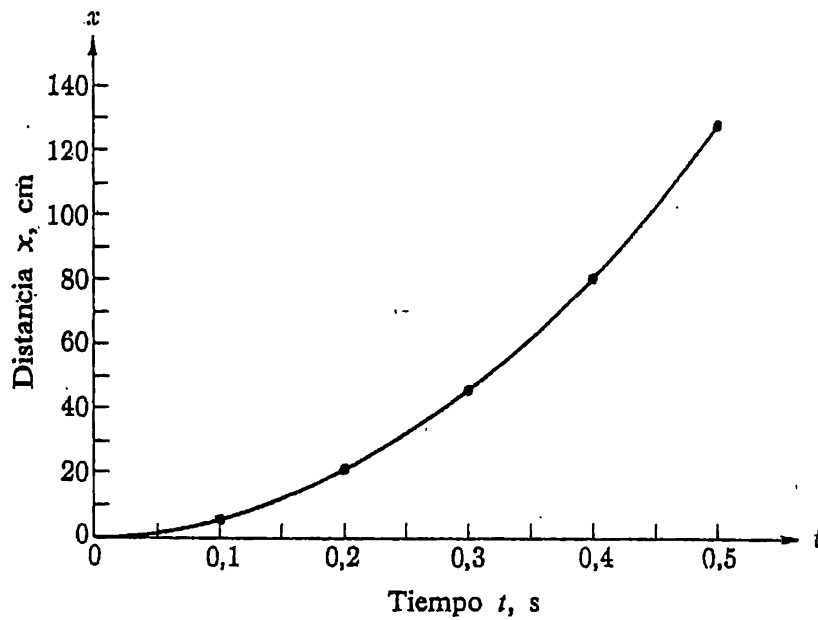


Fig. 1-10. Distancia caída  $x$  en función del tiempo  $t$  correspondiente a la caída libre de la figura 1-9.

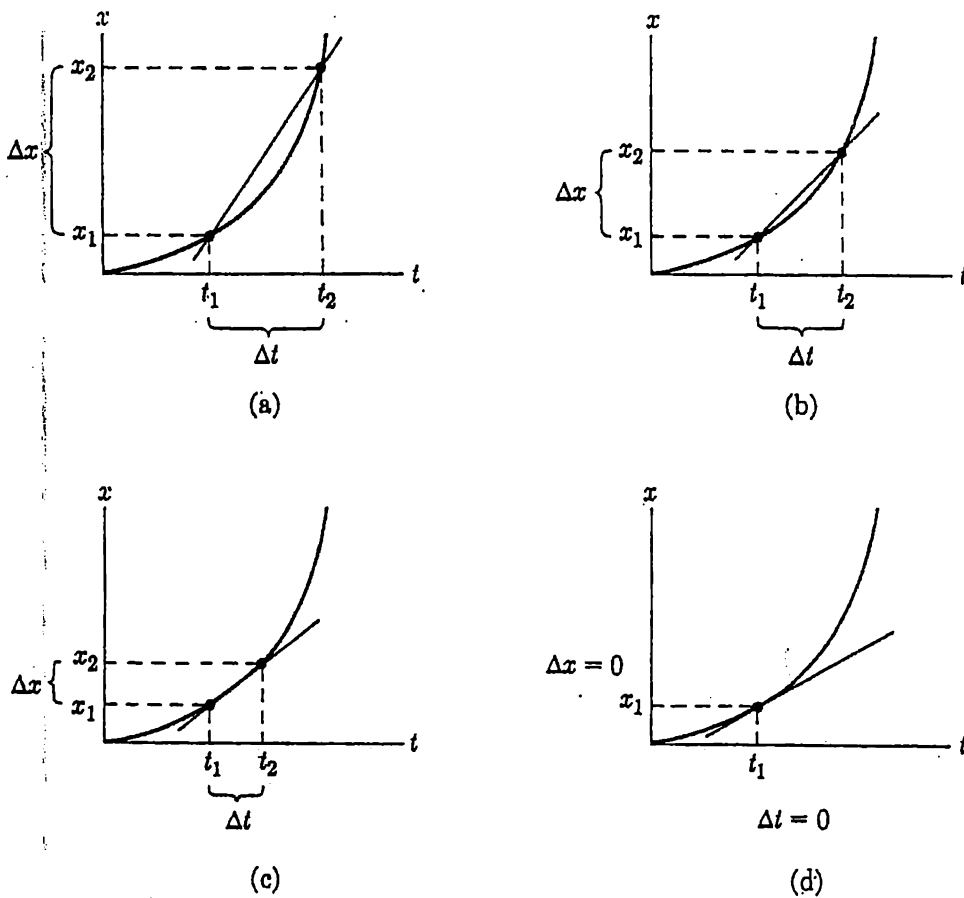


Fig. 1-11. La velocidad media es la pendiente de la secante. Al ir haciendo  $\Delta t$  cada vez menor, la pendiente de la secante tiende a la de la tangente.

cidad negativa corresponde al movimiento en el sentido de las  $x$  decrecientes. A la magnitud de la velocidad se le da el nombre de *celeridad*. Sólo indica lo rápidamente que se mueve el cuerpo y nada dice acerca de la dirección en que lo hace.

Volvamos al movimiento de caída libre representado en la figura 1-10. La posición del cuerpo que cae se mide a partir del punto en que se suelta y la coordenada  $x$  correspondiente aumenta hacia *abajo*. Eligiendo este sentido positivo para  $x$  la velocidad del cuerpo es positiva y, tal como acabamos de tratarlo, crece constantemente.

*Aceleración.* Al igual que la velocidad es una medida de lo rápidamente que cambia la posición con el tiempo, la aceleración es una medida de lo rápidamente que varía con el tiempo la velocidad; y al igual que la velocidad puede interpretarse como la pendiente de la curva de  $x$  en función de  $t$ , la aceleración puede interpretarse como la pendiente de la curva  $v$  función de  $t$ .

La velocidad en el movimiento de caída libre, determinada a partir de la pendiente de la curva  $x$  función de  $t$  de la figura 1-10, está representada en función del tiempo en la figura 1-12. Vemos que la velocidad crece linealmente con el tiempo, es decir, la aceleración  $a$  es constante y tenemos

$$v = at$$

En este caso encontramos, a partir de los resultados experimentales, el valor  $a \approx 980 \text{ cm/s}^2$  o sea  $9,8 \text{ m/s}^2$ . [La aceleración de la gravedad se ha medido muchas veces y en lugares muy diferentes. Su valor varía con la altura sobre la superficie terrestre y también varía con la latitud, siendo alrededor de  $1/2\%$  mayor en los polos que en el ecuador.] En general, la pendiente de la curva  $v$  función de  $t$  no es constante y definiremos la aceleración (instantánea) en un instante  $t_1$  como la pendiente en dicho punto. Esta pendiente puede aproximarse a un grado cualquiera de aproximación con el cociente  $\Delta v / \Delta t = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1)$  tomando  $\Delta t$  suficientemente pequeño. La cantidad

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (1-4)$$

recibe el nombre de aceleración *media* en el intervalo de tiempo  $\Delta t$ . La aceleración instantánea, análogamente a como ocurría con la velocidad instantánea, es

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad (1-5)$$

*Posición en función del tiempo.* Supongamos que tenemos la gráfica  $v$  función de  $t$  de un cuerpo móvil. ¿Cómo podemos hallar su posición en función del tiem-

po? Veamos, en primer lugar, un ejemplo sencillo. En la figura 1-13 la velocidad es de 10 m/s durante 5 s y luego de 7 m/s durante 10 s. ¿Qué distancia habrá recorrido el cuerpo al cabo de los 15 s? La distancia recorrida es la suma de 50 m (10 m/s durante 5 s) más 70 m (7 m/s durante 10 s) o sea 120 m. La distancia recorrida está representada por el área limitada bajo la curva de la velocidad según se indica en la figura. En realidad, la distancia recorrida es proporcional a este área. Desde luego, la constante de proporcionalidad depende de las escalas tomadas sobre los ejes  $v$  y  $t$ . En lo sucesivo, supondremos siempre que se ha considerado este problema de los factores de escala cuando se utilice el área bajo una curva para representar una cantidad física.

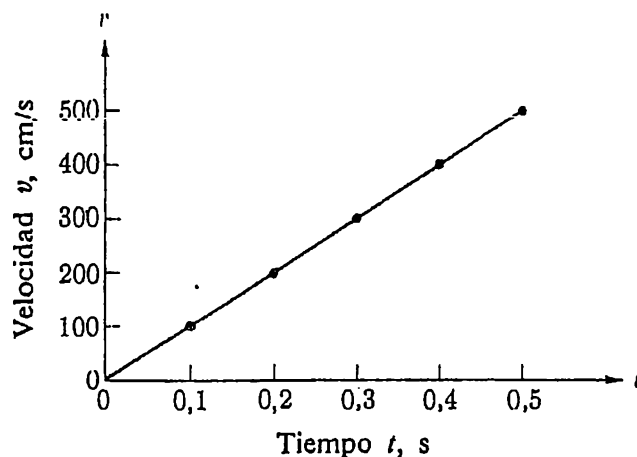


Fig. 1-12. La velocidad en función del tiempo en el movimiento de caída libre. La velocidad crece linealmente con el tiempo.

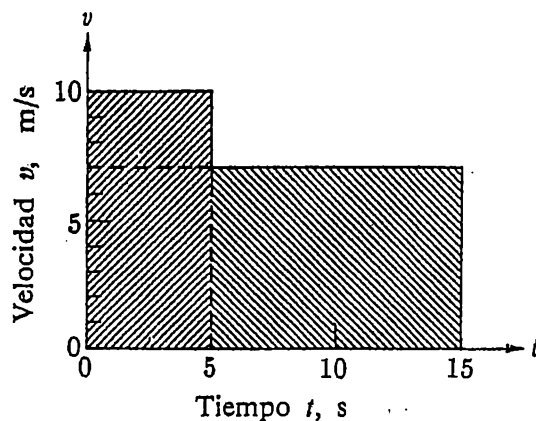


Fig. 1-13. Gráfica de la velocidad en función del tiempo. La distancia total recorrida es de 120 m y está representada por el área sombreada.

La situación es enteramente análoga cuando la velocidad varía continuamente con el tiempo. Aproximando el movimiento a una sucesión de movimientos a celeridad constante hallamos de nuevo que la distancia recorrida está representada por el área bajo la curva, según se indica en la figura 1-13. En la figura 1-14(a) se ilustra el caso particular en que la velocidad crece uniformemente desde 0 hasta  $v$  en un tiempo  $t$ . La velocidad media es, entonces,  $v/2$ , por lo que la distancia recorrida será  $vt/2$ , o sea el área limitada por la gráfica de  $v$  función de  $t$ . Como en el movimiento uniformemente acelerado la velocidad es, simplemente,  $v = at$ , la distancia recorrida es

$$x = \frac{vt}{2} = \frac{1}{2}at^2$$

Si un cuerpo tiene una velocidad inicial  $v_0$  y se mueve a partir de ese instante con movimiento uniformemente acelerado, su curva  $v$  función de  $t$  podría ser como la de la figura 1-14, dada algebraicamente por

$$v = v_0 + at \quad (1-6)$$

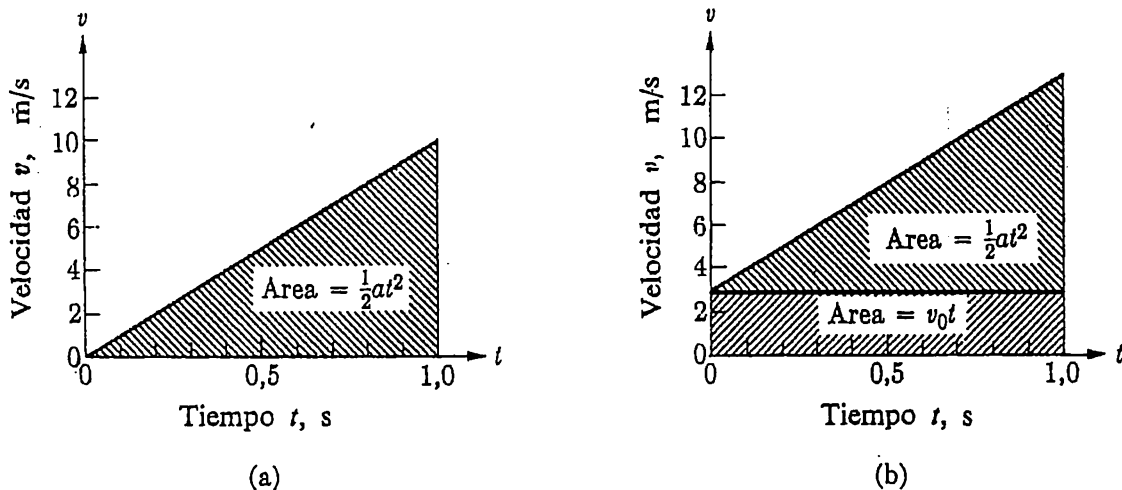


Fig. 1-14. En (a), la velocidad aumenta uniformemente de 0 a 10 m/s en 1,0 s. La aceleración es de 10 m/s<sup>2</sup> y la distancia recorrida 5 m. En (b), la aceleración es la misma que en (a), pero la velocidad inicial es  $v_0 = 3$  m/s. La distancia recorrida es de 8 m.

La distancia recorrida vuelve a ser el producto de la velocidad media por el tiempo transcurrido (área limitada por la curva  $v$  función de  $t$ ):

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad (1-7)$$

Frecuentemente, en relación con la caída de cuerpos, conviene utilizar una coordenada de posición  $y$  que aumente hacia arriba. Entonces, las expresiones que hemos desarrollado para los cuerpos que caen libremente, con  $a = -g$ ,  $y = y_0$  en  $t = 0$ , toman la forma:

$$v = v_0 - gt, \quad y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (1-8)$$

donde ahora las velocidades son positivas hacia arriba y  $g$  es la aceleración de la gravedad, nominalmente  $9,8 \text{ m/s}^2$  o sea  $980 \text{ cm/s}^2$ . En el Capítulo 5 presentaremos un estudio más completo de este movimiento.

**Vectores.** Las cantidades físicas tales como la masa, densidad, temperatura, celeridad, etc., llamadas cantidades *escalares*, tienen una propiedad en común: basta un número para especificarlas. Cuando hablamos de la masa de un coche, es suficiente decir 1000 kg, por ejemplo. En cambio, una descripción unívoca de la velocidad o del desplazamiento de un coche precisa información no sólo de la magnitud de la velocidad o del desplazamiento, sino también el conocimiento de la dirección y el sentido de movimiento. Las cantidades tales como la velocidad o el desplazamiento, que precisan se conozca la magnitud, dirección y sentido, o más de un número, para su descripción, reciben el nombre de *vectoriales*. El ente matemático que las mide recibe el nombre de *vector*. Como el vector desplazamiento es particularmente fácil de representar, lo utilizaremos para estudiar algunas de las propiedades fundamentales de los vectores. Los resultados que se obtengan para el vector desplazamiento son aplicables directamente a otras cantidades vectoriales.

Consideremos dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  en el plano  $xy$  de un sistema de coordenadas, tal como se indica en la figura 1-15. Las coordenadas de los dos pun-

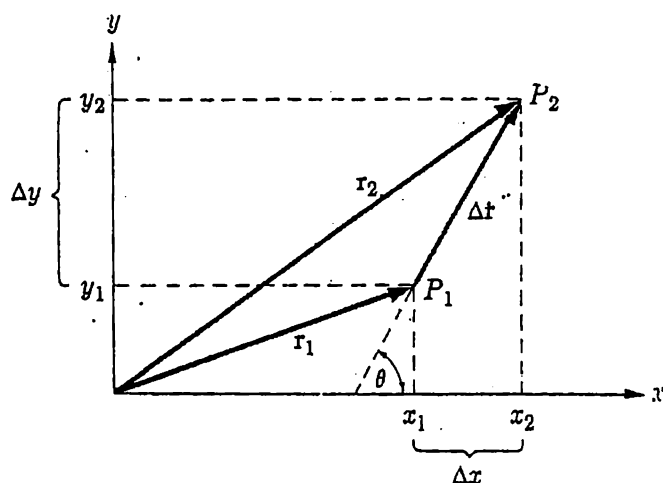


Fig. 1 - 15.  $P_1$  y  $P_2$  son dos puntos del plano  $xy$ .



tos son  $x_1, y_1$  y  $x_2, y_2$ . El desplazamiento de  $P_1$  a  $P_2$  está definido por las componentes

$$\Delta x = x_2 - x_1, \quad \Delta y = y_2 - y_1$$

La magnitud del desplazamiento, definida como la distancia  $P_1P_2$ , es pues

$$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1-9)$$

y la dirección del desplazamiento especificada por el ángulo  $\theta$  que forma  $P_1P_2$  con el eje  $x$  viene dada por

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (1-10)$$

Inversamente, si conocemos la magnitud, dirección y sentido del desplazamiento, las componentes del desplazamiento se obtienen de las relaciones

$$\Delta x = \Delta r \cos \theta, \quad \Delta y = \Delta r \sin \theta \quad (1-11)$$

Como notación abreviada para la pareja de números  $(\Delta x, \Delta y)$  o  $(\Delta r, \theta)$  que definen el desplazamiento de  $P_1$  a  $P_2$ , conviene emplear el símbolo único  $\Delta \mathbf{r}$ , llamado representación vectorial del desplazamiento. La magnitud del desplazamiento que hemos representado anteriormente por  $\Delta r$  se escribe también en la forma  $|\Delta \mathbf{r}|$ .

En relación con la definición del vector  $\Delta \mathbf{r}$  resulta interesante el siguiente comentario. Dos vectores desplazamiento se consideran iguales si tienen las mismas componentes  $\Delta x$  y  $\Delta y$ . En otras palabras, dos desplazamientos que partan de puntos *diferentes* pero que tengan igual magnitud, dirección y sentido están descritos por *el mismo* vector. A causa de esta propiedad del vector desplazamiento,

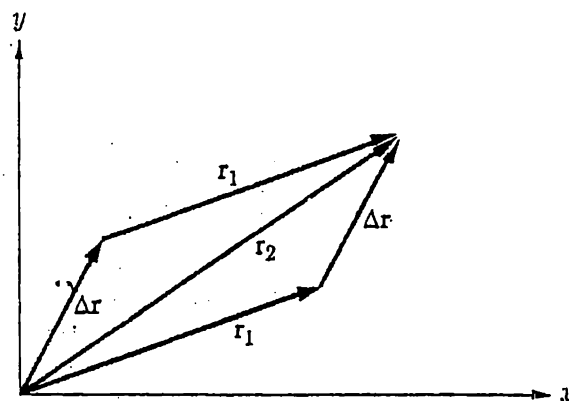


Fig. 1-16. Vector  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \Delta \mathbf{r}$  o bien  $\mathbf{r}_2 = \Delta \mathbf{r} + \mathbf{r}_1$

se dice que es un vector «libre». El vector desplazamiento del origen de coordenadas al punto  $P_1$  recibe el nombre de *vector de posición* de  $P_1$  y se representa por  $r_1$ , que tiene por componentes  $x_1$  e  $y_1$ . Análogamente, el vector de posición de  $P_2$  se representa por  $r_2$  y sus componentes son

$$x_2 = x_1 + \Delta x, \quad y_2 = y_1 + \Delta y \quad (1-12)$$

donde  $\Delta x$  y  $\Delta y$  son las componentes del vector desplazamiento  $\Delta r$ , correspondientes al desplazamiento de  $P_1$  a  $P_2$ , tal como se indica en la figura 1-15.

*Suma vectorial.* Como un vector  $r$  representa a las dos componentes  $x$ ,  $y$ , podemos interpretar la ecuación 1-12 como una relación entre los vectores  $r_1$ ,  $r_2$  y  $\Delta r$  y como método abreviado para escribir las dos relaciones (1-12) utilizaremos la ecuación vectorial

$$r_2 = r_1 + \Delta r \quad (1-13)$$

Al vector  $r_2$  se le llama *suma vectorial* de los dos vectores  $r_1$  y  $\Delta r$ . El significado geométrico de la suma vectorial queda ilustrado en la figura 1-16. La suma de los dos vectores  $r_1$  y  $\Delta r$  puede decirse que es la diagonal trazada desde el origen de  $r_1$  hasta el extremo de  $\Delta r$  en el paralelogramo definido por los dos vectores. Es importante observar que la magnitud (también llamada *módulo*) del vector  $r_2$  no es igual a la suma de las magnitudes de los vectores  $r_1$  y  $\Delta r$  a menos que estos vectores tengan la misma dirección y sentido. El módulo de  $r_2$  se obtiene mediante la relación

$$r_2 = |r_2| = \sqrt{(x_1 + \Delta x)^2 + (y_1 + \Delta y)^2} \quad (1-14)$$

y la dirección de  $r_2$  se obtiene mediante

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1 + \Delta y}{x_1 + \Delta x} \quad (1-15)$$

De la figura 1-16 se deduce que el orden de los vectores sumando no altera la suma vectorial, es decir,

$$r_1 + \Delta r = \Delta r + r_1 \quad (1-16)$$

Definimos como vector opuesto del  $r$ , a otro vector que sumado con  $r$  da cero. Es evidente que este vector tendrá por componentes  $-x$ ,  $-y$ . Lo representaremos por  $-r$ . La diferencia entre dos vectores  $r_2$  y  $r_1$  se define, pues, como el vector  $\Delta r = r_2 + (-r_1)$ , que escribiremos en la forma

$$\Delta r = r_2 - r_1 \quad (1-17)$$

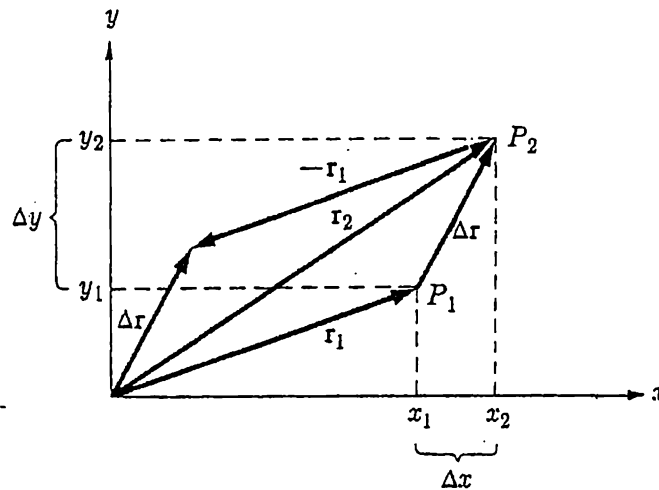


Fig. 1-17. Sustracción vectorial.

Esto define la operación de sustracción de vectores. Las componentes del vector diferencia  $\Delta r$  son

$$\Delta x = x_2 - x_1, \quad \Delta y = y_2 - y_1$$

que se ilustra gráficamente en la figura 1-17. Cuando se trazan dos vectores a partir de un mismo punto, la diferencia vectorial  $r_2 - r_1$  está representada por la flecha que va del extremo de  $r_1$  al de  $r_2$ .

La adición de vectores puede aplicarse a un número arbitrario de vectores. En la figura 1-18 pueden verse algunos ejemplos.

En el estudio anterior hemos considerado solamente vectores bidimensionales, es decir, vectores en un plano. No obstante, los resultados pueden extenderse fácilmente al caso de tres dimensiones. Si el punto  $P$  no se halla en el plano  $xy$ , el vector desplazamiento tendrá también una componente  $z$ . El módulo del vector desplazamiento resulta ser

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1-18)$$

y su dirección y sentido vienen determinados por los «cosenos directores»

$$\cos \theta_x = \frac{x}{r}, \quad \cos \theta_y = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta_z = \frac{z}{r} \quad (1-19)$$

donde  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  son los ángulos que forma el desplazamiento con los tres ejes de coordenadas.

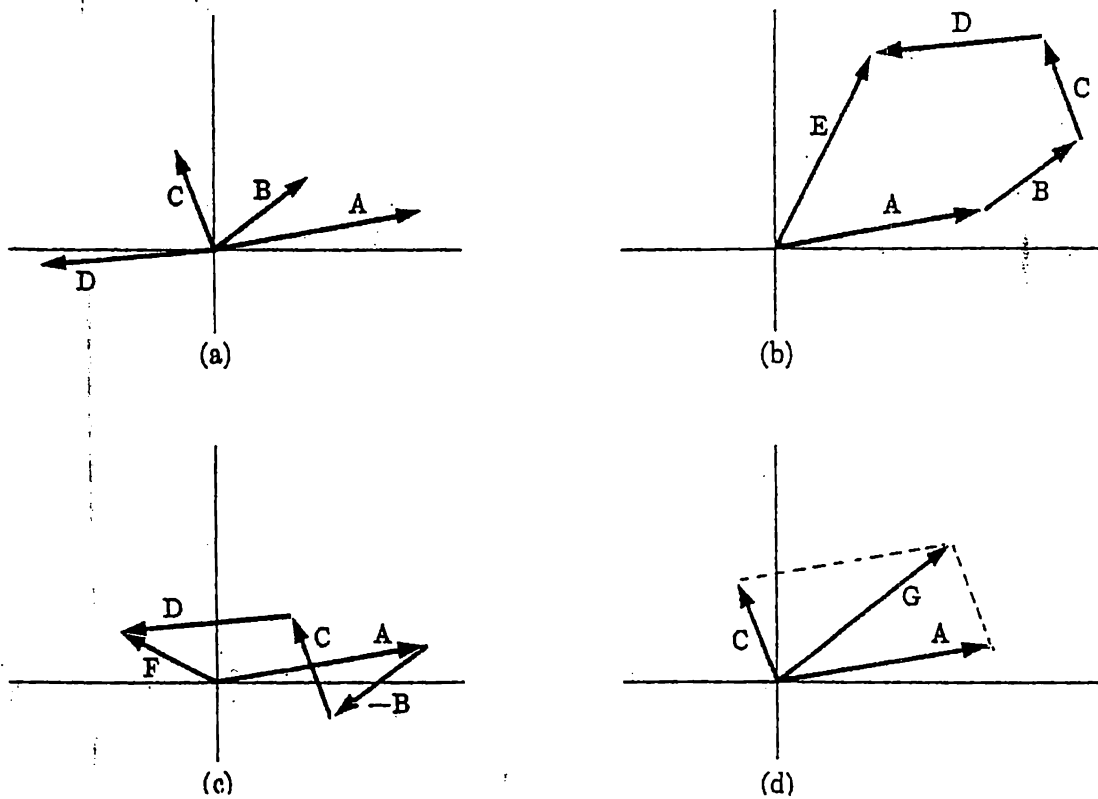


Fig. 1-18. Los vectores A, B, C y D de (a) se suman en (b) para formar  $E = A + B + C + D$ . En (c),  $F = A - B + C + D$ , y en (d)  $G = A + C$

*La velocidad es un vector.* La velocidad es la variación en unidad de tiempo del desplazamiento. Hemos visto que el módulo del desplazamiento en un plano es  $\Delta r = |\Delta \mathbf{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$  y si este desplazamiento se realiza en un tiempo  $\Delta t$ , la magnitud de la velocidad *media* en este intervalo de tiempo (la celeridad *media*) es

$$\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \sqrt{(\Delta x/\Delta t)^2 + (\Delta y/\Delta t)^2} = \sqrt{\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2} \quad (1-20)$$

La magnitud de la velocidad instantánea se obtiene en forma totalmente análoga a la del estudio unidimensional y tenemos

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \left( v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} \right) \quad (1-21)$$

donde  $v_x$  y  $v_y$  son las componentes de la velocidad según los ejes  $x$  e  $y$ . La di-

rección y sentido de la velocidad son los mismos que los del desplazamiento y vienen dados por

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{v_y}{v_x} \quad (1-22)$$

La velocidad media difiere del desplazamiento simplemente en un factor tiempo y se deduce que la velocidad, al igual que el desplazamiento, puede describirse mediante un vector. El vector velocidad media en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  es, pues,

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{t_2 - t_1} \quad (1-23)$$

con las componentes

$$\bar{v}_x = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}, \quad \bar{v}_y = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}$$

Análogamente, el vector velocidad instantánea será un vector de componentes  $dx/dt$  y  $dy/dt$  y podemos expresarlo como la variación en unidad de tiempo del vector de posición  $\mathbf{r}$ . Simbólicamente

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \left( v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} \right) \quad (1-24)$$

Cuando tratamos con desplazamientos, resultan evidentes los significados de adición y sustracción vectorial, así como la necesidad de utilizar estas operaciones. En cambio, el empleo de la adición y sustracción de velocidades no es, quizá, tan fácil de ver. Por ejemplo, la suma de las velocidades de dos partículas diferentes no tiene significado físico evidente. En realidad, la adición de velocidades sólo tiene significado cuando se hallan en movimiento la partícula y el punto de referencia del vector desplazamiento de la partícula. Por ejemplo, si el sistema de coordenadas es solidario a una plataforma móvil, la velocidad total (respecto al suelo) de una partícula que se mueve sobre la plataforma es la suma vectorial de la velocidad de la plataforma y de la velocidad del cuerpo respecto a la plataforma. Surge otro caso cuando estudiamos la velocidad respecto a un sistema de coordenadas fijo de un cuerpo que se mueve respecto a otro cuerpo móvil. Si, por ejemplo, los dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  de la figura 1-15 se mueven los dos, la separación de estos dos puntos descrita por el vector  $\mathbf{d} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  variará con el tiempo. La variación en unidad de tiempo de este vector recibe el nombre de *velocidad relativa* de  $P_2$  respecto a  $P_1$ . El valor medio de la velocidad relativa en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  es, pues,

$$\bar{\mathbf{v}}_r = \frac{\Delta \mathbf{d}}{\Delta t} = \frac{\Delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{r}_2}{\Delta t} - \frac{\Delta \mathbf{r}_1}{\Delta t} = \bar{\mathbf{v}}_2 - \bar{\mathbf{v}}_1 \quad (1-25)$$

es decir, la diferencia vectorial entre las dos velocidades medias de los dos puntos. Análogamente, el valor instantáneo de la velocidad relativa de  $P_2$  respecto a  $P_1$  es la diferencia vectorial entre las velocidades instantáneas

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \quad (1-26)$$

**EJEMPLO.** Un cuerpo  $B_1$  se mueve a lo largo de una recta que forma un ángulo de  $30^\circ$  con el eje  $x$  y otro cuerpo  $B_2$  se mueve a lo largo de una recta que forma un ángulo de  $45^\circ$  con el eje  $x$ . Ambos parten del origen del sistema de coordenadas en el instante  $t = 0$  y se mueven con celeridades constantes  $v_1 = 10$  m/s y  $v_2 = 20$  m/s. La velocidad relativa del cuerpo  $B_2$  respecto al  $B_1$  es, pues,

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \frac{d(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{dt}$$

cuyas componentes son

$$v_{rx} = 20 \cos 45^\circ - 10 \cos 30^\circ \simeq 5,4 \text{ m/s}$$

$$v_{ry} = 20 \sin 45^\circ - 10 \sin 30^\circ \simeq 9,1 \text{ m/s}$$

La magnitud de la velocidad relativa es, pues,

$$v_r = \sqrt{5,4^2 + 9,1^2} \simeq 10,6 \text{ m/s}$$

La distancia  $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$  entre  $B_1$  y  $B_2$  crece con el tiempo en la misma forma que  $v_r t$ .

Existe una diferencia sutil entre el caso anteriormente estudiado en el cual, como observadores en reposo, calculamos las velocidades relativas de dos cuerpos móviles, y el caso en que un observador se mueve con el cuerpo  $B_1$  desde el cual mide la velocidad relativa del cuerpo  $B_2$ . En el apartado 1-3 indicamos que los resultados de las medidas de longitud y tiempo realizadas por observadores que se hallen en movimiento relativo uno respecto a otro dependen apreciablemente de las celeridades relativas de los observadores cuando dichas celeridades se aproximan a la de la luz. En tales condiciones, no puede aplicarse la ley de adición de velocidades dada por la ecuación 1-26. Por ejemplo, si  $B_1$  y  $B_2$  se mueven a lo largo de una misma recta en el mismo sentido y si la velocidad de  $B_2$  medida desde  $B_1$  es  $v'_2 = c$  ( $c$  = velocidad de la luz), y la velocidad de  $B_1$  medida desde el suelo es  $v_1 = 0,5c$ , la ecuación 1-26 dice que la velocidad de  $B_2$  respecto al suelo vale  $v_2 = v_1 + v'_2 = 0,5c + c = 1,5c$ . Pero según el famoso experimento de MICHELSON-MORLEY y la teoría de EINSTEIN de la relatividad, la celeridad de la luz en el vacío es la misma para todos los sistemas de coordenadas (móviles o no) y en consecuencia, no podrá utilizarse la fórmula 1-26 para la

adición de velocidades que lleva en nuestro ejemplo al resultado  $1,5c$ . Dicha fórmula debe sustituirse por la relación relativista correcta: \*

$$v_2 = \frac{v_1 + v'_2}{1 + (v_1 v'_2 / c^2)} \quad (1-27)$$

Con  $v_1 = 0,5c$  y  $v'_2 = c$ , esta fórmula da la velocidad de  $B_2$

$$v_2 = \frac{v_1 + c}{1 + (v_1 c / c^2)} = c$$

que vuelve a ser la velocidad de la luz, la misma para el observador situado en el suelo que para el que se mueve con  $B_1$ . Esto es compatible con el postulado de la Relatividad. Obsérvese que la fórmula 1-27 se reduce a la relación familiar  $v_2 = v_1 + v'_2$  cuando las velocidades de los cuerpos son pequeñas frente a  $c$ .

*La aceleración es un vector.* La aceleración está relacionada con el vector velocidad de la misma manera que éste está relacionado con el vector de posición. Al igual que la velocidad media en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  es  $\Delta r / \Delta t = (r_2 - r_1) / (t_2 - t_1)$ , la aceleración media en el mismo intervalo es

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (1-28)$$

con las componentes

$$\bar{a}_x = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1}, \quad \bar{a}_y = \frac{v_{2y} - v_{1y}}{t_2 - t_1}$$

Análogamente, la aceleración instantánea es el vector de componentes  $dv_x/dt$  y  $dv_y/dt$ . Este vector se representa simbólicamente por

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (1-29)$$

**EJEMPLO.** Un cuerpo desliza sobre una superficie lisa de hielo con una celeridad de 5 m/s en una dirección que forma un ángulo de  $60^\circ$  con un eje  $x$ . Una racha retardadora de 0,5 s hace variar el movimiento del cuerpo de manera que se mueva a

---

\* Los aspectos matemáticos de la teoría de la Relatividad restringida no son difíciles. Un buen libro para su estudio es el de MAX BORN, *Einstein's Theory of Relativity*, Methuen, Londres, 1924.

una velocidad de 3 m/s según una semirrecta que forma un ángulo de  $150^\circ$  con el semieje positivo de las  $x$ . Determinar la aceleración media durante la racha. Tenemos:

$$\bar{a}_x = \frac{3 \cos 150^\circ - 5 \cos 60^\circ}{0,5} \simeq -\frac{5,1}{0,5} = -10,2 \text{ m/s}^2$$

$$\bar{a}_y = \frac{3 \sin 150^\circ - 5 \sin 60^\circ}{0,5} \simeq -\frac{2,8}{0,5} = -5,6 \text{ m/s}^2$$

La magnitud de la aceleración es, pues,

$$\bar{a} = \sqrt{\bar{a}_x^2 + \bar{a}_y^2} \simeq 11,6 \text{ m/s}^2$$

y la dirección vendrá dada por

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\bar{a}_y}{\bar{a}_x} = 0,55, \quad \theta \simeq 209^\circ$$

*Producto escalar de dos vectores.* Muchos de los estudios que realizaremos más adelante pueden expresarse en forma concisa mediante símbolos vectoriales y el álgebra vectorial. No obstante, al llegar a los cálculos numéricos, es corriente tenernos que referir a las componentes de los vectores y emplear las expresiones de la magnitud y dirección de un vector dadas por las ecuaciones 1-14 y 1-15. Para ilustrar esto, consideremos el conocido problema geométrico de determinar la longitud de un lado de un triángulo cuando se conocen las de los otros dos. Describamos los tres lados del triángulo por los vectores desplazamiento

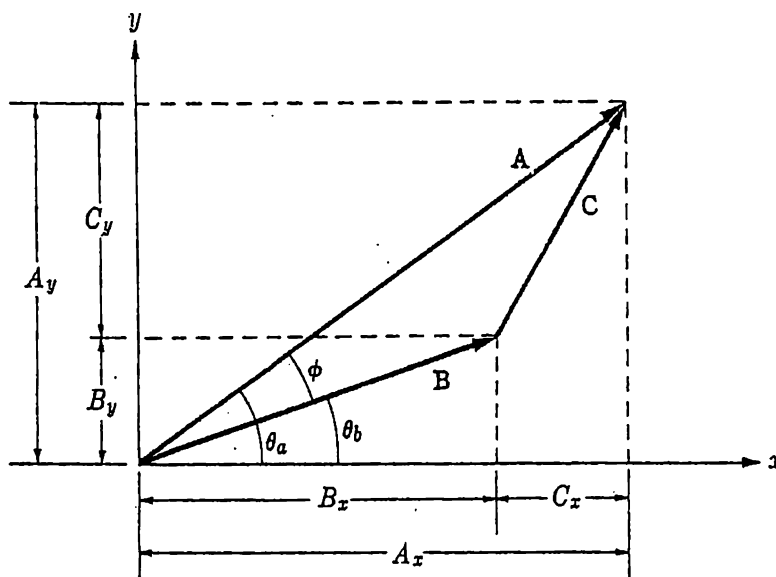


Figura 1-19



A, B y C, de los cuales se conocen A y B. Utilizando el simbolismo vectorial y el álgebra vectorial, de la figura 1-19 se deduce inmediatamente que el lado desconocido del triángulo puede expresarse en la forma

$$C = A - B \quad (1-30)$$

Para hallar el módulo de C, es decir, la longitud del tercer lado, tenemos que utilizar la expresión en función de las componentes

$$C^2 = (A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 = A^2 + B^2 - 2(A_x B_x + A_y B_y) \quad (1-31)$$

que es el conocido teorema del coseno de Geometría plana elemental, ya que la cantidad  $A_x B_x + A_y B_y$  puede expresarse en la forma

$$\begin{aligned} A_x B_x + A_y B_y &= (A \cos \theta_a)(B \cos \theta_b) + (A \sin \theta_a)(B \sin \theta_b) \\ &= AB \cos (\theta_a - \theta_b) = AB \cos \phi \end{aligned} \quad (1-32)$$

donde  $\phi$  es el ángulo que forman los vectores A y B. Como la cantidad  $AB \cos \phi = A_x B_x + A_y B_y$  aparece muy frecuentemente en multitud de problemas geométricos y físicos, es conveniente introducir una notación abreviada de ella en función de los vectores A y B. Dicha notación es  $A \cdot B$  con lo cual, por definición

$$A \cdot B = AB \cos \phi = A_x B_x + A_y B_y \quad (1-33)$$

y a  $A \cdot B$  se le da el nombre de producto escalar de los vectores A y B. El producto escalar de un vector por sí mismo es, evidentemente,  $C \cdot C = C^2$ , es decir, el cuadrado del módulo del vector. Empleando la notación del producto escalar, tenemos entonces

$$C^2 = (A - B) \cdot (A - B) = A^2 + B^2 - 2A \cdot B$$

que vuelve a ser el teorema del coseno, ya que  $A \cdot B$  es  $AB \cos \phi$ .

Cuando los vectores tienen componentes según tres direcciones del espacio, el producto escalar es

$$A \cdot B = AB \cos \phi = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1-34)$$

donde A y B vienen dados por

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad \text{y} \quad B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$$

## PROBLEMAS

1-1. (a) Representar gráficamente en función del tiempo, la posición de un cuerpo que se deja caer en el instante  $t = 0$  desde una plataforma situada a 100 m de altura. El punto  $y = 0$  se halla en la superficie terrestre. (b) ¿Cuál es la velocidad media en el intervalo de tiempo comprendido entre  $t = 1$  y  $t = 2$  s? ¿Y entre  $t = 1$  y  $t = 1,5$  s? ¿Y entre  $t = 1$  y  $t = 1,1$  s? ¿Y entre  $t = 1$  y  $t = 1,01$  s? (c) ¿Cuál es la velocidad instantánea en  $t = 1$  s?

1-2. Un cuerpo parte en el instante  $t = 0$  de  $\vec{x} = 0$  con una velocidad de 10 m/s. La aceleración es constante, dirigida hacia la izquierda y tiene un valor de 2 m/s<sup>2</sup>. (a) ¿Cuál es la velocidad en el instante  $t = 2$  s? (b) ¿Dónde está en ese instante el cuerpo? (c) ¿Cuándo vuelve el cuerpo a su punto de partida y cuál es entonces su velocidad?

1-3. Un cuerpo se mueve de manera que su celeridad viene dada por  $v = 3t^2$ , donde  $v$  se mide en cm/s y  $t$  en segundos. (a) Representar gráficamente  $v$  en función de  $t$ . (b) ¿Hasta dónde se alejará el cuerpo entre  $t = 1$  y  $t = 2$  s? (c) Compárese la velocidad media en el intervalo entre  $t = 1$  y  $t = 2$  s con la instantánea en  $t = 1$  s,  $t = 1,5$  s y  $t = 2$  s.

1-4. Una persona puede saltar una altura de 1 m partiendo del reposo. ¿Cuál es su velocidad al perder contacto con el suelo?

1-5. ¿Qué aceleración en pies/s<sup>2</sup> (cuatro cifras significativas) corresponde a 980,0 cm/s<sup>2</sup>? ¿Qué aceleración en m/s<sup>2</sup> (cuatro cifras significativas) corresponde a 32,00 pies/s<sup>2</sup>?

1-6. Si un cuerpo parte con velocidad  $v_0$  y tiene una aceleración uniforme  $a$ , ¿cuál es su velocidad tras haber recorrido una distancia  $s$ ? Exáminese la relación

obtenida para el caso  $s = 0$  y para valores negativos de  $s$ . El movimiento es rectilíneo.

1-7. Un hombre recorre 2 km hacia el Norte, 3 km hacia el Este, luego una distancia desconocida en una dirección desconocida (vector desplazamiento  $\vec{X}$ ) y se encuentra 10 km al sur del punto de partida. Hallar las componentes del vector  $\vec{X}$ , su magnitud, dirección y sentido.

1-8. Elíjase una escala adecuada y resuélvase gráficamente el problema anterior.

1-9. ¿Cuáles son las propiedades de dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  tales que: (a)  $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$  y  $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ ? (b)  $\vec{A} + \vec{B} = \vec{A} - \vec{B}$ ? (c)  $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$  y  $A^2 + B^2 = C^2$ ? (d)  $\vec{A} - \vec{B} = \vec{C}$  y  $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ ?

1-10. El vector  $\vec{A}$  tiene un módulo de 30 m y forma un ángulo de 30° con el semieje positivo de las  $x$ . El vector  $\vec{C}$ , resultante de  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  ( $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ ), forma un ángulo de 60° con el semieje positivo de las  $x$  y tiene un módulo de 20 m. Hallar el vector  $\vec{B}$ .

1-11. Una muchacha rema impulsando su piragua a 7,5 km/h de celeridad relativa al agua. Desea cruzar un canal de 1,5 km de anchura, por el cual fluye el agua a 4,5 km/h. (a) ¿En qué dirección debe remar para alcanzar la otra orilla lo antes posible? (b) En qué dirección debería remar si quisiera desembarcar en el punto situado directamente al otro lado del canal? ¿Qué longitud recorrería entonces?

1-12. Un automóvil y una motocicleta se mueven a 48 y 64 km/h respectivamente. Parten del mismo lugar y una hora más tarde están separados 80 km. (a) ¿En qué sentidos (relativos) se mueven? (b) Indicar en un diagrama vectorial la velocidad del automóvil, la de la moto-

cicleta, y la velocidad del automóvil relativa a la motocicleta.

1-13. ¿Cuál es el valor relativísticamente correcto de la velocidad de un muchacho respecto al suelo, si su velocidad relativa a un tren que avanza a 27 m/s es de 1,5 m/s en el sentido de avance del tren?

1-14. Convénzase de que, de acuerdo con la fórmula relativísticamente correcta 1-27, la velocidad del frente de un haz luminoso relativa al suelo es  $c$  aun cuando el foco luminoso lleve una velocidad  $v$ .

1-15. Si una partícula atómica  $A$  se mueve hacia la derecha con una velocidad  $0,95 c$ , y otra partícula atómica  $B$

se mueve hacia la izquierda con velocidad  $0,90c$ , ¿cuál es la velocidad de  $A$  relativa a  $B$ ? ¿Cuál es la velocidad de  $B$  relativa a  $A$ ?

1-16. Empleando el producto escalar, hallar el ángulo que forman los vectores  $A$  y  $B$ , siendo  $A = 1$ ,  $A = 2$ ,  $A = 3$ ,  $B = 3$ ,  $B = -1$ ,  $B = 2$ , medidas todas en centímetros.

1-17. Considérense como vectores los segmentos  $AB$  y  $AC$  del paralelepípedo de la figura 1-20. Los segmentos  $AB$  y  $AC$  están trazados desde  $A$  a los centroides de las dos caras del paralelepípedo. Las longitudes de las aristas son 1, 2 y 3 m. Determinar el ángulo que forman  $AB$  y  $AC$ .

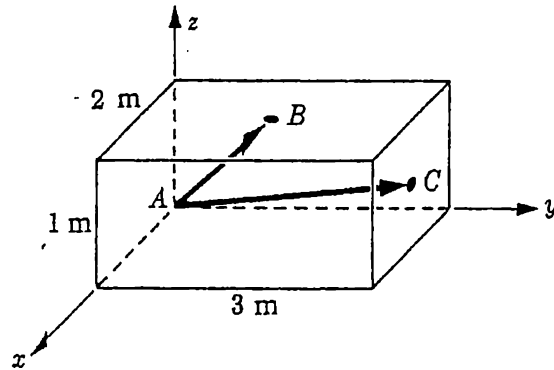


Figura 1-20

## CAPÍTULO 2

### MASA INERTE

*Resumen.* Este capítulo se inicia con un estudio cualitativo de la inercia, la propiedad inherente a la materia que es responsable de la resistencia de ésta a variar su estado de movimiento. Se presentan varios experimentos que ilustran los efectos inerciales y uno de ellos, un experimento de choque, se elige como *definición operativa de la masa inerte*. Luego sigue la *conservación* de la masa deducida a partir de experimentos. Se introduce el concepto de peso y se presenta evidencia experimental acerca de la proporcionalidad entre masa y peso. Por último, se estudian la unidad de masa y un repaso del dominio de órdenes de magnitud de las masas que se encuentran en la Naturaleza.

Entre otras materias, hemos estudiado en el primer capítulo los conceptos de longitud y tiempo. La longitud y el tiempo, junto con la masa, que es el tema de este capítulo, son las tres cantidades que constituyen el corazón de la Mecánica. Así como la medida de longitudes y tiempos forma parte de nuestra experiencia cotidiana, la medida de la masa inerte es algo más delicada.

Cualitativamente, el significado ordinario de la palabra *inercia* lleva consigo la esencia del concepto de masa (inerte). Recordemos el debate de GALILEO defendiendo que el estado de movimiento natural o no influido de un cuerpo es aquél en el que el cuerpo se mueve con velocidad constante. La masa inerte es una medida de la perseverancia con que un cuerpo conserva este estado de velocidad constante. A menudo decimos que una persona tiene mucha inercia si le es difícil cambiar sus normas. Correspondientemente, decimos que un cuerpo tiene mucha inercia cuando hemos de hacer algo relativamente violento para alterar su estado de movimiento. Es evidente, pues, que la masa inerte de un cuerpo influirá en su movimiento o en sus cambios de movimiento, al interactuar con otros cuerpos. Por tanto, importa que tengamos una definición precisa de la masa inerte, así como medios para su medida, cuando iniciemos un análisis cuantitativo de las interacciones y del movimiento. Gran parte de este capítulo se dedica a este fin.

**2-1 Experimentos exploratorios.** Consideremos dos pelotas del tamaño de las de tenis, una de madera y la otra de plomo, que se muevan a lo largo del mismo camino con la misma celeridad. Aun cuando las velocidades de las dos pelo-

tas puedan ser exactamente iguales, nos damos perfecta cuenta de que sus movimientos tienen propiedades diferentes si intentamos detenerlas. Aun cuando podemos captar la pelota de madera con relativa facilidad, la de plomo «nos haría dar vueltas». Decimos que la pelota de plomo tiene más inercia que la de madera o, en otras palabras, un mayor deseo de permanecer en su estado de movimiento inicial. Análogamente, cuando intentamos poner en movimiento las dos pelotas partiendo del reposo, volvemos a encontrar que la de plomo ofrece mayor resistencia a alterar su estado de movimiento.

Consideremos ahora un choque entre dos bolas. Si hacemos rodar dos bolas de madera exactamente iguales una contra otra, con celeridades iguales a lo largo de una misma recta, tras el choque las bolas se separarán con celeridades iguales. En cambio, si repetimos este experimento con una bola de madera y otra de plomo, hallaremos que la bola de plomo altera muy poco su velocidad. La propiedad de la bola de plomo de tender a permanecer en movimiento es, evidentemente, mayor que la de la otra bola.

Podemos pasar a realizar otros experimentos con las dos bolas. Imaginemos un experimento en el cual se tire de las bolas, una después de otra, sobre una mesa lisa, con «fuerzas» iguales durante un cierto tiempo, soltando después las bolas. Para asegurar la constancia de la «fuerza» podríamos tirar de la bola mediante un resorte alargado que mantuviera constante su longitud durante la tracción. Al final de la tracción, veremos que la bola de madera ha adquirido una velocidad mucho mayor que la de plomo. Está claro que la bola de plomo vuelve a resistirse más a la variación de velocidad que la bola de madera. La inercia de la bola de plomo es mayor.

En la figura 2-1 se presenta un experimento aún más ilustrativo del concepto de inercia. En él se pone de manifiesto un efecto análogo al que experimenta

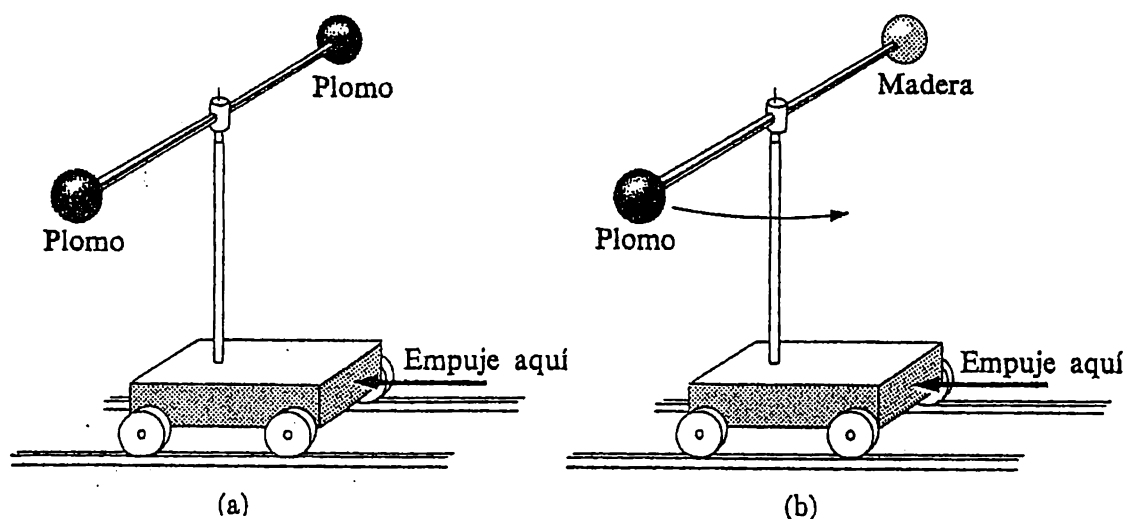


Fig. 2-1. Demostración de inercia.

un pasajero cuando se acelera o desacelera un coche. A los extremos de una varilla se fijan dos bolas, pudiendo girar el conjunto en torno a un eje vertical. Este sistema se monta sobre un carrito en la forma que se indica. Supongamos que empezamos con dos bolas de plomo exactamente iguales. Al empujar el carrito hacia adelante, partiendo del reposo, hallamos que la varilla se mantiene en su posición original, es decir, perpendicular a la dirección del movimiento. A continuación, sustituyamos una de las bolas de plomo por otra de madera de igual tamaño. En este caso, al empujar el carro partiendo del reposo, hallamos que la varilla gira, la bola de plomo se mueve hacia atrás y la de madera hacia adelante. Esto vuelve a indicar que la inercia de la bola de plomo es mayor que la de la bola de madera. Análogamente, si el carrito se halla inicialmente en movimiento a velocidad constante, con la varilla apuntando a una dirección fija, cuando detengamos el carrito la bola de plomo se moverá hacia adelante.

**2-2 Medida de la masa inerte.** Para poder medir la inercia, tendremos que seleccionar un experimento que sirva de definición operativa. La cantidad medida de tal manera recibe el nombre de *masa inerte*, o simplemente *masa* del cuerpo. Cualquiera que sea la elección realizada, tendremos que seleccionar alguna cantidad mensurable en el experimento y definir en función de ella la masa inerte. Se concibe, claro está, que no sean compatibles maneras diferentes de definir la masa. En estas condiciones, elegiremos como definición aquella en función de la cual resulte más sencilla la definición del movimiento. Tomaremos el *experimento de choque*, antes descrito, como base para la definición operativa de masa inerte.

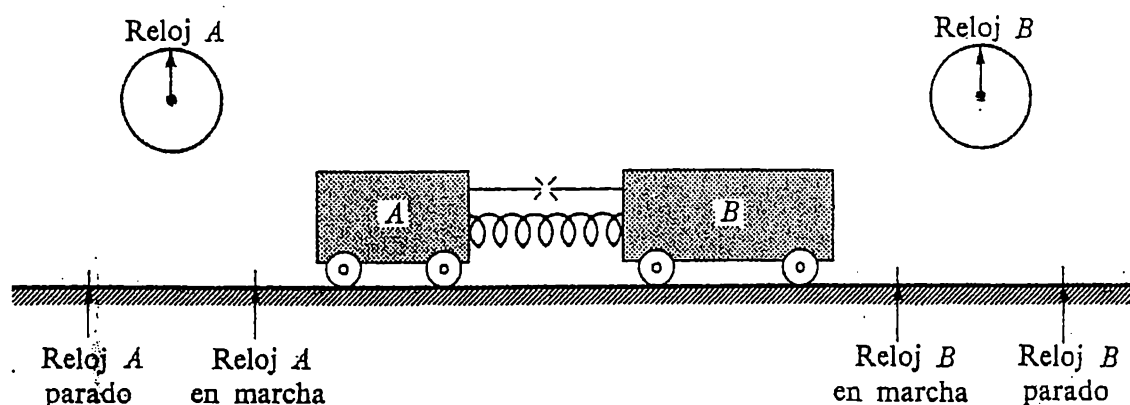


Fig. 2-2. Dispositivo de medida empleado en la definición operativa de la masa inerte. El hilo que une los dos carritos A y B mantiene comprimido el resorte. Al soltar éste (quemando el hilo), los dos carritos se separan más. Tomando el cuerpo A como referencia, podemos medir la masa inerte de B en función del cociente de las velocidades de A y B. Tenemos  $m_b = -m_a(v_a/v_b)$ .

En la figura 2-2 pueden verse dos carritos  $A$  y  $B$  sobre una pista horizontal. Inicialmente están en reposo y unidos por un hilo. Entre los carritos existe un resorte comprimido y cuando se quema el hilo, los carritos salen en sentidos opuestos bajo la acción del resorte. (A este tipo de fenómeno se le llama, frecuentemente, choque explosivo.)

Si, tras la explosión, las celeridades de los carritos  $A$  y  $B$  resultan ser  $|v_a|$  y  $|v_b|$ , respectivamente, definiremos el cociente entre sus masas inertes en la forma  $m_b/m_a = |v_a|/|v_b|$ , donde  $m$  es el símbolo representativo de la *masa inerte*. O bien, si describimos el resultado en función de las *velocidades* y no de las celeridades, la razón de las masas inertes de  $B$  y  $A$  está definida por

$$\frac{m_b}{m_a} = -\frac{v_a}{v_b} \quad (2-1)$$

donde el signo menos se debe a los sentidos opuestos de los movimientos de  $A$  y  $B$ . Si, tras la explosión, la celeridad de  $B$  es igual que la de  $A$ , las masas inertes de  $B$  y  $A$  son iguales, por definición.

Supongamos ahora que mediante experimentos del tipo que acabamos de describir hayamos encontrado que dos carritos  $B$  y  $C$  tienen, cada uno de ellos, una masa inerte igual a la de  $A$ ; es decir,  $m_b = m_c = m_a$ . (Los carritos  $A$ ,  $B$  y  $C$  no tienen por qué tener formas o composiciones iguales.) Combinemos ahora  $B$  y  $C$  formando una sola unidad y midamos la masa inerte combinada de  $B + C$  relativa a  $A$ . En el choque explosivo correspondiente tendremos los cuerpos  $B$  y  $C$  cada uno con una masa inerte  $m_a$  en un lado, y la masa única  $m_a$  de  $A$  en el otro. El resultado del experimento es que  $B + C$  adquiere una celeridad que es la mitad de la de  $A$  y esto significa que la masa inerte combinada de  $B + C$  es  $2m_a$ . Análogamente, si medimos la masa inerte de un conjunto de  $n$  cuerpos, cada uno de masa inerte  $m_a$ , encontramos que la masa inerte combinada del sistema es  $n \cdot m_a$ . En otras palabras, la masa inerte total de un sistema de cuerpos es la *suma de las masas inertes* de los distintos cuerpos del sistema.

La definición anterior de masa no sería satisfactoria si el cociente entre las masas de dos cuerpos  $B$  y  $C$ , medido en experimentos de choque con referencia a un cuerpo  $A$ , resultara depender de la elección del cuerpo de referencia. No obstante, la experiencia indica que no existe tal dependencia. Además, si  $B$  y  $C$  tienen masas iguales, es decir, si  $m_b = m_c$ , determinado por comparación con  $A$ , se encuentra que  $|v_b| = |v_c|$  en un experimento de choque explosivo realizado con  $B$  y  $C$ .

*Conservación de la masa.* Una de las propiedades más importantes de la masa es su conservación. Ahora que disponemos de un método experimental para comparar masas, podemos estudiar experimentos que nos lleven a hacer verdaderamente convincente la ley de conservación de la masa.

Supongamos que se ha hallado que dos bolas de acero iguales tienen masas iguales. Conservemos una de ellas como patrón de comparación y partamos la otra en pedazos, o pulvericémosla. Si se toman todos los pedazos o todo el polvo, puede verse experimentalmente que la masa no ha variado. El separar una bola de acero u otro cuerpo cualquiera en varias partes, no varía la masa.

¿Qué ocurre en las reacciones químicas? ¿Qué le ocurre a la masa de un objeto cuando sus átomos entran en combinaciones químicas? Debemos ir con cuidado, en estos casos. Si se oxida el plomo calentándolo en el aire se forma litargirio (monóxido de plomo,  $\text{PbO}$ ). No hallaremos nada acerca de la conservación de la masa si reunimos el polvo de litargirio y volvemos a medir su masa, ya que el oxígeno se ha combinado con el plomo. En vez de esto, si quisiéramos realizar este experimento, deberemos colocar el oxígeno y el plomo en un recipiente cerrado, calentar el recipiente y comparar las masas de antes y después del calentamiento. Estamos, pues, estudiando el efecto de una combinación química sobre la masa y encontraremos que la masa no varía.

Son posibles otros experimentos análogos en los cuales varía la temperatura, o cambian de estado los cuerpos evaporándose o fundiéndose. El resultado es siempre el mismo: la masa se conserva.

El concepto de conservación de la masa debe restringirse de una manera importante. No hemos estudiado aún la energía, pero basta hacer notar que un cuerpo aumenta su contenido energético al calentarse, y análogamente, puede tener energía en virtud de su movimiento o de su posición. Existe energía incluso en una onda luminosa o en una onda de radio. Según la teoría de la Relatividad restringida, la masa y la energía son equivalentes. Asociadas a una masa  $m$  existe una cantidad de energía  $E = mc^2$ , donde  $c$  es la velocidad de la luz, y asociada a una energía  $E$  existe una cantidad de masa  $m = E/c^2$ . Esto significa, por ejemplo, que cuando un átomo de carbono se combina con una molécula de oxígeno para formar anhídrido carbónico, podemos esperar que la masa de la molécula de anhídrido carbónico sea algo menor que la suma de las masas del átomo de carbono y de la molécula de oxígeno. Ello se debe a que en la reacción química se ha desprendido algo de calor (energía) y asociada a esta energía está una masa. En realidad, la masa asociada a la energía de reacciones químicas es del orden de sólo una parte en  $10^{10}$  de la masa de los elementos que se combinan y no se ha medido nunca. En la fusión nuclear, en cambio, esta fracción no es de una parte en  $10^{10}$ , sino casi de una parte en  $10^3$  y se mide fácilmente.

En la teoría de la Relatividad restringida se ve que al aumentar un cuerpo su celeridad, aumenta su masa; y así, la masa de un cuerpo que se mueve con una celeridad  $v$  es

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (2-2)$$



donde  $m_0$  es la masa cuando el cuerpo está en reposo y  $c$  es la celeridad de la luz. Esto significa que, por ejemplo, la masa de un recipiente que contiene gas aumenta al calentar dicho gas, ya que cuando se calienta éste, sus moléculas se mueven más rápidamente. Desde el punto de vista de la conservación de la masa debemos observar que, asociada al calor (energía) utilizado para incrementar la celeridad de las moléculas del gas está una masa, y ésta más la masa inicial del gas da una suma que permanece constante.

En resumen, pues, la conservación de la masa es un principio de conservación estrictamente correcto tan sólo si se incluye la masa asociada a la energía.

*Peso.* Existe (evidentemente) una estrecha relación entre la masa inerte de un cuerpo, por ejemplo la masa medida en un experimento de choque explosivo, y el peso (atracción por parte de la Tierra) medido con un resorte calibrado o con una balanza. La distinción entre masa y peso queda bastante bien definida mediante la «balanza» de la figura 2-1(b). En el experimento descrito en esta figura, la desigualdad de masas inertes de las bolas hacía girar la varilla al poner en movimiento el carrito sobre el que se montaba la balanza. En cambio, si quitamos del carrito la varilla con las bolas y mantenemos horizontal y fijo el eje de rotación, la varilla girará a causa de la diferencia de peso de las bolas.

Medidas de precisión (Eötvös, 1909) han demostrado que la masa inerte de un cuerpo es proporcional a su peso y que la constante de proporcionalidad, con la precisión de una parte en  $10^8$ , es la misma para todos los cuerpos independientemente de su composición química. Veremos con mayor detalle más adelante que la razón del peso a la masa de un cuerpo es la aceleración en caída libre del cuerpo. El hecho de que todos los cuerpos caen en el vacío con la misma aceleración, independientemente de su composición o forma, es uno de los resultados experimentales que ponen de manifiesto la proporcionalidad entre peso y masa. Análogamente, veremos que el período de un péndulo simple depende de la razón del peso a la masa de la lenteja del péndulo. El hecho de que el período del péndulo resulte ser el mismo, independientemente de la masa o composición de la lenteja, vuelve a poner de manifiesto la proporcionalidad entre peso y masa. Como consecuencia de esta proporcionalidad, no necesitamos recurrir siempre a experimentos de choque para comparar o determinar masas inertes. Basta una determinación de los pesos de dos cuerpos mediante balanzas de platillos o dinamómetros calibrados.

El peso de un cuerpo varía con su posición: su masa no. En el espacio, fuera del alcance de cualquier atracción gravitatoria sensible, el peso de un cuerpo sería prácticamente nulo y no sería posible una comparación de masas inertes mediante los pesos. En cambio, los experimentos de choque pueden realizarse, al menos en principio, en un lugar cualquiera. Un péndulo es un tipo de oscilador. Una masa unida al extremo de un resorte es otro tipo, y ahora el período de oscilación depende de la masa y de ciertas propiedades del resorte, pero no

del peso de la masa. Como consecuencia, un reloj de péndulo marcharía lentamente en la Luna, donde todos los cuerpos pesan menos, mientras que un reloj de áncora marcaría correctamente el tiempo.

La variación del peso de un cuerpo con la variación de situación sobre la superficie terrestre es relativamente pequeña. A una altura dada, por ejemplo, al nivel del mar, el peso de un cuerpo es máximo en los polos y mínimo en el ecuador; esta variación es de un  $1/2\%$ . A una latitud dada, el peso disminuye con la altitud y, por ejemplo, esta variación es de un  $1/3\%$  al pasar del nivel del mar a la cumbre del Everest.

Las medidas de la variación de la gravedad con la situación sobre la superficie terrestre se pueden realizar comparando los períodos de péndulos colocados en posiciones diferentes. Las medidas de este tipo pueden realizarse con gran precisión, por ejemplo, contando el número de períodos entre dos o más «coincidencias» de los péndulos. En 1898 se registraron medidas con péndulos en las cuales se determinaba la variación de peso correspondiente a una diferencia de alturas de sólo dos metros.

**2-3 Unidad de masa.** Si se elige un cuerpo patrón como unidad de masa inerte, está claro que las masas inertes de otros cuerpos se podrán determinar con el método indicado en el apartado anterior. La unidad de masa en el sistema métrico decimal es el *kilogramo*. El patrón internacional de un kilogramo es un cilindro de platino que se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas en Sèvres, Francia. Un gramo es la milésima parte de un kilogramo y es, muy aproximadamente, la masa de un centímetro cúbico de agua. En el sistema gravitatorio inglés de unidades de medida, la unidad de masa es el *slug*. Un slug tiene un peso aproximado de 32 libras y una masa de 14,6 kg. En este sistema no hay patrón de masa; más bien se basa en un peso (o fuerza) patrón de una libra.

*Medida y dominio de la masa.* Las medidas de masas, como las de tiempos y longitudes, se han extendido para cubrir un dominio muy amplio. Una comparación de pesos equivale, según hemos visto, a una comparación de masas, y este es, quizá, el tipo de medida de masas que nos es más familiar. Las básculas con la indicación «Peso exacto, sin resortes» son dispositivos para la comparación de pesos y se emplean en formas modificadas adecuadamente para cosas tan pesadas como locomotoras (peso de unas 200 toneladas) y tan ligeras como un milímetro de un pelo humano (masa aproximada  $10^{-7}$  g). Las masas inferiores a  $10^{-7}$  ó  $10^{-8}$  g se determinan con ayuda de diversos medios indirectos. Quizá el método más común consiste en contar el número de fragmentos iguales que componen un fragmento suficientemente grande para poderlo pesar por medios convencionales. Por ejemplo, dos gramos de gas hidrógeno constituyen un mol y, por tanto, contienen unas  $6 \cdot 10^{23}$  moléculas. Luego, una molécula de hidró-

geno tendrá una masa de  $3 \cdot 10^{-24}$  g. La comparación de masas atómicas y subatómicas se ha convertido casi en un procedimiento rutinario de laboratorio en los últimos años. En el capítulo siguiente se verán algunos fundamentos de esos tipos de comparación. De todos los cuerpos conocidos, el electrón es el que tiene menor masa, la cual es de  $0,91 \cdot 10^{-27}$  g.

Por supuesto, nadie intenta pesar, literalmente, cosas como montañas u océanos, si bien sus masas se conocen con bastante precisión. Un procedimiento es utilizar el sentido común para medir el volumen y multiplicarlo por la masa media por unidad de volumen o densidad media, estimada. Esas masas estimadas son particularmente precisas en el caso del agua porque la densidad del agua varía muy poco. En cambio, rocas y tierra tienen densidades muy variables y se ha de obtener un valor medio a partir de un gran número de muestras tomadas a diferentes profundidades y en distintos lugares. También pueden utilizarse, para estimar la masa de cuerpos próximos grandes, tales como montañas o depósitos minerales, métodos de péndulo análogos a los estudiados en relación con la variación del peso.

La determinación de las masas de los cuerpos celestes plantea un problema totalmente diferente. Aun cuando pudiera hallarse el volumen, la densidad suele presentar una gran incertidumbre. Las masas de los cuerpos celestes se miden, por tanto, estudiando su movimiento y el movimiento de los cuerpos asociados. Por ejemplo, la masa de la Tierra se puede determinar a partir de un estudio del movimiento de la Luna y resulta ser de  $6 \cdot 10^{24}$  kg. La masa del Sol revelada por el movimiento de los planetas es unas 330 000 veces mayor que la de la Tierra. Algunas estrellas tienen masas centenares de veces mayores que la del Sol, y nuestra galaxia (la Vía Láctea) tiene una masa de unos  $10^{11}$  soles.

## PROBLEMAS

2-1. En uno de los dos carritos de masas desconocidas pero iguales se coloca una masa de 1 kg. Los carritos, inicialmente en reposo, interactúan explosivamente uno con otro y alcanzan velocidades de 2 y -3 m/s, respectivamente. (a) ¿Cuáles son las masas de los carritos? (b) Se repite el experimento, colocando en lugar de la masa de 1 kg un objeto de masa desconocida. Las velocidades observadas son 1,8 y -4 m/s. ¿Cuál es la masa del objeto?

2-2. En el procedimiento operativo de la medida de la masa inerte descrito en

el texto, se requerían una regla graduada y un reloj. Inténtese idear una modificación de este procedimiento en la cual no sea necesario el reloj y sólo se precisara la regla graduada como instrumento de medida.

2-3. Proponer una definición operativa de la masa inerte basada en el experimento descrito en la figura 2-1. Describir cómo se podría construir una escala de masas basada en nuestra definición. Análogamente, proponer una definición de masa basada en el experimento descrito en el texto en el cual los cuerpos están sometidos a tracción durante tiempos

iguales por un resorte estirado un cierto valor constante.

2-4. En sus *Principia*, Libro III, Proposición 6, NEWTON describía un experimento en el cual utilizaba dos péndulos. Cada uno estaba constituido por una caja de madera suspendida de una cuerda de 3,35 m. Llenaba de madera una de las cajas, y en el centro de la otra colocaba un pedazo de oro de tamaño tal que igualara los pesos de los dos péndulos. Se ponían en oscilación los dos péndulos y se encontraba que uno seguía al otro en sincronismo durante largo tiempo. Repitió el experimento, comparando ahora el

péndulo lleno de madera con otros péndulos que contenían sustancias tales como plata, plomo, vidrio, arena, sal común, agua y trigo. ¿Con qué fin cree Ud. que realizaba NEWTON estos experimentos, y qué conclusión pudo sacar de ellos?

2-5. Se mencionó en el texto que un péndulo tendría mayor período en la Luna que en la Tierra y en consecuencia, un reloj de péndulo «atrasaría» en la Luna. ¿Ocurriría lo mismo con un reloj de pulsera? Explíquese.

2-6. ¿Cree Ud. que un diapasón vibraría con la misma frecuencia en la Tierra que en la Luna? Explíquese.

## CANTIDAD DE MOVIMIENTO Y FUERZA — I

*Resumen.* Concepto de cantidad de movimiento. Los experimentos de choques unidimensionales conducen al importante principio de conservación de la cantidad de movimiento de un sistema aislado de partículas en interacción. Choques perfectamente inelásticos y perfectamente elásticos. La conservación de la cantidad de movimiento se interpreta en función del movimiento del centro de masa. El estudio de la cesión de cantidad de movimiento *durante* un choque conduce al concepto de fuerza (segunda ley de Newton) y se deduce experimentalmente que la fuerza ejercida sobre un cuerpo *B* por un cuerpo *A* es igual y opuesta a la fuerza ejercida sobre *A* por *B* (tercera ley de Newton). Se estudian las propiedades de la fuerza gravitatoria y de la fuerza elástica (o de muelle) y experimentos en que intervienen estas fuerzas conducen a la importante propiedad de las fuerzas conocida por el nombre de principio de superposición. Se estudia el significado de «sistema» de partículas y de fuerzas «interiores» y «exteriores» y se trata el movimiento del centro de masa en función de las fuerzas exteriores. Por último, se estudian la cesión de cantidad de movimiento por un chorro de partículas y la fuerza correspondiente y se ilustran con el caso del movimiento de los cohetes.

Podemos ya emprender en serio el estudio de las interacciones y del movimiento. Al igual que en cualquier otro estudio, una parte importante de él consiste en formular y preguntar las cuestiones «correctas». El tema que queremos abordar es muy amplio y hay muchas preguntas que podemos formular acerca de muchos tipos de movimiento. Al seleccionar el primer experimento de movimiento, evitaremos los tipos complicados y muy especializados tales como la caída irregular de un pedazo de papel por el aire, o las olas creadas por una lancha rápida, ya que estos tipos de movimiento dependen de muchos factores o parámetros y son difíciles de analizar. En su lugar, los primeros estudios se referirán a tipos de movimiento más sencillos y claros, en función de los cuales pueden comprenderse otros más complicados. La caída libre de un cuerpo en el vacío, el movimiento de un cuerpo del que tira un resorte y que está situado sobre una superficie lisa y el movimiento planetario, pueden considerarse como ejemplos de tales movimientos. Si aceptamos la idea general de que el movimiento de un

cuerpo sólo varía a causa de la interacción con otro u otros cuerpos, el experimento más sencillo sería un choque de dos cuerpos. Los experimentos de este tipo son relativamente fáciles de realizar y de analizar, por lo que se seleccionarán como punto de partida.

Desde luego, el estudio completo del movimiento llevaría consigo experimentos y el análisis de los diferentes tipos de interacción. Un programa tan extenso nos llevaría a través de la mayor parte de la Física y resultaría demasiado amplio para tratarlo aquí. Limitaremos, pues, nuestros experimentos de introducción acerca de choques a casos sencillos en los que intervengan interacciones de contacto y elásticas y, con menor extensión, interacciones magnéticas. A partir de estos experimentos mostraremos cómo surge uno de los principios fundamentales de la Física: el de la *conservación de la cantidad de movimiento*.

**3-1 Experimentos de choque exploratorios.** ¿Cómo podemos proyectar un experimento en el que intervenga la interacción de sólo *dos* cuerpos? No es tan fácil como pudiera parecer a primera vista. Por una parte, el movimiento de un cuerpo a través del aire se halla siempre afectado por los choques con las  $10^{19}$  partículas por centímetro cúbico de que está compuesto el aire. Además, el movimiento de un cuerpo sobre la superficie terrestre está afectado por sus interacciones con la Tierra: la atracción gravitatoria y las interacciones de contacto.

El efecto sobre el movimiento de la atracción gravitatoria puede eliminarse si nos arreglamos para que los dos cuerpos considerados se muevan sobre una pista o plano horizontal. Aun cuando permanezca el efecto del «rozamiento» con la pista, siempre podrá hacerse suficientemente pequeño (según se verá más adelante con mayor detalle) para que al abandonar el cuerpo sobre el plano o pista se mueva sobre ella con velocidad casi constante durante un tiempo considerable. El estado de movimiento del cuerpo será variado solamente por interacciones con otros cuerpos que se muevan sobre la pista. Será, pues, posible obtener una aproximación razonablemente buena de la *interacción de dos cuerpos* ideal, como indicaremos más adelante.

*Dispositivo experimental.* En la figura 3-1 puede verse el dispositivo experimental con que empezaremos. El aparato está constituido por dos carritos que pueden moverse libremente sobre una pista de cuatro metros de longitud. Las ruedas de los carritos tienen cojinetes y cuando se mueve un carrito a lo largo de la pista horizontal, su velocidad permanece prácticamente constante. Se determina la velocidad midiendo el tiempo que transcurre mientras el carrito recorre una distancia fija. Las medidas de tiempo se realizan con relojes que se ponen en marcha y detienen mediante interruptores eléctricos montados a lo largo de la pista y que son accionados por los carritos al pasar. En el estudio de un choque entre dos carritos sobre la pista, suele ser necesario hacer cuatro me-

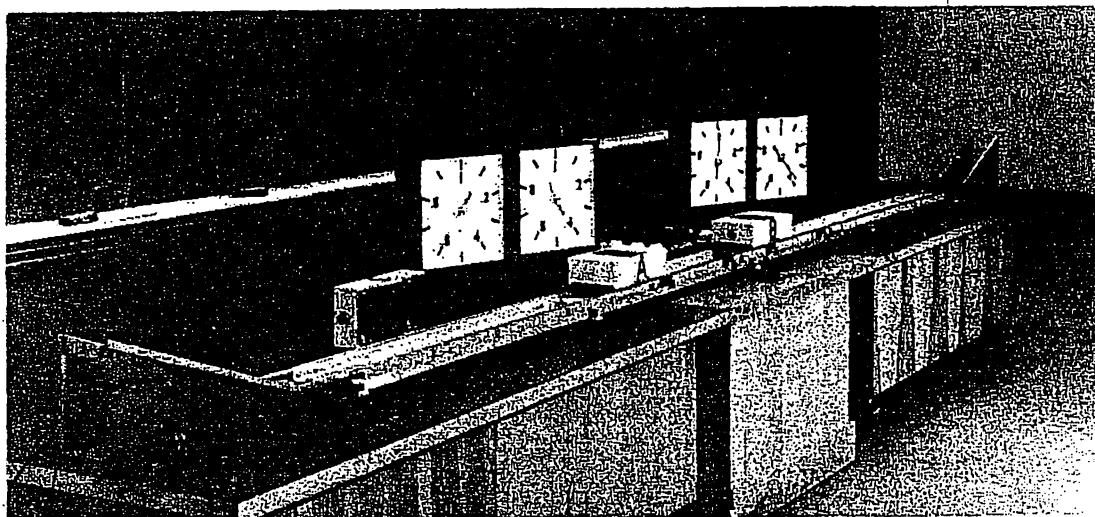


Fig. 3-1. Dispositivo para experimentos de choque unidimensional. Los relojes se ponen en marcha y detienen eléctricamente, mediante interruptores disparados por los carritos.

didas de velocidad, lo que exige la presencia de cuatro relojes y cuatro pares de interruptores.

*Choques.* Empezamos con dos carritos que pueden moverse libremente sobre la pista; nuestra misión es estudiar cómo el movimiento de uno afecta al del otro. Los carritos no se perturbarán entre sí a menos que entren en contacto directo. Sin embargo, con imanes montados adecuadamente, los carritos se influirán mutuamente aunque no estén en contacto real. En uno y otro caso, cuando los carritos estén muy separados se moverán con velocidad constante, pero cuando entren en el dominio de interacción o de las «fuerzas» (y a consecuencia de ello cambien sus velocidades) experimentarán lo que llamamos un *choque*, tanto si los cuerpos están en contacto como si no.

En primer lugar, consideraremos las velocidades de los dos cuerpos en interacción *antes* y *después* del choque. Más adelante estudiaremos qué ocurre *durante* el (a menudo muy corto) tiempo de choque. Variando las condiciones experimentales, es decir, los tamaños y masas de los carritos, la naturaleza de las superficies de contacto entre los carritos, el material de que están hechos, las velocidades iniciales, etc., estudiaremos qué son las variables importantes y cómo depende de esas variables el «éxito» del choque.

Los experimentos de choque exploratorios indican que la relación entre las velocidades final e inicial de los cuerpos parece depender del tamaño y material de los cuerpos y de la naturaleza de las superficies de contacto entre ellos. Para intentar poner orden en esas observaciones, variaremos un parámetro cada vez, empezando con las condiciones iniciales más sencillas posible. Desde el principio resulta evidente que la *masa inerte* de los cuerpos, estudiada en el capítulo anterior,

jugará un papel importante en los choques, ya que es esta propiedad la que expresa la resistencia de los cuerpos a cambiar sus estados de movimiento.

**3-2 Cantidad de movimiento.** En el Capítulo 2 utilizamos una interacción «explosiva» como definición operativa de la masa inerte. Con esta definición de masa, tenemos para la interacción explosiva

$$m_a v_a = -m_b v_b$$

donde el signo menos significa que  $v_a$  y  $v_b$  tienen la misma dirección pero sentidos contrarios y los subíndices identifican a los cuerpos. El producto  $mv$  resulta ser una cantidad importante a la que se da el nombre de *cantidad de movimiento* y su símbolo es  $p$ . Un cuerpo de pequeña masa, pero animado de una velocidad grande, puede tener la misma cantidad de movimiento que otro más masivo pero que lleve menor velocidad. La cantidad de movimiento, al igual que la velocidad, se toma positiva cuando se mueve el cuerpo en el sentido positivo del eje de las  $x$ ; y negativa cuando se mueve en sentido contrario.

La expresión anterior puede escribirse en la forma

$$m_a v_a + m_b v_b = 0, \text{ o bien } p_a + p_b = 0$$

Es decir, como la cantidad de movimiento total era nula antes de que los carritos se separaran (la velocidad y por ende la cantidad de movimiento de los dos carritos eran nulas), podemos decir que la cantidad de movimiento no ha variado o que se ha *conservado* (se ha mantenido nula) a consecuencia de la explosión.

En este primer ejemplo, la conservación de la cantidad de movimiento se deduce de las definiciones de masa y cantidad de movimiento. Pasaremos ahora a estudiar experimentos de choque con condiciones iniciales más generales con el fin de estudiar ulteriormente los intercambios de cantidad de movimiento y la posible conservación de la cantidad de movimiento total de cuerpos en interacción.

**3-3 Conservación de la cantidad de movimiento.** Como en nuestro primer experimento, continuaremos haciendo que los carritos interactúen por medio de un resorte unido a uno de ellos. En la figura 3-2 puede verse el dispositivo experimental (véase también fig. 3-1). Se variarán tanto las condiciones iniciales como las masas de los cuerpos que choquen y se medirán las velocidades antes y después de los choques. En todos los casos será despreciable la masa del resorte.

Empezaremos con dos carritos de igual masa. Si el cuerpo  $A$  choca con el cuerpo  $B$ , que se halla inicialmente en reposo, hallamos que el choque lleva  $A$  al estado de reposo y que  $B$  adquiere la velocidad que tenía  $A$  antes del choque; es decir, hallamos que  $v'_b = v_a$ . (De ahora en adelante, las cantidades sin acento



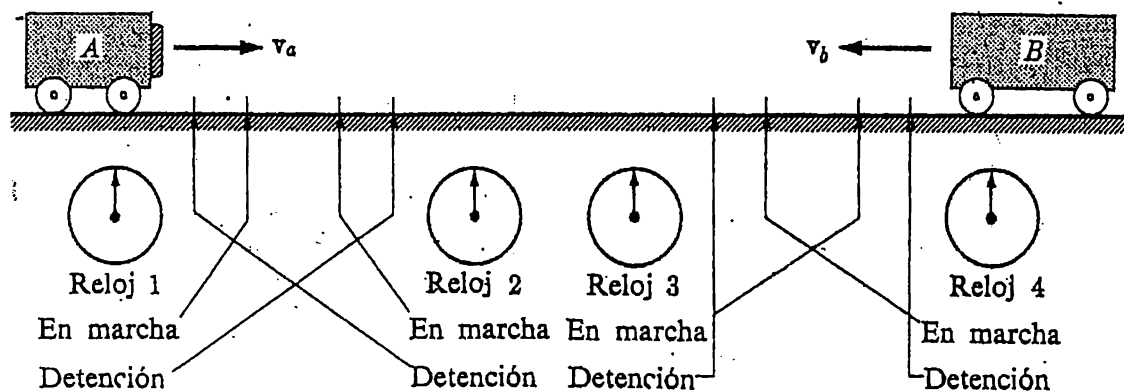


Fig. 3-2. Aparato para el estudio del choque de los carritos  $A$  y  $B$ . Los relojes 1 y 3 miden el tiempo que emplean  $A$  y  $B$  en recorrer una distancia fija antes de chocar, y así se obtienen  $v_a$  y  $v_b$ . Los relojes 2 y 4 miden el tiempo que emplean los carritos en recorrer una distancia fija después del choque, y así pueden obtenerse  $v'_a$  y  $v'_b$ . Un sistema de relés eléctricos impide que se ponga en marcha el reloj 2 hasta que el carrito  $A$  haya pasado sobre el interruptor de detención del reloj 1. Independientemente de la forma de interacción y de la masa de los carritos, se encuentra que siempre  $m_a v_a + m_b v_b = m_a v'_a + m_b v'_b$  (Véase también fig. 3-1).

se referirán a condiciones antes del choque y las cantidades con acento se referirán a las condiciones después del choque).

Supongamos ahora que tomamos carritos de masas desiguales, pero continuamos utilizando el resorte intercalado entre los dos cuerpos y que continúe estando  $B$  inicialmente en reposo. Cualitativamente, hacemos las siguientes observaciones. Cuando  $A$  tiene más masa que  $B$ , los dos cuerpos  $A$  y  $B$  tienen movimiento hacia adelante después del choque. Cuando  $A$  tiene menor masa que  $B$ , el cuerpo  $A$  invierte el sentido de su movimiento y  $B$  se mueve hacia adelante después del choque. No es cierto, en absoluto, que la velocidad perdida por  $A$  se transmita a  $B$ . Pero en nuestras observaciones persistirá una regularidad. Independientemente de cómo sean las masas de  $A$  y  $B$ , la *cantidad de movimiento* perdida por  $A$  a consecuencia del choque, pasa a  $B$ . En otras palabras, la cantidad de movimiento total, la del carrito  $A$  más la del  $B$ , es la misma antes que después del choque

$$m_a v_a = m_a v'_a + m_b v'_b$$

Como último experimento de choque con nuestros carritos amortiguados por resorte, dejemos que ambos tengan velocidad inicial. Los resultados experimentales contienen ahora cuatro velocidades, y se hace difícil adivinar los resultados de los diversos experimentos posibles en los que intervienen masas y velocidades diferentes. Sin embargo, en nuestros resultados persiste de nuevo una regu-

laridad y ello no es sino una extensión natural de lo anteriormente hallado. La cantidad de movimiento total antes y después del choque es la misma:

$$m_a v_a + m_b v_b = m_a v'_a + m_b v'_b, \text{ o bien } p_a + p_b = p'_a + p'_b \quad (3-1)$$

Es decir, la variación de cantidad de movimiento del cuerpo *A* es igual y opuesta a la variación de cantidad de movimiento del cuerpo *B*. En estos choques, un cuerpo puede ceder cantidad de movimiento a otro, pero la cantidad de movimiento total permanece constante.

En la tabla 3-1 puede verse un ejemplo de datos experimentales obtenidos en un choque, del tipo de resorte, entre dos carritos exactamente iguales que se mueven uno hacia otro sobre la pista con celeridades diferentes. Los interruptores eléctricos de la pista están separados 50 cm. Las agujas de los relojes (véase fig. 3-1) completan una revolución cada segundo y pueden leerse con una precisión del 3 % cuando el tiempo es igual o mayor que medio segundo.

Vemos que este resultado es compatible con el principio de conservación de la cantidad de movimiento dentro de la precisión del experimento.

A continuación estudiaremos la conservación de la cantidad de movimiento para interacciones que no sean del tipo de resorte. Si colocamos en un extremo de uno de los carritos un pedazo de masilla, tras el choque permanecerán unidos. He aquí un tipo de interacción totalmente diferente. En la tabla 3-2 pueden verse los resultados de dicho experimento. Obsérvese que puesto que los carritos permanecen juntos tras el choque, tenemos  $v'_a = v'_b$ . Aun cuando los detalles del movimiento en este choque sean totalmente diferentes de los del choque tipo

TABLA 3-1. CHOQUE ENTRE DOS CARRITOS *A* Y *B* DE MASAS IGUALES ( $m_a = m_b = 6,6 \text{ kg}$ ).  
DISTANCIA ENTRE INTERRUPTORES: 0,50 m.

	Tiempo $\Delta t$ , s	Velocidad $v$ , m/s	Cantidad de movimiento $p$ , kg·m/s
Antes del choque			
Carrito <i>A</i>	$\Delta t_a = 0,82$	$v_a = 0,61$	$p_a = m_a \cdot 0,61$
Carrito <i>B</i>	$\Delta t_b = 0,54$	$v_b = -0,93$	$p_b = -m_a \cdot 0,93$
Después del choque			
Carrito <i>A</i>	$\Delta t'_a = 0,57$	$v'_a = -0,88$	$p'_a = -m_a \cdot 0,88$
Carrito <i>B</i>	$\Delta t'_b = 0,88$	$v'_b = 0,57$	$p'_b = m_a \cdot 0,57$
Cantidad de movimiento total antes del choque: $p = p_a + p_b = -0,32m_a$			
Cantidad de movimiento total después del choque: $p' = p'_a + p'_b = -0,31m_a$			

TABLA 3-2. CHOQUE ENTRE DOS CARRITOS *A* Y *B* CON  $m_a = 2m_b = 2m$ .  
DISTANCIA ENTRE INTERRUPTORES: 50 cm.

	Tiempo $\Delta t$ , <i>s</i>	Velocidad <i>v</i> , <i>m/s</i>	Cantidad de movimiento <i>p</i> , <i>kg·m/s</i>
Antes del choque			
Carrito <i>A</i>	0,60	$v_a = 0,83$	$p_a = 2m \cdot 0,83$
Carrito <i>B</i>	—	$v_b = 0$	$p_b = 0$
Después del choque			
Carrito <i>A</i>	0,91	$v'_a = v'_b = 0,55$	$p'_a = 2m \cdot 0,55$
Carrito <i>B</i>			$p'_b = m \cdot 0,55$
Cantidad de movimiento total antes del choque: $p = p_a + p_b = 1,6(6)m$			
Cantidad de movimiento total después del choque: $p' = p'_a + p'_b = 3m \cdot 0,55 = 1,6(5)m$			

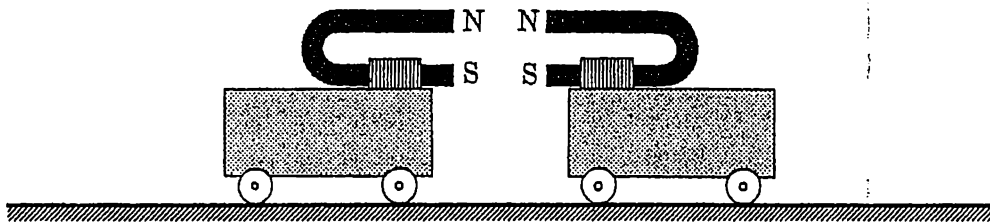


Fig. 3-3. Experimento de choque con interacción magnética.

resorte, encontramos de nuevo que dentro de los errores experimentales, la cantidad de movimiento total de los cuerpos es la misma antes y después del choque.

Los experimentos con el resorte y con la masilla han ofrecido ejemplos de interacciones de contacto. Unos imanes montados adecuadamente permitirían la interacción de los carritos sin que entraran verdaderamente en contacto (fig. 3-3). También en este caso, los experimentos detallados muestran resultados que están de acuerdo con el principio de conservación de la cantidad de movimiento.

Podríamos seguir ensayando todos los tipos de interacción imaginables, pero ya hemos ensayado una muestra reducida aunque variada y consideraremos ya establecido el principio de conservación de la cantidad de movimiento. La evidencia más fuerte que lo respalda es, desde luego, que ha resultado útil en casos muy diferentes encontrados en el estudio del movimiento en el desarrollo de la Ciencia y lo consideraremos como uno de los principios fundamentales de la Física.

**EJEMPLO.** A un carrito que puede rodar libremente sobre una pista horizontal, se fija un rifle. La masa total del rifle y el carrito es  $m_1 = 10$  kg. Se dispara horizontalmente hacia la derecha una bala de masa  $m_2 = 0,005$  kg y se observa que recorre en  $\tau = 0,2$  s una distancia  $l_2 = 50$  m a partir del punto de disparo. Durante ese tiempo, ¿qué distancia y en qué sentido habrá recorrido el carrito (con el rifle unido a él)?

El sistema (carrito, rifle y bala) no tenía cantidad de movimiento antes de la explosión y lo mismo debe ocurrir después:

$$m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = 0$$

Si podemos hallar la velocidad del carrito  $v'_1$  también podremos hallar la distancia que recorrerá en el tiempo  $\tau$ .

$$v'_1 = -\frac{m_2}{m_1} v'_2$$

$$l_1 = v'_1 \tau = -\frac{m_2}{m_1} v'_2 \tau$$

La velocidad de la bala era  $v'_2 = l_2/\tau$ , y tenemos

$$l_1 = -\frac{m_2}{m_1} l_2 = -\frac{0,005}{10} \cdot 50 = -0,025 \text{ m} = -2,5 \text{ cm}$$

(El signo menos indica que el carrito se mueve hacia la izquierda).

**EJEMPLO.** Por el espacio exterior se mueve un cuerpo de masa  $M$  con velocidad  $V$ . Se quiere romper el cuerpo en dos partes tales que la masa de una sea la décima parte de la masa total. La separación explosiva debería ser tal que después de la explosión la parte más pesada quedara en reposo, mientras la más ligera continuara en la dirección inicial del movimiento. (Esto es análogo a la separación de un satélite artificial de su cohete). ¿Con qué velocidad continuará la parte pequeña?

Podemos considerar que estos cuerpos sólo se ejercen interacciones entre sí, pudiéndose despreciar la influencia de los demás cuerpos. Por tanto, se conservará la cantidad de movimiento. La cantidad de movimiento total antes de la explosión es  $MV$ . Después del choque debe tener el mismo valor ( $m_a = 0,9M$ ,  $m_b = 0,1M$ ).

	<i>Cantidad de movimiento antes</i>	<i>Cantidad de movimiento después</i>
Cuerpo A	$0,9MV$	0
Cuerpo B	$0,1MV$	$0,1M v'_b$
Cantidad de movimiento total	$p = MV$	$p' = 0,1M v'_b$

Por tanto, con  $p = p'$ ,

$$MV = 0,1M v'_b$$

$$v'_b = 10V$$

3-4 Choques perfectamente elásticos y totalmente inelásticos. Aun cuando la conservación de la cantidad de movimiento se aplica a todas las interacciones, debe quedar claro que las velocidades de los cuerpos después del choque suelen ser diferentes para interacciones diferentes, incluso siendo las mismas las velocidades iniciales. En los choques tipo resorte, observamos en la tabla 3-1 que la magnitud de la velocidad *relativa* de los dos cuerpos, es decir, la diferencia entre las velocidades de *A* y *B*, no es muy diferente antes y después del choque. Según la Tabla 3-1, estas velocidades relativas resultan ser  $v_a - v_b = 0,61 - (-0,93) = 1,54 \text{ m/s}$  y  $v'_a - v'_b = -0,88 - 0,57 = -1,45 \text{ m/s}$ . En el choque «tipo plástico» descrito en la tabla 3-2, observamos que la velocidad relativa de los cuerpos es *nula* después del choque.

A menudo se utiliza la variación de velocidad relativa entre los cuerpos en colisión, como medio burdo para clasificar las interacciones. Se acostumbra a llamar choque *perfectamente elástico* a aquél en que la velocidad relativa de los dos cuerpos después del choque es igual y de signo contrario a la existente antes de él:

$$v'_a - v'_b = -(v_a - v_b) \quad (\text{perfectamente elástico, una dimensión}) \quad (3-2)$$

Los demás choques reciben el nombre de inelásticos, y aquellos en que la velocidad relativa después del choque es nula reciben el nombre de *totalmente inelásticos*:

$$v'_a - v'_b = 0 \quad (\text{totalmente inelástico, una dimensión}) \quad (3-3)$$

En el experimento de tipo explosivo utilizado en la definición de masa inerte, estudiado en el apartado 2-2, la velocidad relativa antes de quemar el hilo que unía los carritos era nula, no siéndolo después. Con un poco de imaginación, podemos pensar en otros ejemplos de esta naturaleza, por ejemplo, interacciones o choques en que la magnitud de la velocidad relativa aumenta a consecuencia de la interacción o choque. Según todos sabemos, las interacciones de este tipo (a las que llamaremos interacciones de tipo explosivo) tienen todas una característica en común: asociado a la interacción existe algún cambio físico definido. Por ejemplo, en nuestro primer experimento el resorte cambiaba del estado de estar comprimido al de estar distendido. Un triquitraque situado entre los dos carritos y dispuesto de manera que explote en el instante del choque sería otro ejemplo de choque del tipo explosivo. Al explotar, el triquitraque sufre un cambio en su estado físico. En cambio, los choques perfectamente elásticos no llevan consigo cambios físicos de los cuerpos que chocan. En los choques amortiguados por muelle, que veíamos eran casi perfectamente elásticos, el muelle se hallaba en su estado natural indeformado tanto antes como después de la interacción.

Veremos que el hecho de que la magnitud de la velocidad relativa no acostumbre a aumentar en los choques, tiene un profundo significado. Si hubieran choques en los cuales creciera la magnitud de la velocidad relativa y en los que no se produjeran cambios físicos en los cuerpos que intervienen, se podrían construir las llamadas *máquinas de movimiento perpetuo*. Sugerimos que el lector especule acerca de la naturaleza de dichas máquinas. Por ejemplo, una bola situada entre dos paredes rígidas paralelas ganaría celeridad cada vez que chocara contra una pared si, en la interacción entre bola y paredes, la velocidad relativa aumentara siempre. Sin embargo, no se han encontrado interacciones de ese tipo. Estudiaremos más adelante la ausencia de dichas interacciones y de esta observación haremos una ley o «principio» de la Naturaleza. Hemos visto que la mayoría de los choques llevan consigo una disminución de las velocidades relativas de los cuerpos y en este caso, si profundizamos en los hechos, también puede hallarse siempre algún cambio en el estado físico de los cuerpos. Estos temas se estudian mucho mejor atendiendo a la *energía cinética*, concepto que introduciremos más adelante.

**EJEMPLO.** En un choque perfectamente elástico entre dos carritos situados sobre una pista, las velocidades de los cuerpos son  $v_a = 3$  m/s y  $v_b = -2$  m/s. Las masas de los cuerpos son  $m_a = 1$  kg y  $m_b = 2$  kg. ¿Cuáles son las velocidades de los cuerpos después del choque?

Sean  $v'_a$  y  $v'_b$  las velocidades de los cuerpos después del choque. La conservación de la cantidad de movimiento nos da

$$m_a v_a + m_b v_b = m_a v'_a + m_b v'_b$$

Como el choque es elástico,

$$v'_a - v'_b = -(v_a - v_b)$$

Eliminando  $v'_b$  entre estas ecuaciones, obtenemos para la velocidad  $v'_a$ :

$$v'_a = \frac{(m_a - m_b)v_a + 2m_b v_b}{m_a + m_b}$$

y análogamente, para  $v'_b$ :

$$v'_b = \frac{(m_b - m_a)v_b + 2m_a v_a}{m_a + m_b}$$

En este ejemplo particular obtenemos

$$v'_a = \frac{(1 - 2)3 + 2 \cdot 2(-2)}{1 + 2} = -\frac{11}{3} \text{ m/s,}$$

$$v'_b = \frac{(2 - 1)(-2) + 2 \cdot 1 \cdot 3}{1 + 2} = \frac{-2 + 6}{3} = \frac{4}{3} \text{ m/s}$$

**3-5 Centro de masa.** En este apartado no vamos a introducir nada nuevo en principio. Sólo indicaremos, introduciendo el concepto de *centro de masa* de los cuerpos en interacción, cómo puede interpretarse en forma sencilla, útil e interesante, el principio de conservación de la cantidad de movimiento.

Sean  $x_a$  y  $x_b$  las coordenadas de dos cuerpos en interacción, medidas a partir de un origen arbitrario de un *sistema fijo de coordenadas*. Por el momento, consideraremos como sistema fijo de coordenadas a un sistema solidario con la Tierra. Frecuentemente llamaremos a este sistema *sistema del laboratorio*. Todos nuestros resultados experimentales y las leyes del movimiento que sigan se referirán a este sistema de coordenadas fijo del «laboratorio». En un capítulo posterior estudiaremos la influencia del movimiento del sistema de coordenadas.

La situación del centro de masa de los dos cuerpos en el sistema de coordenadas fijo se define en la forma

$$X = \frac{m_a x_a + m_b x_b}{m_a + m_b} \quad (3-4)$$

Este punto divide a la distancia entre los cuerpos en dos partes  $d_a$  y  $d_b$ , indicadas en la figura 3-4, de tal manera que  $m_a d_a = m_b d_b$ . El lector debe convencerse por sí mismo de que este resultado se deduce directamente de la definición dada por la ecuación (3-4).

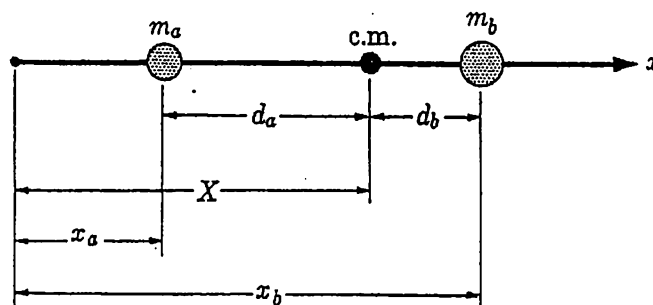


Fig. 3-4. Centro de masa.

Si son iguales las masas de los dos cuerpos, el centro de masa será el punto medio del segmento limitado por los dos cuerpos. Está claro que el centro de masa se mueve con los cuerpos y este movimiento tiene algunas propiedades sencillas muy útiles. Por esta razón introducimos y utilizamos este concepto.

Cuando en un tiempo  $\Delta t$ , se desplazan los dos cuerpos distancias respectivamente iguales a  $\Delta x_a$  y  $\Delta x_b$ , el desplazamiento correspondiente del centro de masa es  $\Delta X = (m_a \Delta x_a + m_b \Delta x_b) / (m_a + m_b)$ , y dividiendo por  $\Delta t$  obtenemos la velocidad del centro de masa:

$$V = \frac{m_a v_a + m_b v_b}{m_a + m_b} = \frac{p_a + p_b}{m_a + m_b} \quad (3-5)$$

Como  $p = m_a v_a + m_b v_b = p_a + p_b$  permanece constante según el principio de conservación de la cantidad de movimiento, se deduce que la *velocidad del centro de masa es la misma antes que después del choque*. Además, la cantidad de movimiento total del sistema puede expresarse como el producto de la masa total del sistema por la velocidad del centro de masa:

$$p = p_a + p_b = (m_a + m_b)V$$

Si la cantidad de movimiento total es nula, el centro de masa tendrá velocidad nula y, por tanto, permanecerá inmóvil.

**EJEMPLO.** Dos muchachos de masas 40 y 60 kg están de pie sobre una superficie de hielo exenta de rozamientos, asiendo una barra recta de longitud 12 m entre ellos. Partiendo de los extremos de la barra, los muchachos tiran de sí mismos a lo largo de la barra hasta llegar a encontrarse ¿Qué distancias habrán recorrido sobre el hielo uno y otro muchacho? Despréciase la masa de la barra.

El centro de masa se halla inicialmente en reposo, y como la interacción de los muchachos es sólo entre ellos, el centro de masa permanecerá en reposo. Por tanto, los muchachos deberán encontrarse en el centro de masa. La distancia del muchacho A de 40 kg al centro de masa, es

$$X = \frac{m_b x_b}{m_a + m_b} = \frac{60}{40 + 60} \cdot 12 = 7,2 \text{ m}$$

Por tanto, A recorre 7,2 m y B 4,8 m.

*Interacción entre tres o más cuerpos.* La cantidad de movimiento total de tres o más cuerpos que sólo puedan interactuar entre sí se mantiene constante, al igual que la cantidad de movimiento total de dos cuerpos. En el caso más general, en el que se produce la interacción *simultánea* de tres o más cuerpos, debemos recurrir a la experimentación para poner de manifiesto que se conserva la cantidad de movimiento. No vamos a insistir en los detalles de este tipo de experimento, pero podemos ver lo razonable que resulta el principio de conservación de la cantidad de movimiento en este caso de tres (o más) cuerpos mediante el siguiente experimento imaginario.

Imaginemos tres cuerpos A, B y C cuyas cantidades de movimiento son  $p_a$ ,  $p_b$  y  $p_c$ . La cantidad de movimiento total inicial es, pues,  $p_a + p_b + p_c$ . Hagamos chocar ahora A y B y poco después B y C. La cantidad de movimiento combinada de A y B, es decir,  $p_a + p_b$ , no varía cuando chocan A y B, ni tampoco la cantidad de movimiento  $p_c$  de C, ya que éste no participa en el choque. Por tanto, la cantidad de movimiento total  $p_a + p_b + p_c$  no variará a causa del choque entre A y B. El mismo razonamiento puede también poner de manifiesto que la cantidad de movimiento total no variará a consecuencia del choque entre dos miembros cualesquiera de un grupo aún mayor. Este razonamiento



no demuestra que se conserve la cantidad de movimiento cuando se produce la interacción simultánea de tres o más cuerpos, pero la experiencia corrobora nuestra idea. Tenemos

$$p_a + p_b + p_c + \dots = p'_a + p'_b + p'_c + \dots \quad (3-6)$$

El centro de masa de un grupo de muchos cuerpos (o muchas partículas) se define en la forma:

$$X = \frac{m_a x_a + m_b x_b + m_c x_c + \dots}{m_a + m_b + m_c + \dots} \quad (3-7)$$

y la velocidad correspondiente del centro de masa es

$$V = \frac{m_a v_a + m_b v_b + m_c v_c + \dots}{m_a + m_b + m_c + \dots} \quad (3-8)$$

Si las interacciones de los distintos cuerpos sólo pueden realizarse entre ellos, su cantidad de movimiento se mantendrá constante y de la ecuación 3-8 se deduce que la velocidad de su centro de masa permanece constante.

Todos los objetos tienen un punto que es su centro de masa. La materia está compuesta de átomos y para hallar el centro de masa de un objeto, podemos imaginar una aplicación directa (pero muy engorrosa) de la expresión (3-7) en la que se representarán los átomos por  $A, B, C, \dots$ , para hallar  $X$ . En el caso de muchos cuerpos, (cubos, esferas, capas esféricas, barras rectas uniformes, etc.) su simetría permite localizar el centro de masa por simple inspección. Obsérvese que el centro de masa no precisa hallarse realmente dentro del material de un cuerpo; por ejemplo, el centro de masa de una herradura es un punto matemático en el espacio.

**3-6 Conservación de la cantidad de movimiento durante un choque.** El principio de conservación de la cantidad de movimiento obtenido de los experimentos que hemos estudiado, se refiere a las condiciones antes y después del choque. Aun cuando es razonable admitir que la conservación de la cantidad de movimiento es también aplicable *durante* un choque, resulta difícil en la mayoría de los casos el estudio del movimiento de los cuerpos en colisión durante los tiempos, relativamente cortos, de duración del choque. No obstante, podemos proyectar un experimento en el cual el tiempo de interacción es relativamente largo, con lo que se hacen posibles las medidas de la velocidad. En la figura 3-5 puede verse dicho experimento. Se separan dos discos unidos por una gomita, se sueltan y se fotografían con iluminación estroboscópica a medida que se mueven uno hacia otro. Si se conserva la cantidad de movimiento durante la interacción, el centro de masa de los cuerpos se moverá con celeridad constante,

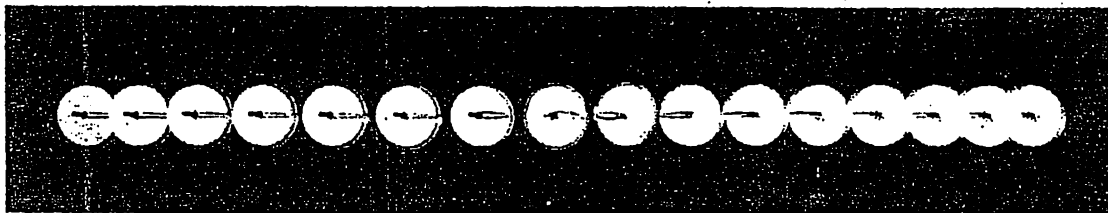


Fig. 3-5. Movimiento en un plano de dos discos suspendidos conectados por un resorte.

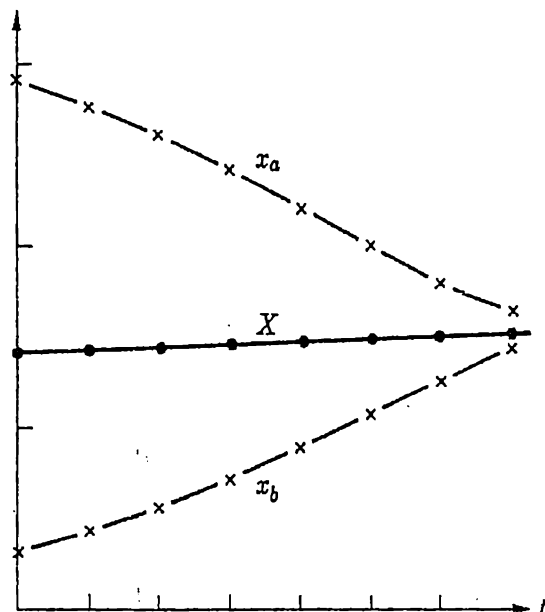


Fig. 3-6. El centro de masa de los dos cuerpos en interacción de la figura 3 - 5 se mueve con celeridad constante (masas de los discos,  $m_a = 1,5 \text{ kg}$  y  $m_b = 2 \text{ kg}$ ). La cantidad de movimiento se conserva durante la interacción.

ya que su cantidad de movimiento total puede expresarse como producto de su masa total por la velocidad del centro de masa. En la figura 3-6 pueden verse las coordenadas  $x$  de los dos discos, representadas gráficamente en función de los tiempos transcurridos. También puede verse la situación del centro de masa y como la gráfica de  $x$  en función de  $t$  es una recta, sacamos la conclusión de que la velocidad del centro de masa es constante. Por tanto, también será constante la cantidad de movimiento total y en este caso sacamos la conclusión de que es válida la conservación de la cantidad de movimiento incluso durante las interacciones. Admitiremos que esto es siempre cierto.

**3-7 Fuerza.** En nuestro estudio de las interacciones vistas hasta ahora, nos hemos ocupado principalmente de la cantidad de movimiento total de un sistema de cuerpos en interacción. Sin embargo, en muchos casos con los que hemos

de tratar en la práctica, nos puede interesar el movimiento de uno solo de los cuerpos del sistema. En el caso de una piedra que caiga en el vacío hacia la Tierra, por ejemplo, se tiene una interacción entre la piedra y la Tierra, y de acuerdo con el principio de conservación de la cantidad de movimiento, la ganancia de cantidad de movimiento por parte de la piedra viene contrarrestada por una ganancia igual y opuesta de cantidad de movimiento por parte de la Tierra. Su centro de masa permanece en reposo. Pero lo que nos interesa es poder observar solamente el movimiento de la piedra y en esto no nos ayuda gran cosa el principio de conservación de la cantidad de movimiento.

Además, la conservación de la cantidad de movimiento total no diferencia un tipo de interacción o choque de otro, y si queremos introducir una medida de la «intensidad» de la interacción, deberemos considerar la variación de cantidad de movimiento de *uno* de los cuerpos en interacción. Desde luego, nos damos cuenta de que la variación *total* de cantidad de movimiento de un cuerpo puede ser la misma en interacciones diferentes. Por ejemplo, un cuerpo que se haga rebotar sobre un resorte blando y largo, puede sufrir la misma variación de cantidad de movimiento que si lo hiciera sobre un resorte corto y duro. En otras palabras, se puede dar a un cuerpo la misma velocidad o cantidad de movimiento final mediante un empuje intenso y corto o mediante un empuje débil y prolongado. Por tanto, si se quieren distinguir entre sí las interacciones con arreglo a los intercambios de cantidad de movimiento, no será suficiente especificar las cesiones totales de cantidad de movimiento. Deberemos introducir y utilizar una cantidad que se refiera a las velocidades de cesión de cantidad de movimiento.

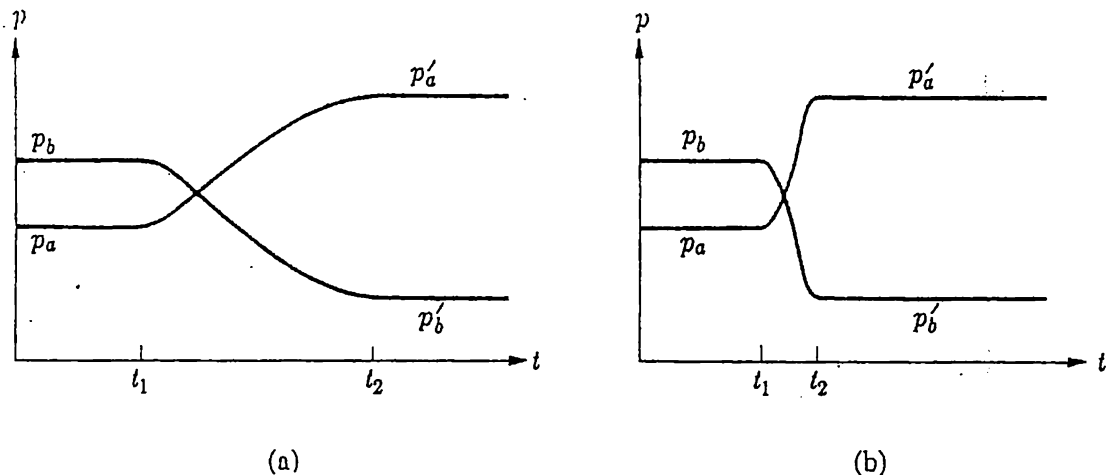


Fig. 3-7. Diagrama de las cantidades de movimiento de un choque entre dos cuerpos  $A$  y  $B$ . El choque se inicia en  $t = t_1$  y finaliza en  $t = t_2$ . Durante el choque,  $A$  aumenta su celeridad y  $B$  la disminuye. En (a) las variaciones de cantidad de movimiento tienen lugar lentamente y la interacción es débil. En (b) las variaciones de cantidad de movimiento tienen lugar más rápidamente y la interacción es más fuerte.

Refirámonos ahora a uno de los experimentos de choque anteriores y estudiémoslo más detalladamente. Consideremos el caso en que  $A$  y  $B$  se mueven en el sentido positivo del eje  $x$ , con  $v_b > v_a$ . A consecuencia del choque,  $A$  aumenta su celeridad y  $B$  la disminuye, como se ilustra gráficamente en la figura 3-7. Durante el choque, la cantidad de movimiento de  $A$  aumenta en  $\Delta p_a = p'_a - p_a$ . Evidentemente, los detalles de esta variación de la cantidad de movimiento durante el choque serán diferentes para interacciones diferentes. Un resorte largo y blando hará que la cantidad de movimiento varíe lentamente durante un tiempo largo, mientras que un resorte duro y corto originaría la misma variación de cantidad de movimiento en un tiempo mucho menor. Como medida de la «intensidad» de la interacción utilizaremos la variación de cantidad de movimiento del cuerpo en unidad de tiempo, a la que daremos el nombre de *fuerza ejercida* sobre el cuerpo.

Aun cuando no se conozcan los detalles de la curva que da la cantidad de movimiento en función del tiempo, puede determinarse una variación media en unidad de tiempo de la cantidad de movimiento. Si el choque empieza en el instante  $t_1$  y finaliza en el instante  $t_2$ , la variación media en unidad de tiempo de la cantidad de movimiento es  $(p'_a - p_a)/(t_2 - t_1) = \Delta p_a/\Delta t$ . La *fuerza media* (promedio en el tiempo) que se ejerce sobre  $A$  (representada por  $\bar{F}_a$ ) en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  es, pues, por definición:

$$\bar{F}_a = \frac{\Delta p_a}{\Delta t} = \frac{p'_a - p_a}{t_2 - t_1} \quad (3-9)$$

Como la conservación de la cantidad de movimiento exige que  $\Delta p_a = -\Delta p_b$ , se deduce que las fuerzas ejercidas sobre  $A$  y  $B$ ,  $\bar{F}_a = \Delta p_a/\Delta t$  y  $\bar{F}_b = \Delta p_b/\Delta t$ , respectivamente, son de igual magnitud pero de signos contrarios, es decir,

$$\bar{F}_a = \frac{\Delta p_a}{\Delta t} = -\frac{\Delta p_b}{\Delta t} = -\bar{F}_b \quad (3-10)$$

*Unidades de fuerza.* La unidad de fuerza es una unidad de variación de cantidad de movimiento en unidad de tiempo. Si elegimos como unidades de longitud, masa y tiempo, el metro, el kilogramo y el segundo, respectivamente, la unidad de cantidad de movimiento será el  $\text{kg} \cdot \text{m/s}$  y la unidad de fuerza correspondiente sería el  $\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$ . A esta unidad se le llama *newton*,  $N$ , y al sistema de unidades basado en el metro, kilogramo y segundo se le da el nombre de *sistema Giorgi*.

En el *sistema cgs* las unidades de longitud, masa y tiempo son el centímetro ( $10^{-2}\text{m}$ ), el gramo ( $10^{-3}\text{kg}$ ) y el segundo. La unidad de fuerza correspondiente,  $\text{g} \cdot \text{cm/s}^2$  recibe el nombre de *dyna* ( $10^{-5}\text{N}$ ).

Existe también el *sistema terrestre*, que toma como unidades fundamentales

las de longitud, fuerza y tiempo. La de longitud es el metro, la de fuerza el *kilopond* (9,8 N) y la de tiempo el segundo.

**EJEMPLO.** Se lanza una pelota de baseball a una velocidad de 2,5 m/s, siguiendo una trayectoria horizontal hacia el bateador. Éste batea la pelota que vuelve por el mismo camino que llevaba antes, estando ahora animada de una velocidad de 5,0 m/s. La pelota pesa 140 g. ¿Cuál es la fuerza media ejercida sobre el bate, si el tiempo de contacto entre él y la pelota es 0,01 s?

Las magnitudes de las cantidades de movimiento antes y después del choque son

$$|p_1| = 0,140 \cdot 2,5 = 0,35 \text{ kg}\cdot\text{m/s} = 0,35 \text{ N}\cdot\text{s}$$

y

$$|p_2| = 0,140 \cdot 5,0 = 0,70 \text{ kg}\cdot\text{m/s} = 0,70 \text{ N}\cdot\text{s}$$

La magnitud de la cantidad de movimiento cedida es, pues, de 1,05 N·s y la fuerza media es

$$|\bar{F}| = \left| \frac{\Delta p}{\Delta t} \right| = \frac{1,05}{0,01} = 105 \text{ N}$$

**Fuerza instantánea.** Hasta ahora sólo hemos considerado la fuerza media que se ejerce sobre un cuerpo durante un intervalo de tiempo finito  $\Delta t$ . Para describir la interacción más detalladamente, introduciremos la *fuerza instantánea*. En el capítulo 1 estudiamos el significado de la velocidad instantánea  $v$ , y suponemos que el lector ya se ha familiarizado con este concepto. Supongamos ahora que determinamos la cantidad de movimiento instantánea  $p_a = mv_a$  de un cuerpo  $A$  durante un choque y la representamos gráficamente en función del tiempo, como se indica en la figura 3-8. En este ejemplo, el choque comienza en  $t = 0,2$  s y finaliza en  $t = 0,5$  s. La variación total de cantidad de movimiento es  $40 - 10 = 30 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$  y la fuerza media es, pues,  $\bar{F}_a = 30/0,3 = 100 \text{ N}$ . La *fuerza instantánea* o velocidad instantánea de variación de la cantidad de movimiento en un instante  $t$ , está definida por la «pendiente» de la tangente geométrica a la curva representativa de la cantidad de movimiento  $p = p(t)$  en el instante  $t$ . (Si las unidades de cantidad de movimiento y tiempo no se representan por longitudes iguales sobre las escalas  $p$  y  $t$  deberemos, desde luego, considerar los factores de escala correspondientes para determinar la fuerza a partir de la pendiente de la tangente). La pendiente máxima de la curva de la figura 3-8 y la fuerza máxima son  $60/0,3 = 200 \text{ N}$ . Midiendo la pendiente de la gráfica de la cantidad de movimiento en función del tiempo, obtenemos una curva para la fuerza, según se indica en la figura.

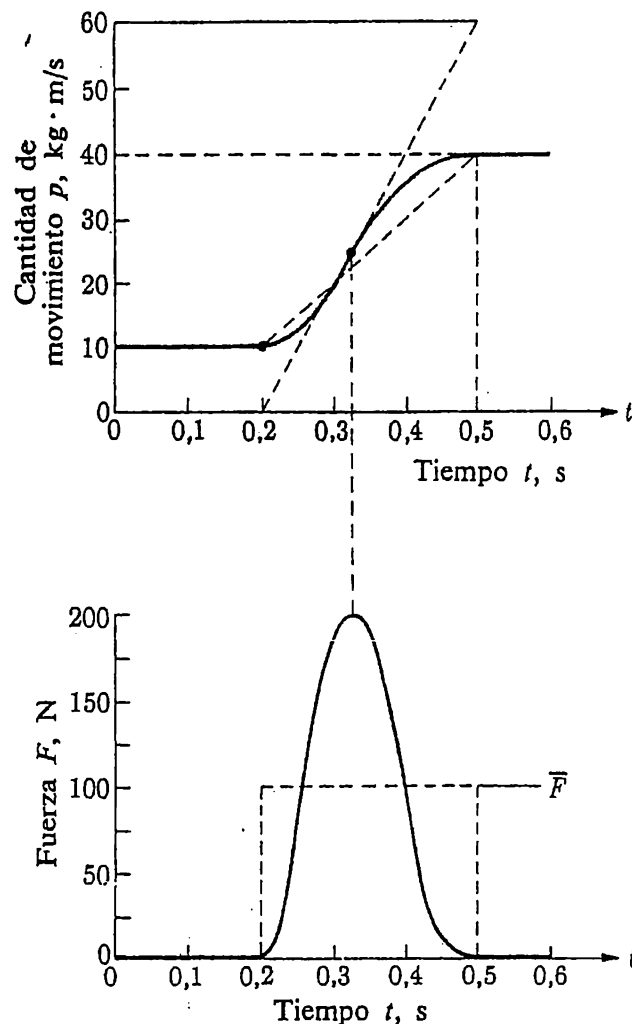


Fig. 3-8. Ejemplo de la dependencia del tiempo de la cantidad de movimiento y de la fuerza, en un choque. La fuerza está determinada por la pendiente de la curva representativa de la cantidad de movimiento.

La interpretación geométrica y la definición de la fuerza dada anteriormente son equivalentes a la definición analítica que dice que la fuerza es la *derivada respecto al tiempo* de la cantidad de movimiento. Así pues, matemáticamente, la fuerza instantánea que se ejerce sobre un cuerpo  $A$  será

$$F_a = \frac{dp_a}{dt} = m_a \frac{dv_a}{dt} \quad (3-11)$$

donde, desde luego,  $dv_a/dt$  es la aceleración del cuerpo  $A$ .

No importa cuál de los dos cuerpos empleamos para calcular la cesión de cantidad de movimiento, ya que la cantidad ganada por un cuerpo es igual a la perdida por el otro. Por tanto, si representamos por  $dp_a/dt$ , a la variación en unidad de tiempo de la cantidad de movimiento del cuerpo  $A$ , la variación en unidad de

tiempo  $dp_b/dt$ , de la cantidad de movimiento del otro cuerpo  $B$  debe ser igual a ella salvo el signo, es decir,

$$\frac{dp_a}{dt} = -\frac{dp_b}{dt}$$

En consecuencia, en virtud de la conservación de la cantidad de movimiento, las fuerzas que se ejercen sobre los cuerpos  $A$  y  $B$  en interacción son siempre iguales en magnitud pero de signo contrario:

$$F_a = -F_b \quad (3-12)$$

Esta relación se conoce con el nombre de tercera ley de Newton. La segunda ley de Newton es la definición de la fuerza en función de la cantidad de movimiento, dada por la ecuación 3-11, y la primera ley expresa que un cuerpo aislado que no interactúa con ningún otro cuerpo, se mueve con velocidad constante.

Podríamos preguntarnos por qué no introducimos la variación de la cantidad de movimiento por unidad de espacio  $dp/dx$  en vez de  $dp/dt$ . En principio, también podríamos haber introducido esta variación de cantidad de movimiento, pero pronto habríamos visto que  $dp/dx$  no es una cantidad útil. En primer lugar, las variaciones unitarias  $dp/dx$  para  $A$  y para  $B$  no tendrían igual magnitud, ya que para una variación dada de cantidad de movimiento  $\Delta p_a = -\Delta p_b$ , los cuerpos no suelen desplazarse distancias iguales. Otra razón importante de que  $dp/dx$  sea menos adecuada para la descripción de interacciones está relacionada con el importantísimo principio de superposición de las fuerzas válido para la definición  $dp/dt$  pero no para la  $dp/dx$  de fuerza.

Para determinar una fuerza debemos conocer la cantidad de movimiento en función del tiempo, y solamente después de estudiar primero el movimiento de un cuerpo podremos hallar la fuerza que sobre él actúa. Históricamente, el resultado más famoso de un análisis de movimiento conducente a una ley para la fuerza es, quizá, la ley de NEWTON, de la Gravitación Universal, deducida del estudio del movimiento planetario (véase capítulo 10).

La experiencia acumulada y el conocimiento del movimiento en diversas condiciones hacen que en muchos casos, como ocurre en muchos problemas científicos y técnicos, *las fuerzas sean conocidas* y el problema consista en hallar el movimiento correspondiente a la fuerza dada. El conocimiento de la ley de la fuerza significa, desde luego, que conocemos las cantidades de las que depende la fuerza y también la naturaleza de esta dependencia. Las fuerzas gravitatorias y electrostáticas *dependen de la distancia que separa los cuerpos en interacción*. Las fuerzas electromagnéticas, nucleares y de contacto dependen, en general, de las velocidades relativas de los cuerpos así como de las distancias que los separan. Las diferencias fundamentales entre las fuerzas, junto a las dependen-

cias que acabamos de mencionar, son las propiedades inherentes a la materia responsable de la existencia de las fuerzas. La carga eléctrica determina la fuerza electrostática, la masa pesante determina la fuerza gravitatoria, y las corrientes eléctricas determinan la fuerza electromagnética.

**3-8 Fuerza gravitatoria.** La fuerza más aparente y que nos es más familiar es, tal vez, la fuerza gravitatoria local, la atracción hacia la Tierra que experimentan todos los cuerpos en la superficie terrestre. Según se indicó en el capítulo 1, los primeros estudios experimentales de caída libre establecieron la importante propiedad de este movimiento de que *todos* los cuerpos, independientemente de sus masas o velocidades iniciales, caían con la misma aceleración constante en el vacío,  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ . ¿Qué nos dice este resultado acerca de la propiedad de la fuerza gravitatoria? La fuerza viene dada por  $F = ma$ , donde  $a$  es la aceleración. El hecho de que la aceleración  $a = F/m$  permanezca constante ( $a = g$ ) cuando se varía  $m$  eligiendo cuerpos diferentes en el experimento de la caída libre, indica que la fuerza debe ser proporcional a la masa inerte  $m$ . En otras palabras, si tuviéramos que introducir una propiedad de la materia que consideráramos responsable de la atracción gravitatoria, esta propiedad aumentaría proporcionalmente a la masa inerte. En el capítulo 10 daremos un análisis detallado de la fuerza gravitatoria, y por el momento bastará resumir alguna de las propiedades fundamentales.

---

Para la descripción de las interacciones en general, precisamos saber (1) cómo depende la fuerza de interacción entre los cuerpos de cantidades tales como la separación de los cuerpos y sus velocidades relativas, y (2) a qué *propiedad inherente* a los cuerpos se debe la fuerza. Por ejemplo, la carga eléctrica creadora de las fuerzas eléctricas es una de dichas propiedades inherentes. La propiedad de la materia a la que consideramos se debe la fuerza gravitatoria recibe el nombre de *masa pesante*. Por definición, el cociente entre las masas pesantes de dos cuerpos  $A$  y  $B$  está medido por el cociente entre las fuerzas que les ejerce la Tierra cuando están situados en un mismo lugar. Si se miden dichas fuerzas mediante estudios de aceleración y resultan ser  $F_a$  y  $F_b$ , el cociente entre las masas pesantes  $M_a$  y  $M_b$  es, entonces,

$$\frac{M_a}{M_b} = \frac{F_a}{F_b}$$

De los experimentos de caída libre sabemos que  $F_a = m_a g$  y  $F_b = m_b g$ , con lo que

$$\frac{F_a}{F_b} = \frac{m_a}{m_b} \quad (m = \text{masa inerte}).$$

Por comparación, pues, vemos que el cociente entre las masas pesantes de dos cuerpos debe ser igual al cociente entre las masas inertes. En otras palabras, la masa pesante



es proporcional a la masa inerte,  $M = (\text{const})m$ . Si la unidad de masa pesante se toma igual a la de masa inerte, obtenemos  $M = m$ .

Debido a esta proporcionalidad, hallada experimentalmente, entre las masas pesante e inerte y a la elección de las mismas unidades para ambas, las magnitudes de estas cantidades se describen siempre por el mismo número y queda enmascarada la distinción entre ellas. En la práctica cotidiana no se suele distinguir entre los dos conceptos de masa y a ambos se les llama, simplemente, «masa». Recordemos, de todas maneras, que las masas inerte y pesante de un cuerpo surgen de dos propiedades diferentes de la materia: la resistencia a alterar el movimiento y la propiedad a la cual se debe la atracción gravitatoria.

---

La fuerza gravitatoria, pues, queda adscrita a una propiedad de la materia, la masa pesante, que poseen todos los cuerpos materiales. La interacción gravitatoria es siempre una fuerza atractiva. Se mencionó en el capítulo 1 que la base de la descripción cuantitativa por NEWTON de la interacción gravitatoria estaba constituida por las tres leyes de KEPLER del movimiento, las cuales describían algunas características del movimiento de los planetas alrededor del Sol, y por tanto, expresaban algunas propiedades de la interacción entre el Sol y sus planetas. Introduciendo el concepto de fuerza, NEWTON demostró cómo podía describirse la interacción de manera concisa y pudo formular la ley de la fuerza gravitatoria (para más detalles véase el capítulo 10)

$$F = G \frac{M_1 M_2}{r^2} \quad (3-13)$$

Las cantidades  $M_1$  y  $M_2$  son las masas pesantes de las partículas en interacción y  $r$  es la distancia que las separa. Queda implícito que las dimensiones de las partículas son pequeñas frente a la distancia que las separa. En un apéndice se demostrará que, en el caso de una esfera, la fuerza gravitatoria creada por ella es la misma que la creada por una masa puntual situada en el centro de la esfera y cuya masa fuera igual a la de ésta.

NEWTON propuso que esta ley tuviera validez general para dos partículas materiales cualesquiera en interacción, que fueran pequeñas frente a la distancia que las separa. También propuso que  $G$  es una constante universal, la misma para todos los cuerpos, independiente de su constitución química o física. El valor de esta constante universal depende, claro está, de la elección de unidad para la masa pesante  $M$ . Elijiendo la unidad de masa pesante igual a la de masa inerte, p. e. un kilogramo, y expresando la distancia en metros, la constante de la gravitación universal  $G$  resulta ser

$$G \simeq 6,67 \cdot 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$$

La ley de la gravitación universal ha sido comprobada experimentalmente en el laboratorio, por el famoso experimento de Cavendish (1797).

Si aplicamos la ecuación (3-13) a la interacción entre la Tierra y un cuerpo en la superficie terrestre, tenemos  $r = R$ , donde  $R$  es el radio de la Tierra; si representamos por  $m$  la masa del cuerpo y por  $M$  la de la Tierra, obtenemos  $F = m(GM/R^2)$ . Como también tenemos que  $F = mg$ , la aceleración constante local de caída libre estará relacionada con la masa y el radio terrestres por la ecuación

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad (3-14)$$

Como se indicó en el capítulo 2, a la fuerza gravitatoria  $mg$  que se ejerce sobre un cuerpo se le da el nombre de *peso* del cuerpo. El peso, pues, en contraste con la masa inerte, no es una propiedad inherente o invariante del cuerpo, ya que depende de las propiedades de la Tierra y de la distancia a la Tierra. En realidad, además de depender de la distancia, existe también una ligera variación del peso de un cuerpo que se debe a su situación sobre la Tierra; el peso aumenta gradualmente del ecuador a los polos. No obstante, la variación es inferior a un 1 %. En el capítulo 11 se estudiará esta variación.

**EJEMPLO.** Hemos visto que la aceleración de un cuerpo en caída libre en la superficie terrestre es constante e igual a  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ . (a) ¿Cuál es el peso de un cuerpo de masa  $M = 1 \text{ kg}$ , 1 g? Los pesos son  $Mg = 9,8 \text{ N}$  y 980 dynas, respectivamente. (b) La fuerza gravitatoria creada por la Tierra es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra. El radio terrestre es de  $6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$ . ¿A qué altura sobre la superficie terrestre debe llevarse un cuerpo de 100 kg para que su peso disminuya 40 kilopond?

Representado por  $R$  el radio terrestre y por  $h$  la altura sobre la superficie de la Tierra, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{100}{100 - 25} &= \frac{(R + h)^2}{R^2} \\ 1 + \frac{h}{R} &= \sqrt{\frac{100}{75}} = \sqrt{\frac{4}{3}} \\ \frac{h}{R} &= \sqrt{\frac{4}{3}} - 1 \simeq 0,155 \end{aligned}$$

es decir,  $h \simeq 10^6 \text{ m}$ . Sin embargo, recordemos que aun cuando un cuerpo *pierde peso a medida que asciende, su masa inerte permanece constante*.

*Movimiento a lo largo de una vertical.* Consideremos ahora el movimiento de un cuerpo a lo largo de una vertical. Describiremos el movimiento respecto a un eje de coordenadas  $y$  tal que  $y = 0$  en el suelo y el sentido positivo de la  $y$

sea hacia arriba. Si es  $m$  la masa del cuerpo, la fuerza que se ejerce sobre él será  $F_v = -mg$ . Si se proyecta el cuerpo hacia arriba partiendo del suelo con la velocidad  $v_0$  en  $t = 0$ , obtenemos de  $m(dv_v/dt) = -mg$  la siguiente expresión para la velocidad  $v_v$  en un instante posterior  $t$ :

$$v_v = v_0 - gt \quad (3-15)$$

Análogamente, hallamos para la posición (véase cap. 1)

$$y = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \quad (3-16)$$

En la figura 3-9 pueden verse representadas gráficamente estas relaciones. La velocidad se anula en el instante  $t_0$  (dado por  $t_0 = v_0/g$ ) que corresponde a una posición  $y_{\max} = h$ , dada por

$$h = \frac{v_0^2}{g} - g \frac{v_0^2}{2g^2} = \frac{v_0^2}{2g}$$

La posición  $y$  es nula evidentemente en el instante de partida  $t = 0$ , y también cuando  $t = 2v_0/g = 2t_0$ , que representa el instante en que el cuerpo alcanza de nuevo el suelo tras haber subido y bajado. Como el tiempo de subida es  $t_0$  y el tiempo total de ida y vuelta es  $2t_0$ , el tiempo de bajada es también  $t_0$ , como era de esperar.

Si se hubiera iniciado el movimiento en la posición  $y = y_0$  en un instante  $t = t_0$  en lugar de desde el suelo,  $y = 0$ , en  $t = 0$ , las expresiones para la velocidad y la posición se obtendrían de las ecuaciones (3-15) y (3-16) sin más que sustituir  $t$  por  $t - t_0$  e  $y$  por  $y - y_0$ . Obsérvese que, en este caso general,  $v_0$  puede ser positiva o negativa.

**EJEMPLO.** Desde la superficie terrestre se lanza hacia arriba en el instante  $t = 0$  y con una velocidad de 20 m/s, un cuerpo  $A$  de masa 2 kg. Un segundo más tarde, se deja caer desde una altura de 20 m un cuerpo  $B$  cuya masa también es de 2 kg. ¿Cuándo y dónde chocarán los cuerpos? (Tómese  $g \simeq 10 \text{ m/s}^2$ .)

Las posiciones de  $A$  y  $B$  vienen dadas por las ecuaciones

$$y_a = 20t - 10t^2/2 = 20t - 5t^2$$

y

$$y_b = 20 - 10(t - 1)^2/2 = 20 - 5(t - 1)^2$$

Haciendo  $y_a = y_b$ , obtenemos  $t = 3/2 \text{ s}$  como instante del choque y 18,75 m como altura a la que tiene lugar dicho choque. Además, inmediatamente antes del choque la velocidad de  $A$  es  $20 - 10(3/2) = 5 \text{ m/s}$  y la velocidad de  $B$  es  $0 - 10 \cdot 0,5 = -5 \text{ m/s}$ .

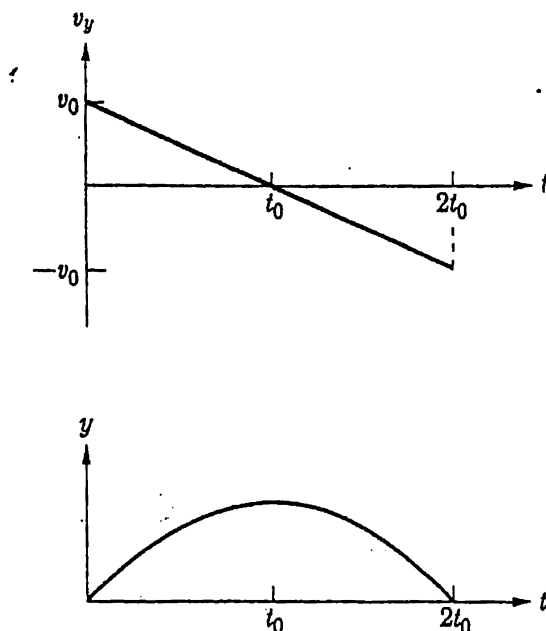


Fig. 3-9. Velocidad y posición de una partícula lanzada hacia arriba con velocidad  $v_0$  desde el suelo,  $y = 0$ , representadas en función del tiempo.

La fuerza gravitatoria es, tal vez, la causa más familiar de movimiento uniformemente acelerado, pero también hay otras. Siempre que sea constante la fuerza aplicada a un cuerpo, también será constante la aceleración e igual a  $a = F/m$ . En el caso de la fuerza gravitatoria ilustrado en la figura 3-9, la aceleración es  $a = -g$ , donde el signo menos se debe a que tomamos la coordenada  $y$  de la posición creciente *hacia arriba*, mientras que la fuerza  $F$  y la aceleración están dirigidas *hacia abajo*. Las ecuaciones cinemáticas del movimiento uniformemente acelerado se deducen directamente de los razonamientos hechos al llegar a las ecuaciones (3-15) y (3-16) y tenemos

$$v_x = v_0 + at, \quad (3-17)$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad (3-18)$$

para un cuerpo con aceleración  $a$  en la dirección  $x$ , con posición inicial  $x_0$  y velocidad inicial  $v_0$  en  $t = 0$ . Téngase bien en cuenta que estas expresiones se refieren al movimiento uniformemente acelerado y *no* son válidas cuando la aceleración no es constante.

**EJEMPLO.** Un coche parte del reposo con una aceleración constante  $a_1 = 3 \text{ m/s}^2$  que conserva durante un tiempo  $t_1 = 3 \text{ s}$ . A partir de este instante, ¿cuál sería la aceleración (supuesta constante) que lo detendría a una distancia  $L = 30 \text{ m}$  a partir del punto inicial?

Durante los tres primeros segundos, el coche alcanza una posición

$$x_1 = \frac{a_1 t_1^2}{2} = 3 \cdot \frac{9}{2} = 13,5 \text{ m}$$

desde el punto de partida. La velocidad es

$$v_1 = at = 9 \text{ m/s}$$

La aceleración a partir de este instante se representa por  $a_2$ . El tiempo necesario para detenerse es  $t_2$ . Luego

$$16,5 = v_1 t_2 + a_2 \frac{t_2^2}{2}$$

$$v_2 = v_1 + a_2 t_2 = 0$$

lo cual da  $t_2 = -v_1/a_2$  y  $16,5 = -v_1^2/a_2 + v_1^2/2a_2 = -v_1^2/2a_2$  o sea  $a_2 = -81/(2 \cdot 16,5)$   $\text{m/s}^2 \simeq -2,45 \text{ m/s}^2$ .

**3-9 Fuerza en un resorte.** De manera totalmente análoga a la empleada en el estudio de la fuerza gravitatoria, vamos ahora a estudiar las propiedades de otras interacciones midiendo, por ejemplo, la fuerza en función de la separación y la velocidad relativa de los cuerpos en interacción. También podemos alterar las propiedades de los cuerpos mismos y estudiar los efectos correspondientes sobre la fuerza. Por el momento, limitaremos nuestro estudio al caso sencillo de una fuerza del tipo de resorte, pero en apartados posteriores volveremos sobre otros tipos de interacción.

Para medir la fuerza que se ejerce sobre un cuerpo en contacto con un resorte en función de la compresión de éste, medimos la aceleración del cuerpo al moverse bajo la acción del resorte. Para mayor sencillez, consideremos fijo un extremo del resorte, según se indica en la figura 3-10. Tales experimentos indican que la aceleración comunicada al cuerpo por el resorte al soltarlo partiendo del reposo será proporcional a la compresión (o alargamiento) del resorte contada (o contado) a partir de la posición de deformación nula. En otras palabras, si interpretamos el hecho de que la aceleración ha de tener sentido contrario al del desplazamiento del cuerpo, tendremos

$$F_x = -Kx \quad (3-19)$$

donde  $K$  es una constante, llamada constante del resorte, que depende de la naturaleza de éste. La simple relación lineal ilustrada en la figura 3-10 es aplicable a la mayoría de los resortes, al menos mientras el desplazamiento  $x$  sea suficientemente pequeño. Para desplazamientos  $x$  mayores, los resortes dejan de ser

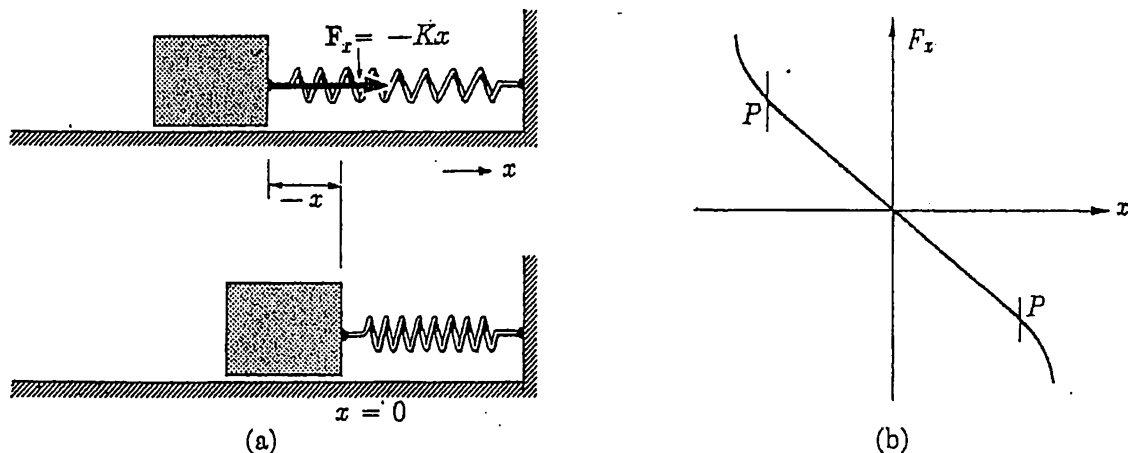


Fig. 3-10. La fuerza que ejerce el resorte sobre un cuerpo puede expresarse en la forma  $F_x = -Kx$ , donde  $K$  es la constante del resorte.

«lineales», según se ilustra en la figura 3-10(b), donde los puntos marcados con  $P$  sobre la curva señalan dónde empieza la alinearidad.

Otros experimentos de este tipo indican que la fuerza que se ejerce sobre el cuerpo para una determinada compresión  $x$  no depende marcadamente, en general, ni de la celeridad del cuerpo ni del sentido de su movimiento. Además, la fuerza que se ejerce sobre un cuerpo cualquiera situado en el extremo del resorte es siempre la misma, independientemente de la masa del cuerpo. Así pues, de acuerdo con tales medidas, la fuerza ejercida por el resorte sobre un cuerpo en contacto con él está unívocamente determinada por la compresión o alargamiento  $x$  del resorte, medidos a partir de la longitud de equilibrio, según indica la ecuación (3-19).

**EJEMPLO.** Un resorte que relajado mide una longitud de 50 cm se mantiene fijo por uno de sus extremos. Al otro se aplica una fuerza de 200 N, aumentando la longitud del resorte hasta 75 cm. El aumento de longitud del resorte es, pues, de 25 cm, y la constante del resorte será  $K = 200/0,25 = 800$  N/m.

**3-10 Principio de superposición de las fuerzas.** Sólo hemos considerado detalladamente interacciones de dos cuerpos. El cuerpo  $A$  interactúa con el cuerpo  $B$ , la cantidad de movimiento  $p_a + p_b$  permanece constante, y la fuerza que se ejerce sobre el cuerpo  $A$  es de igual magnitud, pero opuesta a la que se ejerce sobre  $B$ . Esta es la esencia de lo que hemos visto hasta ahora. El verdadero valor del concepto de fuerza se hará bien patente cuando consideremos la interacción de tres o más cuerpos o el movimiento de un cuerpo bajo la influencia de más de una fuerza, ya que resulta que las fuerzas que actúan sobre un cuerpo pueden sumarse para dar una *fuerza resultante* que determina el movimiento del cuerpo. Este es el principio de superposición.

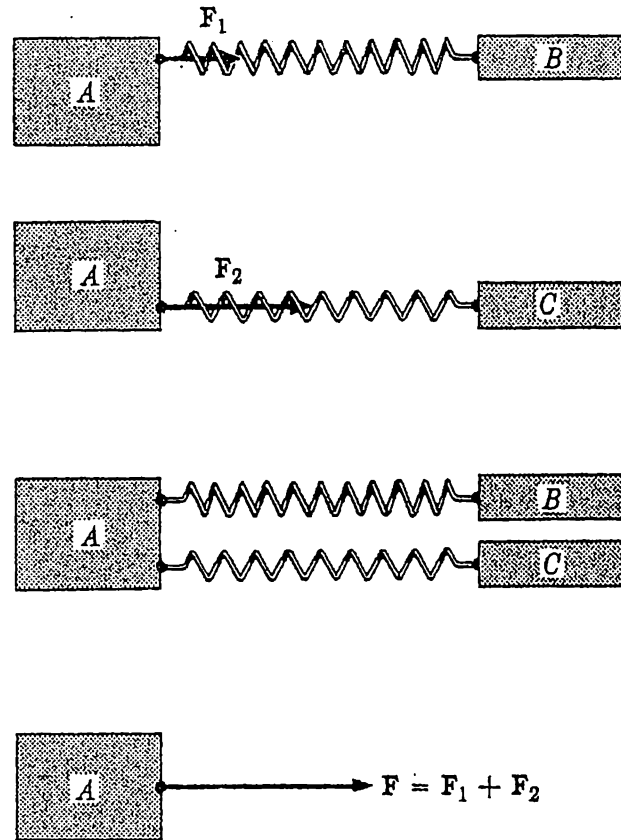


Fig. 3-11. Principio de superposición. Cuando la interacción es sólo entre  $A$  y  $B$ , sobre  $A$  se ejerce una fuerza  $F_1$ . Cuando la interacción es sólo entre  $A$  y  $C$ , sobre  $A$  se ejerce una fuerza  $F_2$ . Cuando con  $A$  interactúan  $B$  y  $C$ , el cuerpo  $A$  se mueve bajo la acción de una fuerza única  $F = F_1 + F_2$ , llamada fuerza resultante.

Imaginemos un cuerpo  $A$  que se mueva bajo la acción de otro cuerpo  $B$ . Éste puede moverse libremente o estar sujeto rígidamente a la Tierra (fig. 3-11). La fuerza puede deberse o a un resorte que une  $A$  con  $B$ , o puede ser otro tipo de fuerza, p. e. magnética o gravitatoria. Podemos estudiar esta fuerza y hallar, por ejemplo, cómo depende de la posición, velocidad relativa, etc. Quitemos ahora  $B$  e introduzcamos un nuevo cuerpo  $C$  con el cual pueda interactuar  $A$ . De nuevo podemos estudiar la fuerza y hallar cómo depende de la posición, velocidad relativa, etc. Dejemos, ahora, que interactúen a un mismo tiempo con  $A$  los dos cuerpos  $B$  y  $C$ . ¿Cómo reaccionará  $A$  ante esta nueva situación? ¿Cuál será su movimiento?

Estas preguntas sólo pueden contestarse con ayuda de experimentos, y la respuesta experimental es que  $A$  reacciona o se mueve como si se hallara sometida a una fuerza única igual a la *suma* (o superposición) de las dos fuerzas anteriormente estudiadas  $F_{ab}$  y  $F_{ac}$  en las interacciones con  $B$  y con  $C$ , respectivamente. La fuerza efectiva que se ejerce sobre un cuerpo es la suma de todas y cada una

de las fuerzas que se ejercen sobre él y se la llama, a veces, fuerza resultante. Este es el principio de superposición y es válido experimentalmente no sólo para tres cuerpos en interacción, sino para un número cualquiera. Es decir, tenemos

$$\frac{dp}{dt} = F_1 + F_2 + F_3 + \dots = F$$

donde  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ , etc., son fuerzas aplicadas al cuerpo en experimentos en los que interviene el cuerpo en cuestión y uno sólo de los demás. \*

**EJEMPLO.** Se tira de un carrito de masa 5 kg a lo largo de una pista horizontal mediante un resorte horizontal, con una aceleración constante de 4 m/s<sup>2</sup>. La fuerza que se ejerce sobre el cuerpo es pues,  $5 \cdot 4 = 20$  N. Durante este movimiento se observa que el resorte está alargado 10 cm, con lo que la constante del resorte es  $K = 200$  N/m. La aceleración está originada solamente por la fuerza del resorte.

Se quitan ahora de la pista el carrito y el resorte. Éste se mantiene vertical con su extremo superior fijo y el carrito unido al otro extremo. Se alarga de nuevo 10 cm el resorte y se suelta el carrito a partir de esta posición. ¿Cuál es ahora la aceleración inicial del carrito?

Cuando el carrito sólo se halla bajo la influencia de la gravitación, la fuerza que se ejerce sobre él está dirigida hacia abajo y tiene por magnitud  $mg = 5 \cdot 9,8$  N. Cuando sobre el carrito actúan simultáneamente las fuerzas gravitatoria y del resorte, según el principio de superposición la aceleración del carrito será la debida a la resultante de esas fuerzas. La gravedad proporciona una fuerza hacia abajo de  $5 \cdot 9,8$  N y la fuerza del resorte que tira hacia arriba es de 20 N, con lo que la fuerza resultante es  $5 \cdot 9,8 - 20 \simeq 29$  N hacia abajo. La aceleración inicial correspondiente es, pues, de  $29/5 \simeq 5,8$  m/s<sup>2</sup>.

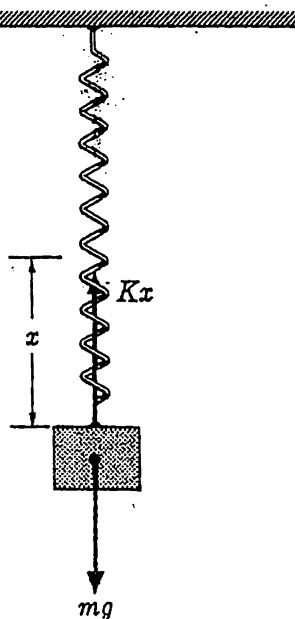
Basándonos en el principio de superposición, observamos que una fuerza aplicada a un cuerpo puede contrarrestarse con otra de igual magnitud y dirección, pero sentido opuesto. En otras palabras, si utilizamos un resorte calibrado según fuerzas a partir de experimentos directos de aceleraciones tales como los

---

\* Existen algunas excepciones reales y algunas sólo aparentes del principio de superposición de las fuerzas. Las excepciones reales surgen en relación con las fuerzas atómicas y nucleares, pues se presenta el caso de que la fuerza que se ejercen dos átomos entre sí depende de que haya o no un tercer átomo presente.

Existen varias excepciones aparentes. Por ejemplo, la fuerza electrostática entre dos cuerpos cargados eléctricamente se debe a la existencia de un gran número de partículas (electrones) en los cuerpos. Aun cuando las fuerzas elementales que se ejercen las distintas cargas se superponen, en la forma antes descrita, la fuerza resultante ejercida entre los cuerpos depende de la distribución de cargas en ellos. Esta distribución, y en consecuencia la fuerza que se ejerce entre los cuerpos, suele variar al introducir otros cuerpos cargados. Sin embargo, la perturbación de la fuerza de interacción inicial por un tercer cuerpo constituye una violación sólo aparente del principio de superposición, porque la fuerza entre dos cuerpos no variaría si dispusiéramos algo que mantuviera fija la distribución de cargas.



Fig. 3-12. Equilibrio cuando  $Kx = mg$ .

descritos en el apartado anterior, y lo estiramos hasta que la fuerza que se ejerza sobre una masa  $m$  cumpla con  $Kx = mg$ , cuando se suelte la masa adquirirá una aceleración  $g$  si sobre  $m$  no se ejerce ninguna otra fuerza. Sin embargo, cuando el resorte esté vertical y el cuerpo se halle bajo la acción de las dos fuerzas: la del resorte que le origina una aceleración  $g$  hacia arriba y la fuerza gravitatoria que le origina una aceleración  $g$  hacia abajo, el cuerpo se hallará en equilibrio al extremo del resorte cuando éste se halle estirado una longitud  $x = mg/K$ , según se ilustra en la figura 3-12. Este método de equilibrar dos fuerzas entre sí permite la medida de una fuerza desconocida en función de otra conocida. Por ejemplo, se puede calibrar un dinamómetro en función de la fuerza conocida de la gravedad, midiendo el alargamiento  $x$  de equilibrio correspondiente a pesos conocidos. Marcando un cero en la escala de fuerzas para la posición no deformada, marcaríamos en la escala 9,81N cuando del resorte pendiera un cuerpo de masa 1 kg. Si se añade otro cuerpo exactamente igual de masa 1 kg, la escala deberá señalar 19,62N, etc. (Hemos supuesto en este caso que la aceleración de caída libre en el lugar de experimentación es de 9,81 m/s<sup>2</sup>.)

**3-11 Movimiento del centro de masa.** Aun cuando el movimiento de un sistema aislado de partículas en interacción puede ser muy complicado en sus detalles, el centro de masa del sistema se mueve de manera muy sencilla. De los experimentos de conservación de la cantidad de movimiento y de la definición de centro de masa, hemos deducido que el centro de masa se mueve con velocidad constante. Queremos ahora estudiar el movimiento del centro de masa

en el caso de que una o varias partículas de las que constituyen el sistema se halle sometida a una fuerza exterior.

Como primer paso en esa dirección, examinemos el movimiento de dos cuerpos en interacción el uno con el otro solamente, desde el punto de vista de la fuerza. La fuerza que se ejerce sobre el cuerpo  $A$  sólo se debe al cuerpo  $B$ . Llamémosla  $F_{ab}$ . La fuerza que se ejerce sobre el cuerpo  $B$  sólo se debe al cuerpo  $A$ . Llamémosla  $F_{ba}$ . Entonces, para los cuerpos  $A$  y  $B$  tenemos

$$F_{ab} = \frac{dp_a}{dt} \quad (3-20)$$

y

$$F_{ba} = \frac{dp_b}{dt} \quad (3-21)$$

Pero, de nuestras anteriores consideraciones que nos condujeron a la tercera ley de NEWTON, sabemos que  $F_{ab}$  y  $F_{ba}$  son de igual magnitud pero directamente opuestas. Es decir, puesto que  $F_{ab} = -F_{ba}$ , al sumar las ecuaciones (3-20) y (3-21), obtenemos

$$\frac{dp_a}{dt} + \frac{dp_b}{dt} = \frac{d(p_a + p_b)}{dt} = \frac{dp}{dt} = 0$$

donde  $p = p_a + p_b$  es la cantidad de movimiento total y es igual a  $MV$ . Como  $dp/dt = M(dV/dt)$  es cero, la velocidad  $V$  del centro de masa debe ser constante. Desde luego, en todo esto no hay nada nuevo.

Supongamos, en cambio, que sobre uno de los cuerpos se ejerza una fuerza exterior, p. e. sobre el cuerpo  $B$  de la figura 3-13. Haciendo uso del principio de superposición de las fuerzas, tenemos para los cuerpos  $A$  y  $B$ :

$$F_{ab} = \frac{dp_a}{dt}$$

y

$$F + F_{ba} = \frac{dp_b}{dt}$$

Al sumar estas dos ecuaciones tenemos

$$\frac{dp}{dt} = M \frac{dV}{dt} = F \quad (3-22)$$

donde, como antes,  $p = p_a + p_b = MV$ . La aceleración (y por tanto el movimiento consiguiente) del centro de masa está totalmente determinado por la fuerza exterior  $F$ . Obsérvese que si se hubiera aplicado  $F$  a  $A$ , el resultado hubiera sido el mismo. Desde luego, si queremos conocer los movimientos detallados de  $A$  y  $B$ , habrá que tener en cuenta las fuerzas  $F_{ab}$  y  $F_{ba}$ , a las que llamaremos

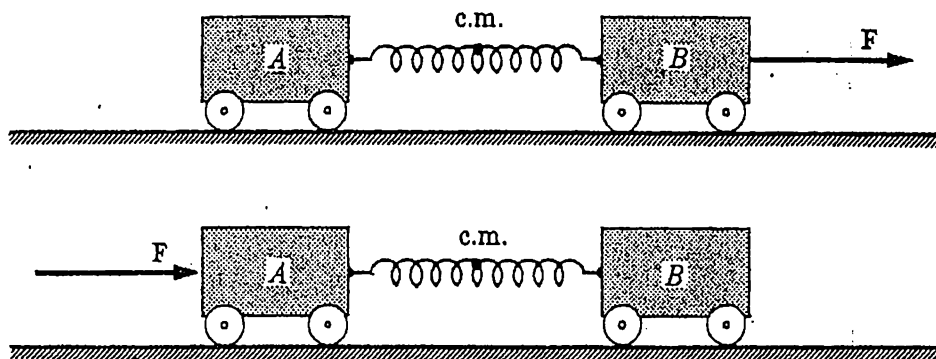


Fig. 3-13. El movimiento del centro de masa (c.m.) está determinado por la fuerza exterior y es independiente del punto de aplicación de la fuerza.

fuerzas interiores al sistema  $A + B$ . En el caso particular ilustrado en la figura 3-13, los dos carritos oscilarán hacia adelante y atrás mientras el sistema en conjunto se acelera hacia la derecha bajo la influencia de  $F$ . El movimiento de cada uno de los carritos será complicado y dependerá del punto de aplicación de  $F$ , pero el movimiento del centro de masa está totalmente determinado por la fuerza exterior  $F$  y es independiente de su punto de aplicación.

Lo que hemos dicho acerca del movimiento del centro de masa del sistema de dos cuerpos puede extenderse fácilmente a un número arbitrario de partículas ya que, basándonos en el principio de superposición, las fuerzas interiores que se ejercen entre los distintos cuerpos del sistema se anulan dos a dos. La fuerza que ejerce  $A$  sobre  $B$  es igual y opuesta a la que ejerce  $B$  sobre  $A$ , la fuerza que ejerce  $A$  sobre  $C$  es igual y opuesta a la que ejerce  $C$  sobre  $A$ , etc. Luego la suma de las cesiones de cantidad de movimiento de todas las fuerzas interiores es nula, y volvemos a encontrar que las únicas fuerzas que pueden originar una transferencia neta de cantidad de movimiento a un sistema, son las fuerzas exteriores. Simbólicamente, tenemos

$$\sum_i F_i = M \frac{dV}{dt} \quad (3-23)$$

Un cuerpo rígido es un tipo especial de sistema de partículas en el cual las partículas (moléculas, si se quiere) mantienen invariables sus distancias recíprocas. También en este caso se anulan dos a dos las fuerzas entre partículas y el movimiento del centro de masa está determinado por las fuerzas exteriores. Volvemos a hacer notar que, por lo que respecta al movimiento del centro de masa, el punto de aplicación de las fuerzas exteriores puede ser cualquiera. En la figura 3-14(a) la línea de acción de la fuerza pasa por el centro de masa del cuerpo rígido, pero no en (b) y (c). En los dos últimos casos, la fuerza dará origen a una rotación además de a la aceleración del centro de masa. Ésta no depende del punto de aplicación de la fuerza, aunque sí dependa de él la rotación.

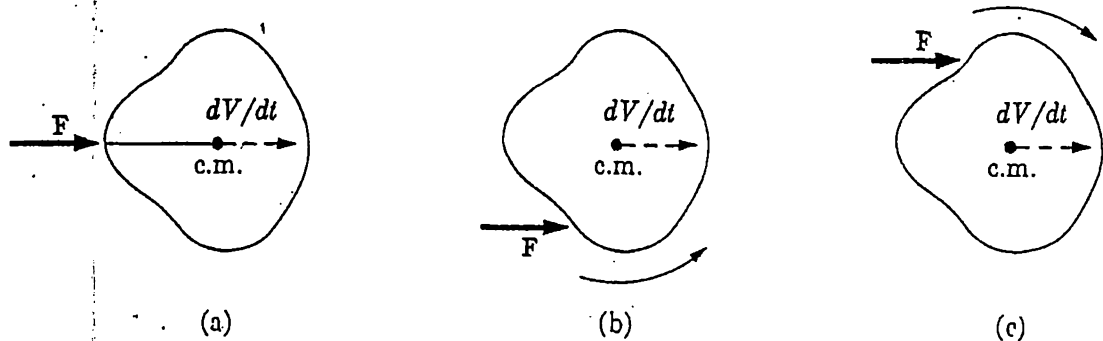


Fig. 3-14. La aceleración del centro de masa de un cuerpo rígido no depende del punto de aplicación de una fuerza. Sin embargo, el movimiento del cuerpo respecto al centro de masa *sí* depende del punto de aplicación. Así, en los casos (b) y (c), cuando la fuerza no pasa por el centro de masa, la fuerza originará también una rotación del cuerpo además de la aceleración del centro de masa (véase Cap. 12).

A qué fuerzas podemos llamar exteriores y a cuáles interiores dependerá, claro está, de lo que definamos como nuestro sistema. Por ejemplo, consideremos los dos carritos unidos por un resorte de la figura 3-15. Si definimos nuestro sistema I como los dos carritos (y el resorte), la fuerza exterior será únicamente la fuerza ejercida por la cuerda sobre el carrito B. El movimiento del centro de masa del sistema (carritos A y B) está determinado por  $F_I = M_I(dV_I/dt)$ , donde  $M_I = m_a + m_b$  es la masa del sistema, y  $V_I$  es la velocidad del centro de masa del sistema.

En cambio, si incluimos en nuestro sistema II todo tercer cuerpo responsable de la fuerza  $F_I$ , ésta se convertirá en fuerza interior y la fuerza exterior deberá incluir todas las fuerzas exteriores que actúan sobre el tercer cuerpo. Si el tercer cuerpo C es un vehículo automóvil como se indica en la figura 3-15, la fuerza exterior es la fuerza de rozamiento (véase el cap. 4) de la pista sobre las ruedas motrices del vehículo. Tenemos entonces  $F_{II} = M_{II}(dV_{II}/dt)$ , donde  $M_{II} = m_a + m_b + m_c$  es la masa del sistema II, y  $V_{II}$  es la velocidad del centro de masa del sistema.

**EJEMPLO.** Una fuerza  $F$  tira de un ascensor de masa  $m_2$ . En su interior se halla una persona de masa  $m_1$ . ¿Qué fuerza de contacto ejerce el suelo sobre la persona (fig. 3-16)?

Si consideramos que el ascensor y la persona forman un sistema, las fuerzas exteriores al sistema son las de la gravedad  $(m_1 + m_2)g$  y la fuerza  $F$  hacia arriba. La fuerza total hacia arriba será, pues,  $F - (m_1 + m_2)g$  y la correspondiente aceleración hacia arriba es

$$a = \frac{F - (m_1 + m_2)g}{m_1 + m_2} = \frac{F}{m_1 + m_2} - g$$

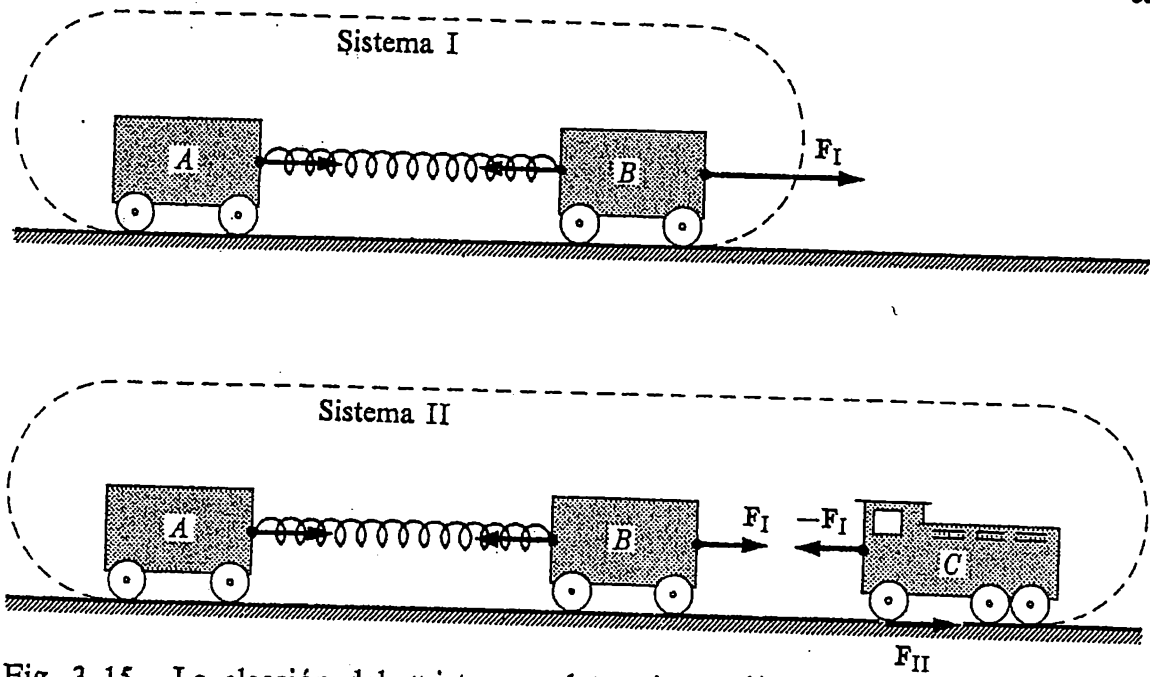


Fig. 3-15. La elección del «sistema» determina cuáles son las fuerzas exteriores y cuáles las interiores.

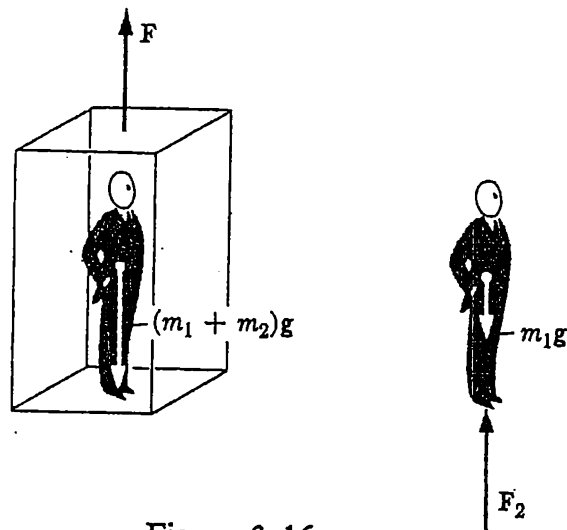


Figura 3-16

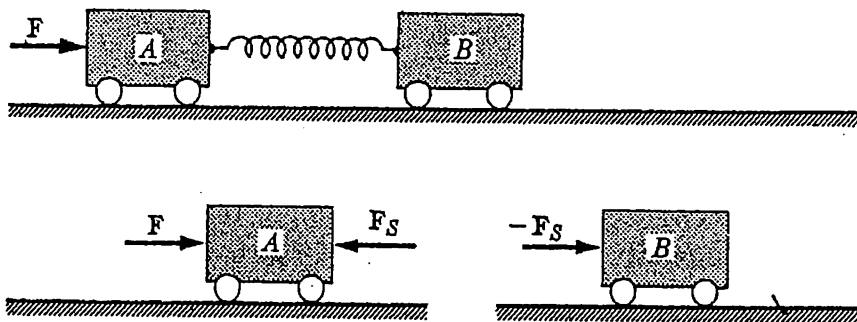


Figura 3-17

Si aislamos ahora a la persona, observamos que las fuerzas que se ejercen sobre ella son su peso  $m_1g$ , dirigido hacia abajo y la fuerza de contacto  $F_2$  dirigida hacia arriba. La aceleración de la persona es  $a$ , y la fuerza total dirigida hacia arriba es  $F_2 - m_1g$ :

$$m_1a = m_1 \left( \frac{F}{m_1 + m_2} - g \right) = F_2 - m_1g,$$

$$F_2 = m_1g + \frac{m_1}{m_1 + m_2} F - m_1g = \frac{m_1}{m_1 + m_2} F$$

**EJEMPLO.** Según puede verse en la figura 3-17, dos carritos  $A$  y  $B$  de masas  $m_a = 2$  kg y  $m_b = 3$  kg están conectados mediante un resorte que tiene una longitud  $L = 0,5$  m cuando está indeformado, y una constante  $K = 50$  N/m. Los carritos se hallan inicialmente en reposo sobre una pista horizontal. Al carrito  $A$  se aplica una fuerza constante  $F = 25$  N dirigida hacia  $B$ . (a) ¿Cuál es la aceleración inicial del centro de masa de  $A$  y  $B$ ? (b) ¿Cuál es la aceleración inicial de  $A$  y de  $B$ ? (c) ¿Cuál es la aceleración de  $A$  y  $B$  en el instante en que el resorte está comprimido 10 cm mientras  $A$  está sometido a  $F$ ?

(a) La aceleración inicial del centro de masa de  $A$  y  $B$  es

$$\frac{dV}{dt} = \frac{F}{m_a + m_b} = \frac{25}{5} = 5 \text{ m/s}^2.$$

(b) La aceleración inicial de  $A$  es

$$\frac{dv_a}{dt} = \frac{F}{m_a} = \frac{25}{2} = 12,5 \text{ m/s}^2$$

ya que la fuerza del resorte es nula inicialmente. (c) En el instante en que el resorte está comprimido 10 cm, el cuerpo  $A$  se halla sometido a dos fuerzas,  $F = 25$  N en un sentido y la fuerza del resorte  $Kx = 50 \cdot 0,1 = 5$  N en sentido contrario, como se indica en la figura 3-17. La aceleración de  $A$  es entonces

$$\frac{dv_a}{dt} = \frac{25 - 5}{2} = 10 \text{ m/s}^2$$

y la de  $B$  es

$$\frac{dv_b}{dt} = \frac{5}{3} \text{ m/s}^2$$

**Equilibrio y Estática.** Cuando la suma de todas las fuerzas exteriores a un cuerpo (o sistema de partículas) es nula, la aceleración del centro de masa es nula. En estas condiciones se dice que el centro de masa está en *equilibrio* o, lo que es equivalente, que el cuerpo está en *equilibrio traslatorio*. Mientras los cuerpos en equilibrio tienen, necesariamente, centro de masa con aceleración nula, no tienen necesariamente nula la velocidad de dicho centro de masa. La *Estática*

es la parte de la Mecánica que estudia las condiciones y fuerzas que se requieren para el equilibrio. Tienen aplicaciones prácticas muy variadas, como por ejemplo el diseño de estructuras.

Si un sistema o cuerpo se halla en equilibrio traslatorio, debe ocurrir que

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + \dots = 0, \quad (3-24)$$

donde  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ , etc., son las fuerzas exteriores. Esta es una condición necesaria y suficiente para el equilibrio traslatorio. Pero ello no significa que estén en equilibrio todas las partes del sistema. Solamente el centro de masa tiene aceleración nula. Podría no haber fuerza resultante sobre dos carritos conectados por un resorte, por ejemplo, y estar los carritos oscilando en uno y otro sentido.

Incluso cuando no haya fuerza resultante aplicada a un cuerpo *rígido*, todas las partes del cuerpo no tienen por qué estar en equilibrio necesariamente. Imaginemos dos fuerzas iguales y opuestas aplicadas a los extremos de un madero y perpendicularmente a él. No hay duda de que la aceleración del centro de masa del madero será nula, si bien está claro que el madero tiene tendencia a girar. (El movimiento de rotación y las condiciones para el equilibrio rotatorio se considerarán en un capítulo posterior.)

Al estudiar las condiciones de equilibrio traslatorio o, a tal fin, al hallar la fuerza resultante que se ejerce sobre un cuerpo de manera que pueda determinarse su aceleración, es fundamental definir con precisión el sistema o cuerpo que se considera. Ello asegura una distinción clara entre fuerzas exteriores e interiores, distinción que es esencial puesto que sólo son pertinentes las fuerzas exteriores.

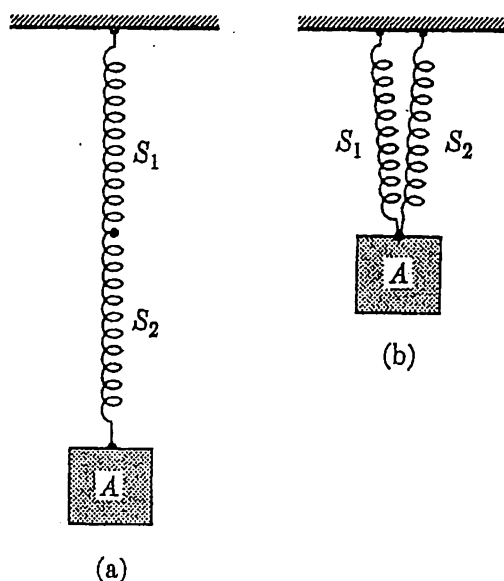


Figura 3-18

**EJEMPLO.** Dos resortes,  $S_1$  y  $S_2$ , de masa despreciable y constantes  $K_1$  y  $K_2$ , respectivamente, están dispuestos para soportar un cuerpo  $A$ . En la figura 3-18(a) los resortes están montados en «serie» y en (b) en «paralelo». ¿Cuáles son los alargamientos de cada resorte en uno y otro caso, a consecuencia de la fuerza que la gravedad ejerce sobre  $A$ ? Determinar la constante equivalente del resorte en ambos casos.

En el primer caso el cuerpo está sometido a dos fuerzas: el peso  $mg$  y la fuerza  $F_2$  del resorte. A su vez, el resorte  $S_2$  se halla sometido a la fuerza  $F_2$  por su extremo inferior y a una fuerza de contacto en la unión con  $S_1$  en el extremo superior. Como el peso del resorte es despreciable, las fuerzas aplicadas en sus extremos deberán contrarrestarse totalmente, es decir, deberá ser  $F_1 = F_2$ . Análogamente, vemos que el

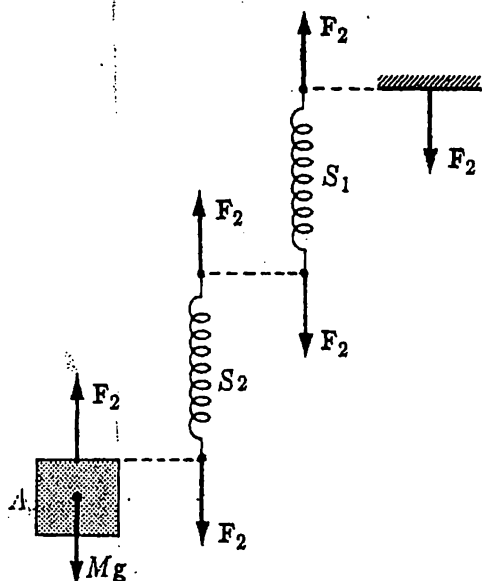


Figura 3-19

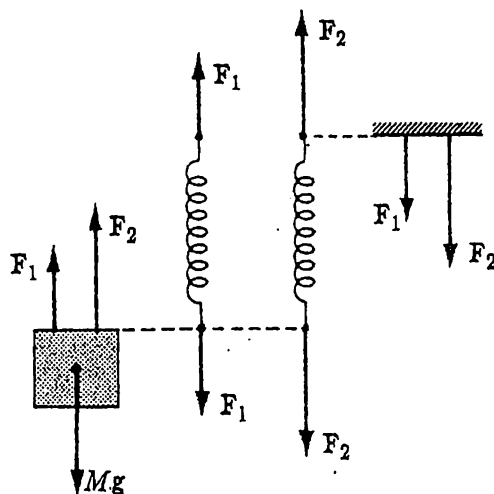


Figura 3-20

resorte  $S_1$  se halla sometido a fuerzas opuestas de magnitud  $F_2$  aplicadas a los dos extremos del resorte, como se indica en la figura 3-19. Por último, el soporte del que pende  $S_1$  está sometido a una fuerza  $F_2$  hacia abajo. Hemos indicado todas las fuerzas que se ejercen sobre cada una de las partes del sistema, y podemos imponer ahora la condición de equilibrio de que la fuerza resultante aplicada a  $A$  sea nula, es decir,  $F_2 = Mg$ . Podemos expresar ahora los alargamientos de los dos resortes en función de  $mg$  y de las constantes de los resortes:

$$x_1 = \frac{F_2}{K_1} = \frac{Mg}{K_1}, \quad x_2 = \frac{F_1}{K_2} = \frac{Mg}{K_2}$$

El alargamiento total de los dos resortes es  $x_1 + x_2 = Mg(1/K_1 + 1/K_2)$ . En otras palabras, la constante del resorte equivalente  $K_a = Mg/(x_1 + x_2)$  vendrá definida por

$$\frac{1}{K_a} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$



En el caso (b), los alargamientos de los dos resortes son iguales

$$x_1 = x_2 = x_b$$

El cuerpo  $A$  se halla sometido ahora a tres fuerzas: el peso y las dos fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  de los resortes, según puede verse en la figura 3-20, donde también se indican las fuerzas que se ejercen sobre las otras partes del sistema. Tenemos ahora las relaciones

$$F_1 + F_2 = Mg$$

y

$$F_1 = K_1 x_b, \quad F_2 = K_2 x_b$$

La condición de equilibrio de  $A$  es entonces

$$x_b(K_1 + K_2) = Mg$$

$$x_b = \frac{Mg}{K_1 + K_2}$$

En consecuencia, la constante del resorte equivalente será en este caso

$$K_b = K_1 + K_2$$

En el caso particular en que  $K_1 = K_2 = K$ , la constante del resorte equivalente será  $K_a = K/2$  y  $K_b = 2K$ , para los casos (a) y (b), respectivamente. En otras palabras, el acoplo en paralelo de los resortes corresponde a una rigidez cuádruple de la del acoplo en serie.

*Hilo flexible.* En nuestros estudios hallamos conveniente, frecuentemente, el ejercer fuerzas sobre cuerpos mediante hilos flexibles. Un hilo flexible ideal puede ejercer sólo tracción, nunca empuje, y la dirección de la fuerza del hilo es siempre la de él. Puede cambiarse la dirección de la fuerza del hilo, haciéndolo pasar por la garganta de una polea sin rozamiento. La magnitud de la fuerza ejercida por un hilo recibe frecuentemente el nombre de *tensión*. Luego, si dos muchachos en reposo tiran de los dos extremos de una cuerda con fuerzas de 50 N cada uno, la cuerda ejerce sobre cada muchacho una fuerza de 50 N y la tensión de la cuerda es de 50 N. Intercalando un dinamómetro en un punto cualquiera de la cuerda, indicaría esta tensión de 50 N. En la mayoría de los casos que estudiemos, la masa del hilo será mucho menor que las masas de los cuerpos sujetos a sus extremos. En estas condiciones puede despreciarse la masa del hilo y suponer que las fuerzas que ejerce sobre sus dos extremos son iguales y opuestas, aun cuando el hilo pueda estar acelerado.

**EJEMPLO.** *Experimentos de aceleración.* En los experimentos de movimiento con cuerpos que deslizan sobre un plano horizontal, se requiere frecuentemente una fuerza constante. Conviene entonces utilizar la fuerza de la gravedad sobre un objeto ex-

terior, transmitida en una dirección horizontal por medio de un hilo flexible que pasa por la garganta de una polea, como se indica en la figura 3-21. Sin embargo, importa hacer notar que cuando el sistema está acelerado, la fuerza transmitida al cuerpo situado sobre el plano horizontal *no* es igual al peso del cuerpo situado en el otro extremo del hilo, sino que es menor, según veremos más adelante.

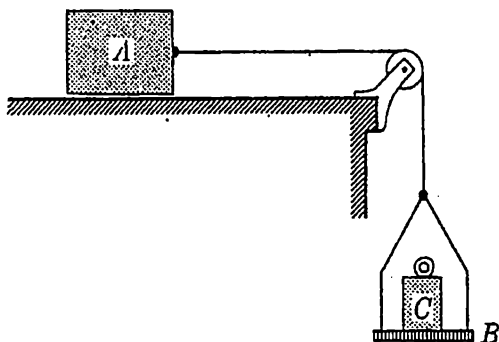


Figura 3-21

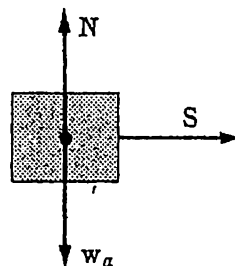


Figura 3-22

A un cuerpo *A* apoyado sobre una superficie horizontal sin rozamiento se le fija un hilo que pasa por la garganta de una polea y soporta un platillo en su otro extremo, como se indica en la figura 3-21. Sobre el platillo se coloca un cuerpo *C*. Las masas de *A*, *B* y *C* son 10 kg, 2 kg y 3 kg, respectivamente. ¿Cuál es la aceleración de *A* cuando se suelta el sistema partiendo del reposo, y cuál es la tensión *S* del hilo? Determinar la fuerza de contacto entre *B* y *C*.

Empezamos por aislar los distintos cuerpos e indicar todas las fuerzas que se ejercen sobre ellos. Consideremos primeramente *A*. En la figura 3-22 pueden verse las fuerzas que se ejercen sobre él. (El peso de *A* está equilibrado por la fuerza de contacto *N* de la mesa). Supongamos que la aceleración *a* de *A* está dirigida hacia la derecha. La ecuación del movimiento será

$$S = m_a a \quad (3-25)$$

Consideremos ahora *B* + *C* como una unidad que se mueve hacia abajo, también con aceleración *a*. En la figura 3-23 pueden verse las fuerzas que se ejercen sobre *B* + *C*. La ecuación del movimiento es

$$(w_b + w_c) - S = (m_b + m_c)a \quad (3-26)$$

donde se han tomado positivas las fuerzas y las aceleraciones cuando están dirigidas hacia *abajo*. De estas dos ecuaciones podemos obtener los valores de las dos incógnitas *a* y *S*. Así, de las ecuaciones (3-25) y (3-26), obtenemos

$$w_b + w_c = (m_a + m_b + m_c)a$$

$$a = \frac{w_b + w_c}{m_a + m_b + m_c} = \frac{m_b + m_c}{m_a + m_b + m_c} g$$

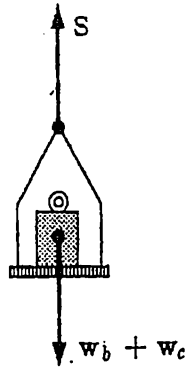


Figura 3-23

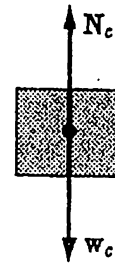


Figura 3-24

puesto que  $w$  es  $mg$ . Sustituyendo valores numéricos, tenemos

$$a = \frac{2 + 3}{15} g = \frac{g}{3}$$

Según la ecuación (3-26), la tensión del hilo es

$$S = (w_b + w_c) \frac{m_a}{m_a + m_b + m_c} = \frac{2}{3}(w_b + w_c) = \frac{10}{3} \text{ kp}$$

En otras palabras, la tensión del hilo es, en este caso, sólo los dos tercios del peso de  $B + C$ .

Por último, para determinar la fuerza de contacto entre  $B$  y  $C$ , aislamos al cuerpo  $C$ , como se indica en la figura 3-24. Hallamos entonces que

$$w_c - N_c = m_c a,$$

$$N_c = w_c - m_c a = m_c(g - a) = \frac{2m_c g}{3} = \frac{2}{3} w_c$$

Obsérvese que las tensiones y las fuerzas de contacto son diferentes en el equilibrio que en el desequilibrio, según se pone de manifiesto en este ejemplo.

### 3-12 Fuerza originada por un chorro de partículas. Movimiento de un cohete.

Cuando incide un chorro de partículas sobre un cuerpo, o cuando éste emite un chorro de partículas, sobre el cuerpo se ejerce una fuerza. Este tipo de fenómeno es importante en muchos casos científicos y técnicos. La presión de un gas, ciertos tipos de fuerza resistente y las propulsiones a chorro y por cohete, constituyen ejemplos de tales casos.

Consideremos un chorro de partículas, cada una de las cuales tiene una masa  $m$  y una velocidad  $v$ , que incidan sobre una pared rígida (fig. 3-25). Sea  $\mu$  el número de partículas por unidad de volumen en el chorro. La densidad del chorro

será, pues,  $\rho = \mu m$ . Si los choques que las partículas sufren contra la pared son perfectamente elásticos, las partículas sufrirán una variación de cantidad de movimiento de  $2mv$  en cada choque, con lo que se cederá a la pared una cantidad de movimiento  $2mv$  por cada choque.

Si queremos hallar la fuerza ejercida contra la pared, deberemos hallar el número de choques por segundo, ya que la fuerza (variación en unidad de tiempo de la cantidad de movimiento) es el producto de la variación de cantidad de movimiento en un choque, por el número de choques por segundo. Una partícula que en un instante se halle a una distancia  $\Delta x$  de la pared, la alcanzará al cabo de un tiempo  $\Delta t = \Delta x/v$ . En ese tiempo alcanzarán la pared todas las partículas contenidas en una columna de volumen  $A \Delta x = A v \Delta t$ , donde  $A$  es el área de la sección recta del chorro (es decir, la alcanzarán  $\mu A v \Delta t$  partículas) y el número de choques por segundo será  $A \mu v$ . La cesión total de cantidad de movimiento en unidad de tiempo a la pared, o fuerza que se ejerce sobre la pared, es pues,

$$F = A \mu v (2mv) = 2A \mu m v^2 = 2A \rho v^2$$

En cambio, si el choque fuera totalmente inelástico, la fuerza correspondiente sería sólo la mitad, porque la cesión de cantidad de movimiento por choque sería sólo  $mv$ .

Análogamente, si un motor de propulsión a chorro que se halle en reposo sobre el suelo descarga un chorro de velocidad  $v$  y densidad  $\rho$ , la cantidad de movimiento que descarga el motor por segundo es  $A \rho v^2$ , y la correspondiente fuerza o «empuje» del motor tiene la misma magnitud que la del chorro, pero está dirigida en sentido contrario. Si el motor estuviera libre (no sujeto al suelo), adquiriría una aceleración inicial  $dV/dt$  dada por

$$M \frac{dV}{dt} = A \rho v^2$$

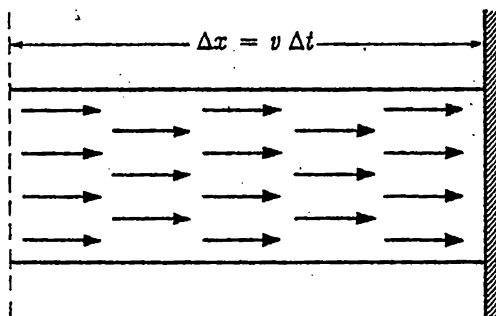


Fig. 3-25. En un chorro de partículas que se mueven hacia la pared con velocidad  $v$ , todas las partículas que se hallen a una distancia no mayor de  $v \Delta t$  de la pared, la alcanzarán en los  $\Delta t$  segundos siguientes.

donde  $M$  es la masa total del motor. A medida que éste aumenta su celeridad, disminuye la del chorro relativa al suelo si permanece constante respecto al motor. Además, al ir descargando combustible, disminuye la masa total del motor y la aceleración variará con el tiempo.

EJEMPLO. Determinar el empuje de un motor de propulsión a chorro que descarga  $Q = 100$  kg de aire por segundo a una velocidad de 600 m/s. Como  $Q = A\rho v$ , podemos expresar la fuerza en la forma

$$F = A\rho v^2 = Qv = 100 \cdot 600 = 60\,000 \text{ N}$$

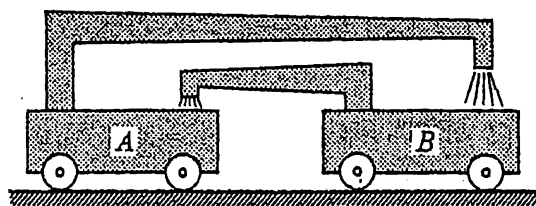


Figura 3-26

EJEMPLO. En la figura 3-26 se ha representado un caso en que dos vagones de ferrocarril exactamente iguales se mueven en el mismo sentido siguiendo vías paralelas, con celeridades diferentes  $V_a$  y  $V_b$ . Imaginemos que se bombea agua de  $A$  a  $B$  a razón de  $R$  kg/s. De  $B$  a  $A$  se transfiere una cantidad igual. La cantidad de movimiento cedida a  $B$  en unidad de tiempo en la dirección y sentido del movimiento es  $RV_a$ , y la cantidad de movimiento cedida por  $B$  en unidad de tiempo es  $RV_b$ . En unidad de tiempo, la cantidad de movimiento ganada por  $B$  es  $R(V_a - V_b)$ ; es decir, la fuerza que se ejerce sobre  $B$  es

$$F_b = R(V_a - V_b)$$

Análogamente, la fuerza que se ejerce sobre  $A$  es

$$F_a = R(V_b - V_a) = -F_b$$

Obsérvese que la masa de cada vagón permanece constante. La fuerza se debe al intercambio de agua rápida con agua lenta.

En la teoría cinética de los gases podría realizarse un cálculo análogo al analizar la *fuerza de viscosidad* que se ejerce entre dos capas de un gas que lleven celeridades diferentes. El intercambio de partículas rápidas del gas con las lentas, origina una fuerza entre las capas.

*Movimiento de un cohete.* Podemos considerar que un cohete consiste, fundamentalmente, en un depósito lleno de combustible. Al quemarse éste, abandona

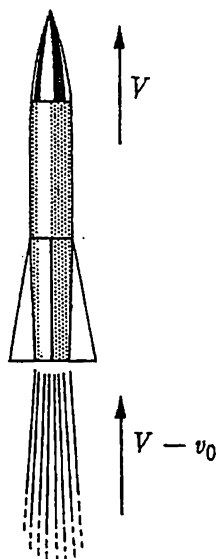


Fig. 3-27. Movimiento de un cohete.

el depósito. El problema estriba en determinar la ecuación del movimiento de la cápsula más el combustible no quemado.

Estudiemos solamente el caso sencillo en que el cohete se halle en el espacio exterior, de manera que se puedan despreciar todas las fuerzas exteriores. Representemos por  $m_0$  la masa inicial del combustible, por  $m$  la masa de combustible que *se ha descargado*, y por  $M$  la masa de la cápsula del cohete. En un instante genérico, la masa total del cohete es  $(m_0 - m) + M$  y si es  $V$  su velocidad, la cantidad de movimiento total será  $(m_0 - m + M)V$ . Supongamos ahora que se separa explosivamente del cohete una masa adicional  $\Delta m$  de combustible, con una velocidad  $v_0$  relativa a la cápsula y en sentido opuesto a  $V$ , como se indica en la figura 3-27. Después de la explosión, la masa  $\Delta m$  tiene una cantidad de movimiento  $\Delta m(V - v_0)$ , y la cantidad de movimiento cedida a  $\Delta m$  en la separación es  $(V - v_0)\Delta m - V\Delta m = -v_0\Delta m$ . Al cohete y su contenido se cederá una cantidad de movimiento igual, y por ser la masa total de éstos  $(m_0 - m - \Delta m + M)$ , tendremos

$$(\Delta m)v_0 = (m_0 - m - \Delta m + M)\Delta V \quad (3-27)$$

Si la separación tiene lugar en un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , la aceleración media es  $\Delta V/\Delta t$ . Dividiendo por  $\Delta t$ , la ecuación (3-27) obtenemos  $(m_0 - m - \Delta m + M)(\Delta V/\Delta t) = (\Delta m/\Delta t)v_0$ . Si es continua la descarga de masa por el cohete, los cocientes incrementales anteriores podrán sustituirse por las variaciones instantáneas  $dV/dt$  y  $dm/dt$  correspondientes al caso límite  $\Delta t = 0$ , y obtenemos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{v_0}{m_0 - m + M} \frac{dm}{dt} \quad (3-28)$$

donde  $dm/dt$  = descarga en unidad de tiempo. En este caso, cuando no hay fuerzas exteriores al sistema, vemos que la aceleración del cohete es proporcional a la descarga instantánea de masa en unidad de tiempo y a la velocidad de expulsión relativa al cohete. Como  $m$  crece con el tiempo, se deduce que la aceleración crece con el tiempo durante el tiempo de descarga, aun cuando se mantengan constantes la velocidad de expulsión  $v_0$  y la descarga en unidad de tiempo.

## PROBLEMAS

3-1. Un coche de 1000 kg rueda sobre una pista horizontal a una velocidad de 5 m/s. Choca contra un coche  $B$  de 2000 kg que se mueve en sentido contrario con una velocidad de 3 m/s. Después del choque,  $A$  se mueve a 5 m/s en sentido opuesto al de su movimiento inicial. ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la velocidad de  $B$ ?

3-2. Un cuerpo de masa  $M$  se mueve por el espacio exterior con celeridad  $V$ . Se parte, mediante una explosión, en dos partes iguales de manera que ambas partes sigan moviéndose en la misma dirección y sentido que antes. Si la celeridad de una parte es  $V/3$ , ¿cuál es la celeridad de la otra?

3-3. Se carga una cápsula de cohete de 100 kg con 10 kg de hidrógeno y 80 kg de oxígeno. Las moléculas de agua resultantes son expulsadas por el cohete de manera que su velocidad *relativa al suelo* sea  $-2000$  m/s. Si la velocidad del cohete era de 300 m/s antes de iniciarse la combustión, ¿cuál será cuando se haya agotado el combustible? Despréciase el efecto gravitatorio de la Tierra y los demás efectos exteriores al movimiento.

3-4. Dos muchachos de igual masa  $m$  se hallan de pie, uno frente a otro, sobre una capa de hielo sin rozamiento. Uno de ellos tiene una pelota de gran tamaño y masa  $m/10$ . Juegan a echarse la pelota uno a otro. Supóngase, para mayor sencillez, que la celeridad de la pelota relativa al suelo es siempre la misma al ir de

un muchacho a otro. Describir en detalle lo que ocurre y obtener la velocidad de los muchachos después del primer lanzamiento y después de la primera captura.

3-5. El isótopo  $\text{Ra}^{226}$  del radio tiene una masa de  $3,8 \cdot 10^{-22}$  g. Este núcleo atómico se desintegra radiactivamente dando una partícula alfa (núcleo de helio, masa  $6,7 \cdot 10^{-24}$  g) y el isótopo  $\text{Rn}^{222}$  del radón (masa  $3,7 \cdot 10^{-22}$  g). En esta «explosión» la partícula alfa sale disparada con una velocidad de  $1,5 \cdot 10^9$  cm/s. ¿Cuál es la celeridad del isótopo del radón?

3-6. Un carrito  $B$  ( $m_b = 2$  kg) está en reposo sobre una pista horizontal a 10 m de una pared rígida  $C$ . El carrito  $A$  ( $m_a = 10$  kg y  $v_a = 10$  m/s) choca con  $B$  y éste choca posteriormente con  $C$  (véase fig. 3-28). Considérense todos los cho-

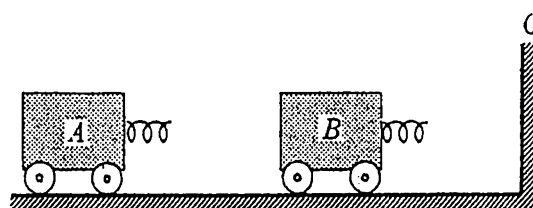


Figura 2-38

ques perfectamente elásticos. (a) ¿Dónde chocarán  $A$  y  $B$  por segunda vez? (b) ¿Cuál es la velocidad de  $B$  inmediatamente después del segundo choque con  $A$ ?

3-7. Chocan dos bolas de igual masa. La velocidad de la primera bola  $A$  antes del choque es  $V$ . ¿Cuál ha de ser la velocidad de la segunda bola antes del

choque, para que sea nula la velocidad de  $A$  después del choque? El choque es perfectamente elástico.

3-8. Un disco  $A$  de masa  $m_a = 0,3$  kilogramos, se mueve con velocidad  $v_a = 5$  m/s sobre hielo exento de rozamiento, en una dirección perpendicular a una pared, según se indica en la figura 3-29. A una distancia de 20 m de la pared, el disco choca contra un bloque  $B$  de masa  $m_b = 0,2$  kg, que estaba inicialmente en reposo. Cinco segundos después

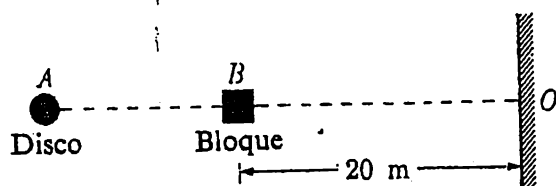


Figura 3-29

del choque, llega el bloque  $B$  a la pared en el punto  $O$ . (a) ¿Dónde está  $A$  cuando  $B$  choca contra la pared? (b) ¿Cuál es el cociente entre las velocidades relativas final e inicial del disco y el bloque?

3-9. Dos carritos análogos  $A$  y  $B$  están unidos rígidamente y tienen una masa combinada de 4 kg. El carrito  $C$  tiene una masa de 1 kg. Inicialmente,  $A$  y  $B$  tienen una velocidad de 5 m/s hacia la derecha y  $C$ , que se halla en el punto medio entre  $A$  y  $B$ , está en reposo, según se in-

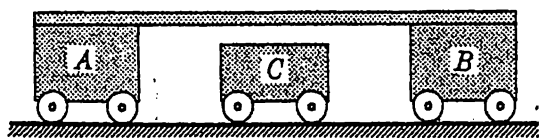


Figura 3-30

dica en la figura 3-30. (a) Supóngase que el choque entre  $A$  y  $C$  es *totalmente inelástico*. ¿Cuál es la velocidad final del sistema? (b) Supóngase que el choque entre  $A$  y  $C$  es *perfectamente elástico*, pero que el choque entre  $C$  y  $B$  es *totalmente inelástico*. ¿Cuál sería, entonces, la velo-

cidad final del sistema? Comparar con la parte (a) y explíquese. (c) Supóngase que los choques entre  $A$  y  $C$  y entre  $C$  y  $B$  son perfectamente elásticos. ¿Cuáles son las velocidades de  $C$  después del primero y del segundo choque?

3-10. Un cuerpo de masa  $m_a = 1$  kilogramo se mueve a lo largo de una pista con una velocidad  $v_a = 2$  m/s. Al disparar el cronómetro, es decir, en  $t = 0$ , este cuerpo pasa por una posición que tomaremos como origen  $x = 0$ . En el mismo instante, el cuerpo  $B$  de masa  $m_b = 4$  kg pasa por una posición  $x = 2$  m moviéndose con velocidad constante  $v_b = 0,5$  m/s en la misma dirección y sentido que  $A$ . (a) ¿Cuándo y dónde chocarán  $A$  y  $B$ ? (b) ¿Cuándo volverá  $A$  a  $x = 0$  si el choque es perfectamente elástico? (c) Supóngase que podemos variar  $m_a$ . ¿Cuál es el mayor valor de  $m_a/m_b$ , expresado en función de  $v_a/v_b$ , para el cual el cuerpo  $A$  regresa después del choque?

3-11. Un coche  $A$  de masa  $m_a$  se halla en reposo sobre una pista horizontal. Otro coche  $B$  de masa  $m_b$  choca con  $A$ . ¿Qué fracción de la cantidad de movimiento inicial de  $B$  se cede a  $A$  en el choque: (a) si el choque es perfectamente elástico? (b) si el choque es totalmente inelástico? (c) Estudiar el intercambio de cantidad de movimiento cuando  $m_a/m_b$  es muy grande y cuando es muy pequeño. En un choque perfectamente elástico, ¿existe algún límite superior a la velocidad de  $A$  después del choque, si la masa de  $A$  se hace más y más pequeña?

3-12. Un electrón choca con un átomo de hidrógeno de tal manera que el movimiento tiene lugar siempre a lo largo de una misma recta. La masa del átomo de hidrógeno es  $M = 1840m$ , donde  $m$  es la masa del electrón. Si el átomo de hidrógeno se halla inicialmente en reposo, ¿qué fracción de la cantidad de movi-



miento inicial del electrón se cede al átomo de hidrógeno si el choque es perfectamente elástico?

3-13. Consideremos un choque directo perfectamente elástico entre un neutrón y un núcleo de carbono. La masa del neutrón es  $m$  y la del núcleo de carbono es  $M = 12 m$ . Si el neutrón incide con una velocidad  $v_0$  sobre un núcleo de carbono en reposo, ¿cuál es la magnitud de la velocidad del neutrón después del choque?

3-14. Calcular el centro de masa de tres partículas de masas  $m_1 = 4$  kg,  $m_2 = 3$  kg,  $m_3 = 5$  kg y de coordenadas  $x_1 = -2$  m,  $x_2 = 1$  m,  $x_3 = 2$  m.

3-15. Determinar la situación del centro de masa del sistema Tierra-Luna. La masa de la Tierra es unas 82 veces la de la Luna y la distancia entre los centros

de la Tierra y la Luna es de unos 60 radios terrestres. Expresar la respuesta en función de los radios terrestres.

3-16. Analizar el problema 3-8 utilizando el concepto de centro de masa. ¿Cuál es la velocidad del centro de masa inmediatamente antes de que el bloque choque contra la pared?

3-17. Según puede verse en la figura 3-31, un hombre de masa  $M$  está de pie sobre un tablón de longitud  $L$  que se halla en reposo apoyado sobre una superficie sin rozamiento. El hombre camina hasta el otro extremo del tablón. ¿Qué distancia habrá recorrido el hombre respecto a la superficie, si la masa del tablón es  $M/3$ ?

3-18. ¿Qué fuerza se precisa para acelerar un automóvil de 1000 kg desde el reposo hasta una velocidad de 80 km/h

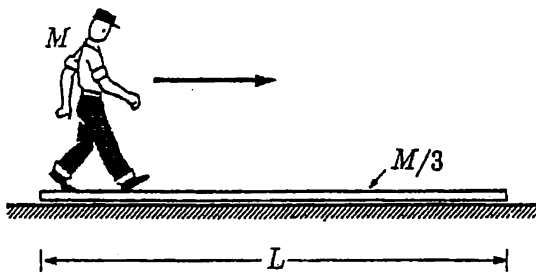


Figura 3-31

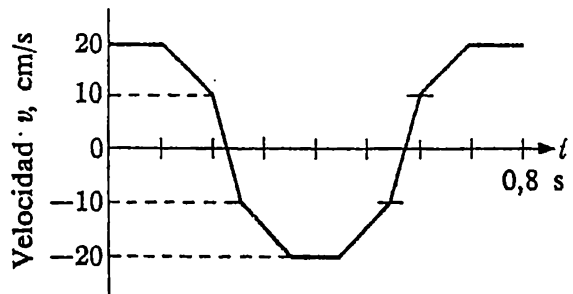


Figura 3-32

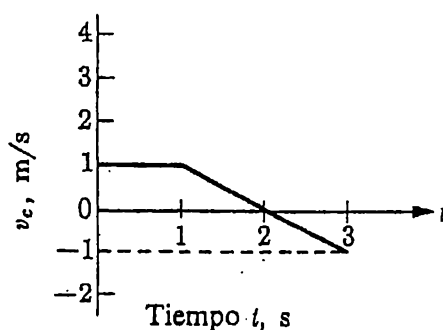
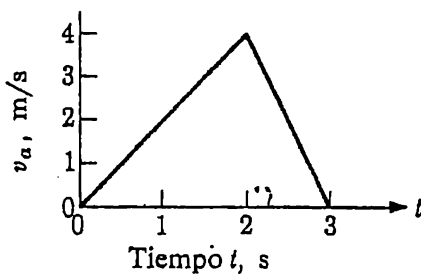
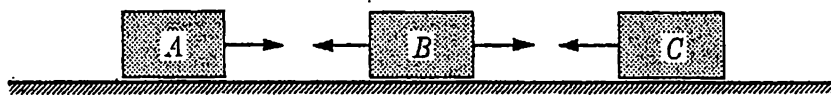


Figura 3-33

en 5 segundos? Supóngase constante la aceleración.

3-19. Se representa gráficamente en función del tiempo, la velocidad de una partícula de masa 2 g (fig. 3 — 32). Mediante medidas directas sobre la gráfica, representar gráficamente función del tiempo, la fuerza que se ejerce sobre la partícula. (a) ¿Cuál es (aproximadamente) la fuerza máxima? (b) ¿Cuál es la fuerza media en el intervalo de tiempo entre 0 y 0,4 s y en el intervalo de tiempo entre 0 y 0,8 s?

3-20. Un cuerpo  $B$  de masa  $m = 2$  kilogramos se halla inicialmente en reposo sobre una pista horizontal. Con él choca un cuerpo  $A$  de masa  $m = 4$  kg y velocidad inicial  $v_a = 10$  m/s. Si la duración del choque es  $\tau = 0,01$  s, ¿cuál es la fuerza media que se ejerce sobre uno de los cuerpos, si el choque es perfectamente elástico?

3-21. Tres cuerpos,  $A$  de masa 1 kg,  $B$  de masa desconocida y  $C$  de 3 kg, pueden moverse libremente (sin rozamiento) a lo largo de una recta, de manera que exista interacción entre  $A$  y  $B$ , y  $B$  y  $C$ , pero no entre  $A$  y  $C$ . Las velocidades de  $A$  y  $C$  varían con el tiempo, en la forma indicada por la figura 3 — 33. (a) En el instante  $t = 0$  la velocidad del centro de masa de los tres cuerpos es de 1 m/s y la velocidad de  $B$  es 1,25 m/s. ¿Cuál es la masa de  $B$ ? (b) Trácese una gráfica acotada que indique cómo varía con el tiempo la velocidad del cuerpo  $B$ . (c) Trácese una gráfica acotada que indique cómo varía con el tiempo la velocidad del cuerpo  $B$ . (c) Trácese una gráfica acotada que indique cómo varía con el tiempo la fuerza que se ejerce sobre el cuerpo  $A$ . (d) Trácese una gráfica acotada que indique cómo varía con el tiempo la fuerza que se ejerce sobre el cuerpo  $B$ .

3-22. En el instante  $t = 0$  se dis-

para hacia arriba un cuerpo  $A$  con velocidad  $v_a = 100$  m/s. (a) ¿Qué altura máxima alcanzará? (Despréciase la resistencia del aire.) (b) ¿Por qué factor habría que multiplicar la velocidad para que el cuerpo alcanzara una altura doble? (c) ¿En qué instante alcanza el cuerpo la mitad de la altura máxima?

3-23. Desde una altura, una persona dispara un cuerpo  $A$  hacia arriba y un cuerpo  $B$  hacia abajo, con celeridades iniciales iguales a  $v = 10$  m/s. ¿Cuándo será la velocidad de  $B$  doble que la de  $A$ ? ¿Qué distancia separará entonces a los dos cuerpos?

3-24. Una bala de masa  $m = 10$  g sale de la boca del cañón con una velocidad de 400 m/s. La longitud del cañón es de 60 cm. Determinar la fuerza y el tiempo que tarda la bala en recorrer el cañón, suponiendo constante la fuerza.

3-25. ¿Cuánto habrá que alargar un resorte para originar una aceleración inicial de  $4,9$  m/s<sup>2</sup> si la constante del resorte es de 200 N/m y el cuerpo unido al resorte tiene una masa de 4 kg?

3-26. Un resorte, que indeformado tiene una longitud de 0,6 m, soporta en su extremo inferior un peso de 8 kg, resultando ser su longitud 0,9 m (a) ¿Cuál es la constante del resorte? (b) Si se eleva 15 cm el cuerpo y luego se suelta, ¿cuál es la aceleración inicial del cuerpo? (c) ¿Cuánto habría que alargar el resorte para que al soltarlo diera al cuerpo una aceleración hacia arriba igual a  $g$ ?

3-27. La fuerza de rozamiento sobre una esfera pequeña que cae es  $F = 6\pi\eta rv$ , donde  $\eta$  es el coeficiente de viscosidad ( $\eta = 18 \cdot 10^{-5}$  unidades cegesimales para el aire),  $r$  el radio de la esfera y  $v$  es la celeridad (fórmula de Stokes). Estimar la velocidad de régimen de una gota de agua de radio 0,05 cm, si cae verticalmente.

3-28. Un tren consta de diez vago-

nes, cada uno de masa  $m$ , y una locomotora de masa  $10m$ . Ésta está sometida a una fuerza  $F$  hacia adelante por parte del raíl. Determinar las fuerzas que se ejercen sobre los acoplos entre los distintos vagones del tren, empezando por la fuerza que se ejerce sobre el último vagón.

3-29. Dos resortes tienen, indeformados, las longitudes  $l_1 = 20$  cm y  $l_2 = 30$  centímetros y sus constantes respectivas son  $K_1 = 40$  N/cm y  $K_2 = 20$  N/cm. Están unidos a dos paredes rígidas separadas por una distancia  $l = 80$  cm. Como se indica en la figura 3-34, se unen los extremos libres de los resortes. (a) Determinar la posición de equilibrio de la unión. (b) A la unión se fija un cuerpo de masa  $m = 2$  kg, se desplaza hacia la izquierda 5 cm y se suelta. Determinar la aceleración inicial.

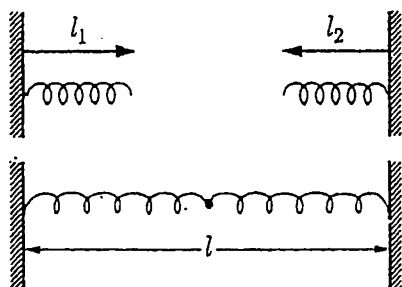


Figura 3-34

3-30. La plataforma de un pintor pende de una polea como se indica en la figura 3-35. Considérese la polea sin peso ni rozamientos, la cuerda sin peso y prescídase de que la plataforma pueda volcar. El pintor se halla sobre la plataforma, aguantándose a sí mismo. La plataforma pesa 40 kg y el pintor 80 kg. (a) Hallar la tensión en las cuerdas en los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ .

(b) Trácese dos diagramas de fuerzas distintos en los que se presenten todas las fuerzas aplicadas al pintor y a la plataforma. Rotúlese claramente cada fuerza

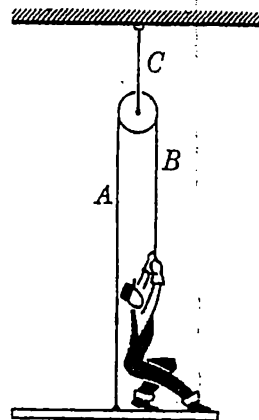


Figura 3-35

en lo que respecta a su magnitud, dirección y sentido. (c) ¿Cuál es la fuerza de contacto que se ejerce sobre los pies del pintor? (d) El «ayudante» del pintor aparece por una ventana y coloca un bidón de pintura de 50 kg sobre la plataforma. ¿Qué ocurre?

3-31. Uno de los extremos de una cuerda se amarra a una pared. Al otro extremo se le aplica una fuerza  $F$ , como se indica en la figura 3-36. ¿Cuál es la tensión de la cuerda? Si se tensa la cuerda entre dos hombres, cada uno de los cuales aplica una fuerza  $F$ , ¿cuál será la tensión de la cuerda?

3-32. Un hilo de longitud 0,6 m tiene uno de sus extremos fijo a una pared y del otro se tira con una fuerza de 500 N como se indica en la figura 3-37. Se corta el hilo por su punto medio y se intercala, en la forma indicada, un resorte de longitud normal 15 cm y constante  $K = 3000$  N/m. ¿Cuál será ahora la longitud combinada total de la combinación hilo-resorte si se aplica una fuerza de 500 N?

3-33. Dos masas  $m_1$  y  $m_2$ , tales que  $m_1 > m_2$ , se suspenden del techo y se unen con un hilo sin masa que pasa por una polea sin masa tal como se indica en la figura 3-38. Se sueltan las masas. ¿Cuál

es la tensión del hilo durante el movimiento?

3-34. Consideremos el sistema de cuerpos  $A$ ,  $B$  y  $C$  y el sistema de cuerdas y poleas que los une, indicado en la figura 3 — 39. Mediante un hilo adicional sujeto a la polea  $D$  se impide que caiga el cuerpo  $A$ . En este caso, el sistema está en equilibrio. ¿Qué le pasa al cuerpo  $C$  cuando

se corta el hilo  $S$ ? Puede despreciarse el peso de las poleas. Determinar las tensiones en las cuerdas y la aceleración de  $C$ .

3-35. En una caja de  $1/2$  kg se vierte un chorro de chinás a razón de  $n = 100$  por segundo desde una altura de  $h = 11$  m por encima de la caja. Cada china pesa 5 g. La caja está suspendida por una cuerda. ¿Cuál es la tensión (me-

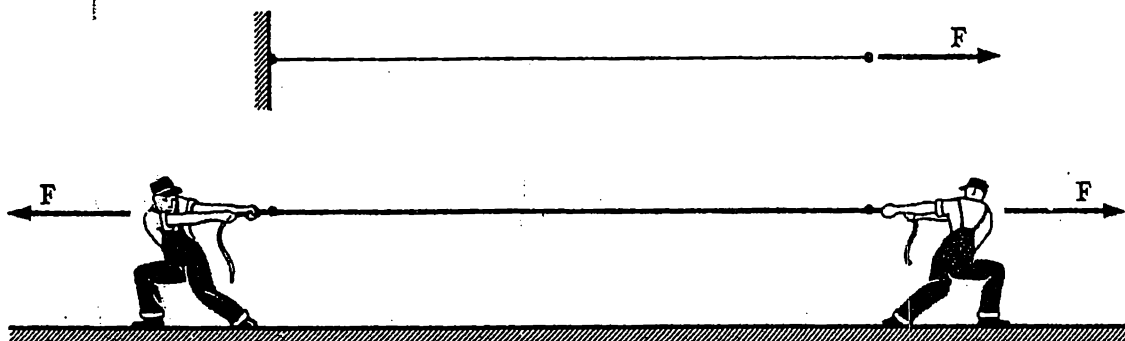


Figura 3-36

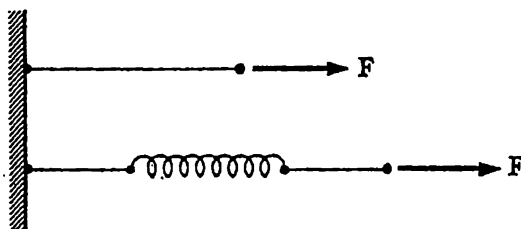


Figura 3-37

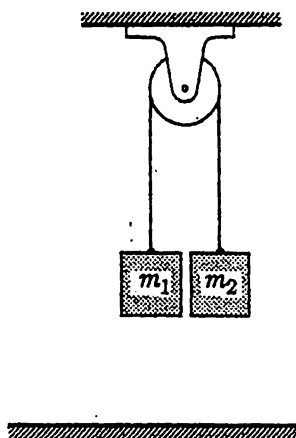


Figura 3-38

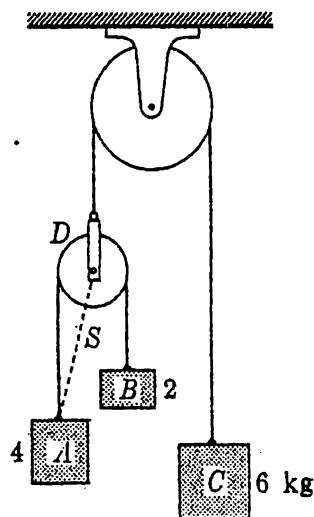


Figura 3-39

dia) de la cuerda en el instante  $t = 10$  s posterior a aquél en que caen en la caja las primeras chinas? Los choques entre las chinas y la caja pueden considerarse totalmente inelásticos.

3-36. Un chorro horizontal (sección recta de  $1 \text{ cm}^2$ ) de partículas choca contra una pared vertical rígida. La densidad de partículas en el chorro es de  $\mu = 1000/\text{cm}^3$  y la velocidad del chorro es  $v = 100 \text{ m/s}$ . Cada partícula tiene una masa  $m = 0,001 \text{ g}$ . La dirección del movimiento es normal a la pared. Supóngase que las partículas se incrustan en la pared. ¿Cuál es la cesión en unidad de tiempo de cantidad de movimiento a la pared, es decir, la fuerza (media en el tiempo) que actúa contra la pared? Indíquense las unidades.

Basándose en este sencillo análisis, ¿cómo variaría la fuerza de resistencia al movimiento de un satélite con su velocidad, a causa de los choques con las partículas del aire?

3-37. Un motor de propulsión a chorro desarrolla un empuje de  $50\,000 \text{ N}$ . Si el diámetro de la tobera es de  $50 \text{ cm}$  y la densidad del gas expulsado es  $0,001 \text{ g/cm}^3$ ,

¿cuál es la velocidad del gas expulsado?

3-38. Un carrito destapado de masa  $M = 2 \text{ kg}$  se mueve sobre una pista con velocidad constante  $V = 5 \text{ m/s}$ . Empieza a llover y el carrito empieza a llenarse de agua a razón de  $m = 5 \text{ g/s}$ . Trazar una gráfica que indique cómo varía la velocidad del carrito con el tiempo.

3-39. Un chorro continuo de partículas, cada una de masa  $m$  y velocidad  $v$ , es emitido por una fuente a razón de  $n$  por segundo. Las partículas se mueven en línea recta, chocan contra un cuerpo de masa  $M$  y se entierran en este cuerpo. Determinar la velocidad de  $M$  (velocidad inicial  $V = 0$ ) cuando haya recibido  $N$  partículas.

3-40. Un cohete parte del reposo en el vacío. Considérese el instante en que sólo queda la mitad del combustible inicial. ¿Cuál sería la descarga de combustible en unidad de tiempo, que hiciera que la aceleración del cohete fuera  $5g$ ? La masa inicial de combustible  $m_0 = 1000 \text{ kg}$  es el doble de la masa de la cápsula, y la velocidad de expulsión relativa al cohete es constante e igual a  $1500 \text{ m/s}$ .

## CANTIDAD DE MOVIMIENTO Y FUERZA — II

*Resumen.* Los experimentos de choque en un plano establecen la validez de la conservación de la cantidad de movimiento y se extienden al movimiento en dos y tres dimensiones las consideraciones del Capítulo 3. Se estudia el carácter vectorial de la cantidad de movimiento y de la fuerza y se obtiene el principio de superposición a partir de un experimento de movimiento en un plano. Sigue el movimiento del centro de masa de sistemas de partículas y de cuerpos rígidos. Se estudia la fuerza de contacto (rozamiento) y se dan ejemplos de movimiento y equilibrio.

**4-1 Conservación de la cantidad de movimiento.** Tan sólo en condiciones muy especiales ocurrirá que en el choque de dos cuerpos el movimiento de éstos antes y después del choque tenga lugar a lo largo de una misma recta. En general, los cuerpos pueden moverse libremente en una dirección cualquiera del plano o del espacio, por lo que un choque entre dos cuerpos entrañará movimiento en más de una dirección. Vamos a ver si puede extenderse al caso bidimensional el principio de conservación de la cantidad de movimiento, realizando experimentos de choque de cuerpos en un plano.

*Dispositivo experimental.* Las fuerzas de rozamiento por rodadura pueden hacerse extraordinariamente pequeñas, hecho del que ya nos aprovechamos en nuestros experimentos de choque con carritos en una sola dirección. En cambio, en los experimentos de choque en un plano no podremos utilizar carritos y en su lugar utilizaremos discos suspendidos en el aire como los indicados en la figura 4-1. Éstos son cilindros huecos que pueden llenarse con aire comprimido el cual puede salir por un pequeño orificio practicado en la base lisa y pulida. Ajustando adecuadamente la salida del aire, el colchón de aire mantiene suspendido al disco el cual puede deslizar entonces sobre una mesa horizontal sin que haya, prácticamente, rozamiento. La salida de aire que se precisa es sorprendentemente poco intensa.

Hagamos chocar en el plano dos discos suspendidos en el aire. Mediante la técnica fotográfica del relámpago múltiple descrita en el capítulo 1, se determinan convenientemente las velocidades de los discos antes y después del choque. En la figura 4-2 puede verse una fotografía de ese tipo.

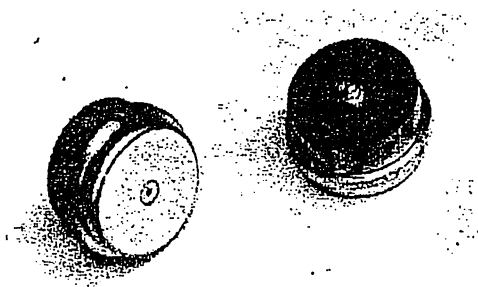
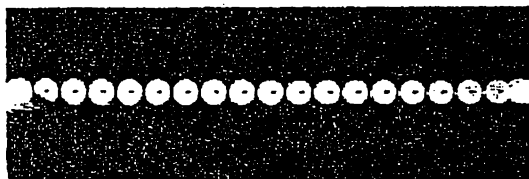


Fig. 4-1. En los experimentos de movimiento en un plano se emplean discos suspendidos por aire que deslizan sobre una superficie horizontal. A continuación se ilustran algunos experimentos típicos.

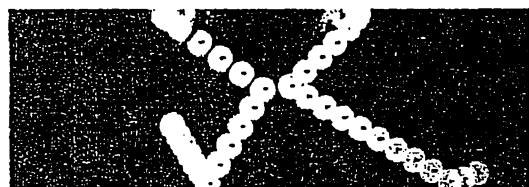
Discos suspendidos por aire



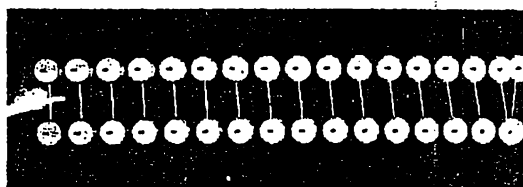
Rozamiento despreciable. Movimiento con velocidad constante.



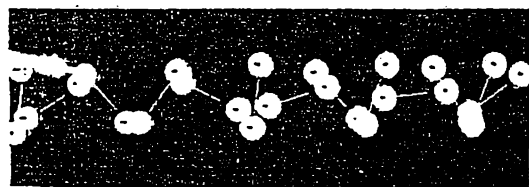
Disco al extremo de un cordón de goma



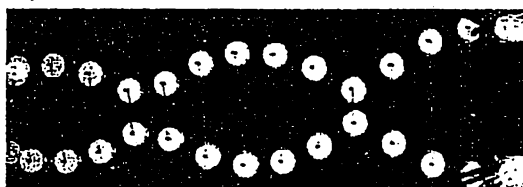
Choque



Traslación de un cuerpo rígido



Traslación y rotación combinadas de un cuerpo rígido



Movimiento de dos discos en interacción

*Conservación de la cantidad de movimiento: forma de componentes.* Analicemos el resultado del choque ilustrado en la figura 4-2. Las masas de los dos cuerpos son  $m_a = 2,0$  kg y  $m_b = 1,5$  kg. El tiempo entre destellos consecutivos es de 0,1 s y como la escala de longitudes puede hallarse a partir del diámetro conocido de los discos  $d = 10$  cm, podremos leer directamente las velocidades en la fotografía. Describiremos el movimiento de los cuerpos en función de sus coordenadas  $x$  e  $y$ . Análogamente, se describirán las velocidades de los cuerpos en función de las componentes  $v_{ax} = v_a \cos \theta_a$ ,  $v_{ay} = v_a \sin \theta_a$ ,  $v_{bx} = v_b \cos \theta_b$ , y  $v_{by} = v_b \sin \theta_b$ . En la tabla 4-1 se consignan los valores de las componentes de las velocidades antes y después del choque, obtenidas a partir del experimento de la figura 4-2. Dentro de los errores experimentales, que son del orden del

3 % o 4 %, se conservan en el choque las componentes de la cantidad de movimiento total:

$$p_{ax} + p_{bx} = p'_{ax} + p'_{bx}, \quad p_{ay} + p_{by} = p'_{ay} + p'_{by} \quad (4-1)$$

Si representamos por  $p_x = p_{ax} + p_{bx}$  y  $p_y = p_{ay} + p_{by}$ , las componentes  $x$  e  $y$  de la cantidad de movimiento, las ecuaciones (4-1) pueden escribirse en la forma

$$p_x = p'_x, \quad p_y = p'_y$$

Variando las condiciones experimentales, siguiendo las líneas ya indicadas en el caso unidimensional, siempre se llega a resultados compatibles con el principio de conservación de la cantidad de movimiento.

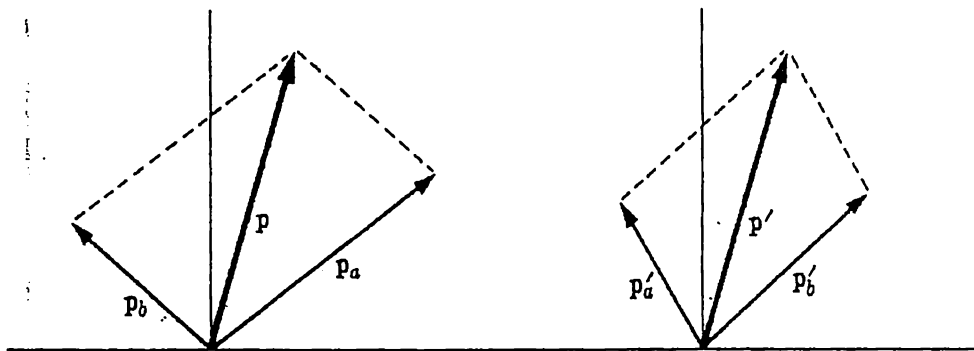
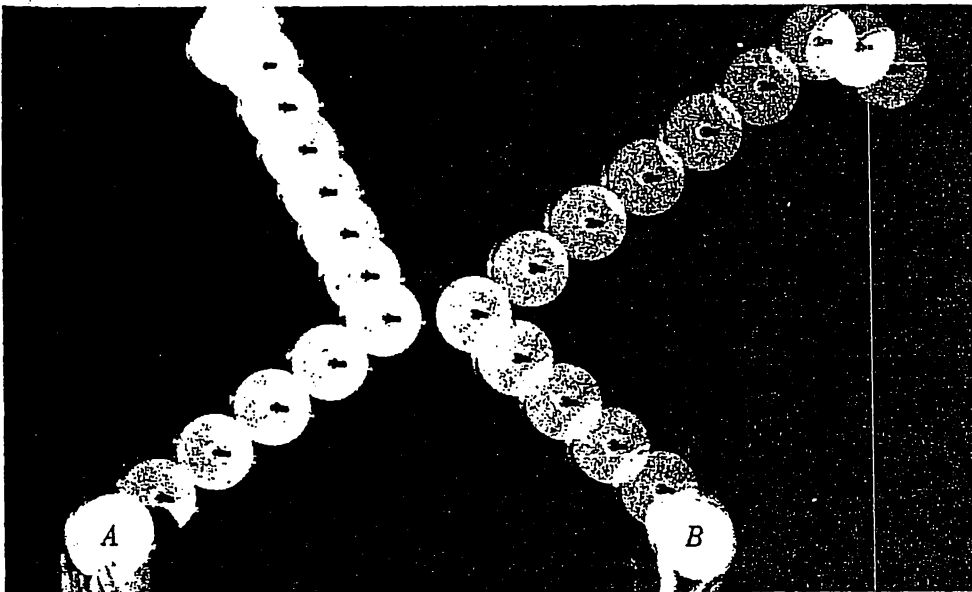


Fig. 4-2. Choque entre dos discos,  $m_a = 2,0$  kg y  $m_b = 1,5$  kg y diagrama vectorial de las cantidades de movimiento en el choque. Se conserva la cantidad de movimiento total.



*Conservación de la cantidad de movimiento: forma vectorial.* Al igual que la velocidad, la cantidad de movimiento puede describirse como vector,  $p = mv$ . Las componentes de este vector son  $p_x = mv_x$  y  $p_y = mv_y$ . Las dos ecuaciones (4-1) que expresan la conservación de la cantidad de movimiento en función de las componentes, pueden condensarse en una relación vectorial

$$p_a + p_b = p'_a + p'_b \quad (4-2)$$

Además, si introducimos el vector cantidad de movimiento total  $p = p_a + p_b$ , de componentes  $p_x = p_{ax} + p_{bx}$  y  $p_y = p_{ay} + p_{by}$ , podremos expresar el principio de conservación de la cantidad de movimiento en forma más concisa escribiendo la relación

$$p = p' \quad (4-3)$$

Así, este importante principio de conservación dice que el vector cantidad de movimiento total antes del choque es igual a la cantidad de movimiento total después del choque tanto en magnitud como en dirección y sentido, independientemente de las cesiones de cantidad de movimiento entre los diversos cuerpos. Además de la fotografía de la figura 4-2 en donde puede verse un choque entre

TABLA 4-1

<i>Antes del choque</i>		<i>Después del choque</i>	
<i>m/s</i>	<i>kg.m/s</i>	<i>m/s</i>	<i>kg.m/s</i>
$v_{ax} = 0,79$	$p_{ax} = 1,58$	$v'_{ax} = -0,28$	$p'_{ax} = -0,56$
$v_{bx} = -0,64$	$p_{bx} = -0,96$	$v'_{bx} = 0,78$	$p'_{bx} = 1,17$
	$p_x = 0,62$		$p'_x = 0,61$
$v_{ay} = 0,60$	$p_{ay} = 1,20$	$v'_{ay} = 0,55$	$p'_{ay} = 1,10$
$v_{by} = 0,57$	$p_{by} = 0,85$	$v'_{by} = 0,62$	$p'_{by} = 0,93$
	$p_y = 2,0(5)$		$p'_y = 2,0(3)$

dos discos, se muestra el diagrama vectorial de las cantidades de movimiento del mismo experimento.

**EJEMPLO.** Una partícula de masa  $m_a = 10$  g recorre el semieje positivo de las  $x$  con una velocidad  $v_a = 20$  cm/s. Choca con una partícula de masa  $m_b = 20$  g que se mueve con una velocidad  $v_b = 50$  cm/s en una dirección que forma un ángulo de  $53^\circ$  con el semieje positivo de las  $x$ , como se indica en la figura 4-3. Después del choque los cuerpos permanecen juntos moviéndose como un solo cuerpo. ¿Cuál es la velocidad de este cuerpo después del choque?

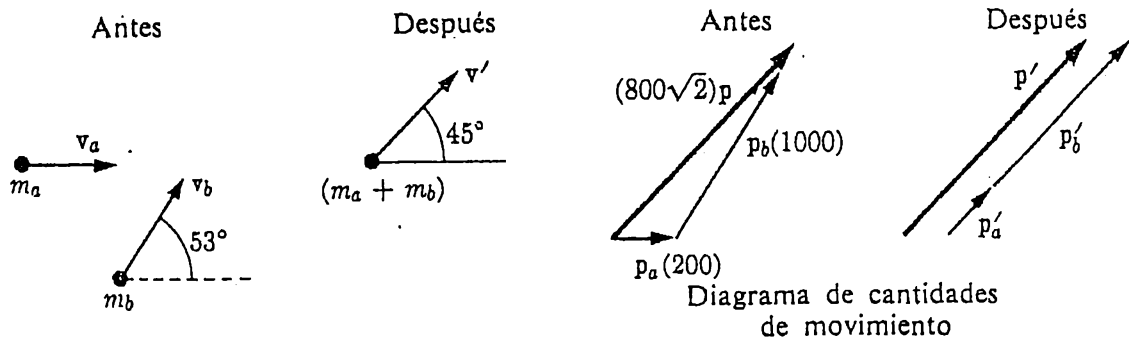


Figura 4-3

Representemos por  $v'$  a la velocidad después del choque. Las componentes de  $v$  son  $v'_x$  y  $v'_y$ . El principio de conservación de la cantidad de movimiento da las siguientes relaciones para la determinación de  $v'_x$  y  $v'_y$ :

$$m_a v_{ax} + m_b v_{bx} = (m_a + m_b) v'_x$$

$$m_a v_{ay} + m_b v_{by} = (m_a + m_b) v'_y$$

o sea

$$v'_x = \frac{m_a v_{ax} + m_b v_{bx}}{m_a + m_b} = \frac{200 + 600}{30} = \frac{80}{3} \text{ cm/s}$$

$$v'_y = \frac{m_a v_{ay} + m_b v_{by}}{m_a + m_b} = \frac{0 + 800}{30} = \frac{80}{3} \text{ cm/s}$$

en las que hemos sustituido  $v_{ax} = 20$ ,  $v_{ay} = 0$ ,  $v_{bx} = 30$ ,  $v_{by} = 40$  cm/s.

Queda claro que la cantidad de movimiento total del sistema es la misma antes y después del choque, siendo su módulo  $800\sqrt{2}$  y formando un ángulo de  $45^\circ$  con el semieje positivo de las  $x$ , mientras que las cantidades de movimiento de uno y otro cuerpo cambian, según puede verse en el diagrama vectorial de la figura 4-3.

*Muchos cuerpos.* Si tenemos un gran número de cuerpos que puedan ejercer interacciones entre sí, la *cantidad de movimiento total* del sistema se *conservará*, igual que en el caso de dos cuerpos. Esto se deduce de los resultados de los anteriores experimentos de choque, cuando no se ejercen interacciones más de dos cuerpos a un tiempo. Más adelante volveremos sobre esta cuestión y estudiaremos el hecho de que la conservación de la cantidad de movimiento es aplicable en condiciones *cualesquiera* a todo sistema aislado de cuerpos, independientemente de cómo y cuando se ejercen las interacciones entre los cuerpos. La cantidad de movimiento pasa de unos cuerpos a otros, pero la total se mantiene siempre la misma durante toda la interacción. Este hecho se ilustra en los ejemplos de movimiento expuestos en la figura 4-4.

En el primero de estos ejemplos, dos discos iguales suspendidos por aire, unidos por un cordón de goma, botan uno contra otro a medida que avanzan.

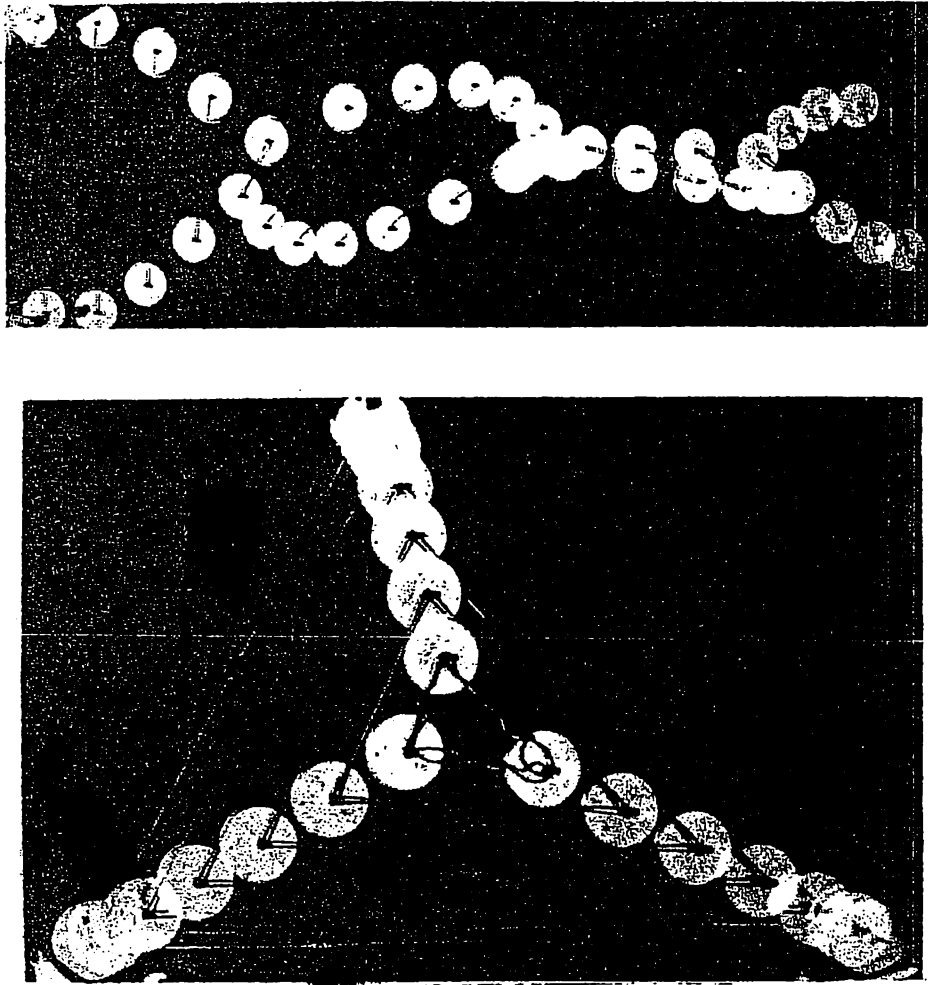


Fig. 4-4. Ejemplos de movimiento de cuerpos en interacción, en los que se pone de manifiesto el principio de conservación de la cantidad de movimiento.

El otro experimento presenta el movimiento de tres discos exactamente iguales conectados por gomitas. En ambos experimentos es constante la cantidad de movimiento total.

*Centro de masa.* La extensión del concepto de centro de masa al movimiento en dos y tres dimensiones, es inmediata. El centro de masa de un cierto número de partículas  $m_a, m_b, m_c, m_d, \dots$ , de coordenadas  $(x_a, y_a, z_a), (x_b, y_b, z_b)$ , etc., se define en la forma

$$\begin{aligned} X &= \frac{m_a x_a + m_b x_b + m_c x_c + \dots}{m_a + m_b + m_c + \dots} & Y &= \frac{m_a y_a + m_b y_b + m_c y_c + \dots}{m_a + m_b + m_c + \dots} \\ Z &= \frac{m_a z_a + m_b z_b + m_c z_c + \dots}{m_a + m_b + m_c + \dots} \end{aligned} \quad (4-4)$$

Si se describen las posiciones de los cuerpos respecto a un origen común me-

diante los vectores  $\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b, \mathbf{r}_c, \dots$ , el vector de posición del centro de masa es

$$\mathbf{R} = \frac{m_a \mathbf{r}_a + m_b \mathbf{r}_b + m_c \mathbf{r}_c + \dots}{m_a + m_b + m_c + \dots} \quad (4-5)$$

y el vector velocidad del centro de masa es

$$\mathbf{V} = \frac{m_a \mathbf{v}_a + m_b \mathbf{v}_b + m_c \mathbf{v}_c + \dots}{m_a + m_b + m_c + \dots} = \frac{\mathbf{p}}{M}$$

es decir

$$M\mathbf{V} = \mathbf{p} = \mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b + \mathbf{p}_c + \dots \quad (4-6)$$

donde  $\mathbf{p}$  es la cantidad de movimiento total del sistema y  $M$  es la masa total. En otras palabras, cuando *es constante* la cantidad de movimiento total de un sistema de partículas, se deduce que el centro de masa del sistema se mueve con *velocidad constante*, independientemente de lo complicado que sea el movimiento de cada una de las partículas.

Es interesante aplicar el concepto anterior al movimiento del centro de masa de un *cuerpo rígido*. Podemos considerar que un cuerpo rígido es un sistema de partículas que mantienen constantes sus distancias recíprocas. Cuando un cuerpo rígido tiene un movimiento de traslación pura, es decir, cuando todas las partículas del cuerpo describen trayectorias paralelas, podemos seleccionar el movimiento de un punto cualquiera del cuerpo (no necesariamente el centro de masa) para describir el movimiento de traslación del cuerpo en conjunto. Sin embargo, el movimiento en general de un cuerpo rígido lleva consigo tanto rotación como traslación. En la figura 4-5 puede verse el movimiento de un cuerpo rígido y aun cuando los distintos puntos del cuerpo tienen velocidades diferentes y variables, podemos ver que la velocidad  $\mathbf{V}$  del centro de masa es constante. La cantidad de movimiento total del cuerpo es

$$\mathbf{p} = M\mathbf{V}$$

donde  $M$  es la masa total del cuerpo rígido.

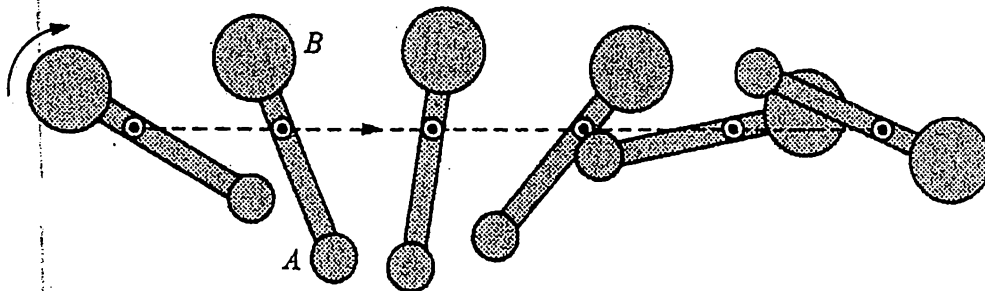


Fig. 4-5. Reproducido de una fotografía de destellos. El movimiento general de un cuerpo rígido lleva consigo tanto traslación como rotación. La línea de trazos señala la trayectoria del centro de masa.

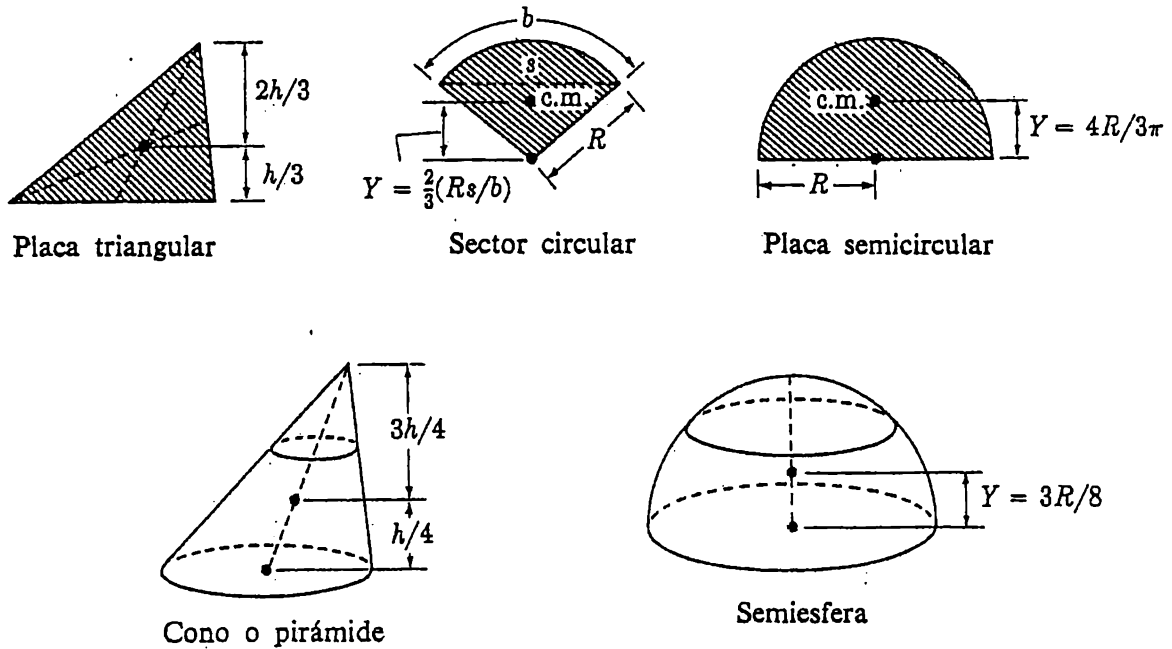


Fig. 4-6. Centros de masa de algunos cuerpos de formas familiares.

*Centro de masa de algunos cuerpos.* En muchos cuerpos, tales como la barra recta uniforme, la esfera, el cilindro de revolución, etc., el centro de masa se puede obtener directamente a causa de la simetría. En otros cuerpos, la situación del centro de masa no es tan evidente, pero puede determinarse con la precisión que se desee dividiendo el cuerpo en pequeñas porciones de masas conocidas. La ecuación (4-4) permite entonces obtener la posición del centro de masa. en algunos casos, el centro de masa puede localizarse con toda exactitud, utilizando la operación matemática de la integración. Sin embargo, por ahora sólo nos ocuparemos de cuerpos en los que podamos hallar el centro de masa directamente a partir de la simetría o subdividiendo adecuadamente el cuerpo en porciones simples. En la figura 4-6 pueden verse las posiciones de los centros de masa de algunos cuerpos

**EJEMPLO.** *Centro de masa de una placa triangular homogénea.* Haciendo uso de la Geometría plana, consideremos el problema de hallar el centro de masa de una placa triangular homogénea de vértices  $ABC$ , como la representada en la figura 4-7. Si dividimos la placa en barras paralelas al lado  $AB$ , el centro de masa (c.m.) de cada barra se hallará en su punto medio, y en consecuencia el centro de masa de la placa deberá hallarse sobre la recta que une los puntos medios de las barras; es decir, deberá hallarse sobre la mediana  $CP_1$ . Análogamente, el centro de masa deberá hallarse sobre la mediana  $AP_2$  y, por tanto, deberá ser la intersección  $O$  de  $CP_1$  y  $AP_2$ . Tracemos ahora una recta paralela a  $CB$  que pase por  $O$ , la cual cortará a  $AC$  en  $P_3$ . Tracemos una recta paralela a  $AB$  que pase por  $P_3P_4$ . Obtenemos entonces tres triángulos igual

les (sombreados en la fig. 4-7) que dividen a  $CP_1$  en tres partes iguales, una de las cuales es  $OP_1$ . Por tanto, el centro de masa de la placa triangular se halla sobre la mediana (de longitud  $d$ ) a una distancia  $2d/3$  del vértice. (¿Por qué son iguales los triángulos? Obsérvese que  $CP_1$  corta a  $P_3P_4$  en su punto medio y lo mismo hace  $AP_2$  con  $P_3O$ .)

EJEMPLO. Hallar la situación del centro de masa de la placa homogénea de la figura 4-8. Sea  $m_1$  la masa de la placa y  $X_1$  la coordenada del centro de masa. Dividamos la placa en tres porciones triangulares, según se indica, cada una de masa  $m_1/3$ . Como sus centros de masa se hallan situados a las distancias  $h$ ,  $h$  y  $h/3$  del borde izquierdo de la placa, obtenemos

$$m_1 X_1 = \frac{m_1}{3} h + \frac{m_1}{3} h + \frac{m_1}{3} \frac{h}{3}$$

lo cual da

$$X_1 = \frac{7}{9} h.$$

*Choques entre cuerpos rígidos extensos.* Cuando chocan dos cuerpos rígidos de formas arbitrarias, suelen girar al mismo tiempo que se trasladan. El choque puede, por tanto, ser complicado en sus detalles, pero la conservación de la cantidad de movimiento sigue cumpliéndose, puesto que los dos cuerpos tomados en conjunto constituyen un conjunto aislado de partículas para el cual se conserva la cantidad de movimiento. En otras palabras, la velocidad combinada del centro de masa de ambos cuerpos no se altera a causa del choque y la cantidad de movimiento que pierde un cuerpo rígido, la gana el otro. Aunque, a causa del choque, aparece frecuentemente movimiento de rotación de los cuerpos, el movimiento de traslación del sistema está regido por el principio de conservación de la cantidad de movimiento, y *el centro de masa del sistema total se mueve con*

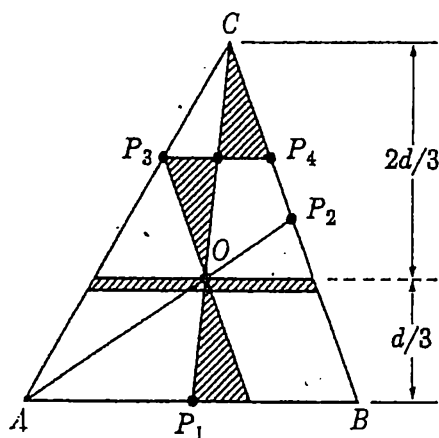


Fig. 4-7. Centro de masa de una placa triangular.

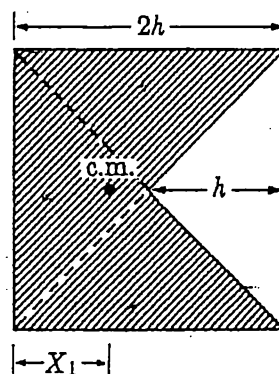


Figura 4 - 8.

velocidad constante a lo largo de la misma recta. Más adelante, cuando hayamos estudiado la rotación de los cuerpos, estaremos en condiciones de formular otro principio de conservación relacionado con la «rotación total» de un sistema.

*Choque perfectamente elásticos y totalmente inelásticos.* Análogamente a como hicimos en el caso unidimensional, definimos un choque perfectamente elástico como aquél en que las magnitudes de las velocidades relativas de los cuerpos  $A$  y  $B$  en colisión son iguales antes y después del choque, es decir,

$$|v_a - v_b| = |v'_a - v'_b|$$

Análogamente, un choque totalmente inelástico es aquél en el que la velocidad relativa después del choque es nula.

**4-2 La fuerza es un vector.** La cantidad de movimiento cedida a un cuerpo que se mueve en un plano o en el espacio no suele tener la misma dirección que la cantidad de movimiento del cuerpo. Representemos por  $p_1$  y  $p_2$  las cantidades de movimiento del cuerpo antes y después de la cesión, respectivamente. La cantidad de movimiento cedida está representada por el vector

$$\Delta p = p_2 - p_1$$

representado en la figura 4-9.

Si la cesión se realiza en un tiempo  $\Delta t$  la variación media en unidad de tiempo de la cantidad de movimiento es  $\Delta p / \Delta t$ . Luego la fuerza media

$$\bar{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \quad (4-7)$$

será un vector de igual dirección y sentido que la cantidad de movimiento cedida  $\Delta p$ . El vector  $\Delta p$  tiene las componentes  $\Delta p_x$ ,  $\Delta p_y$  y  $\Delta p_z$ , y análogamente, el vector fuerza media tendrá las componentes

$$\bar{F}_x = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} \quad \bar{F}_y = \frac{\Delta p_y}{\Delta t} \quad \bar{F}_z = \frac{\Delta p_z}{\Delta t} \quad (4-8)$$

**EJEMPLO.** Un cuerpo de masa  $m = 10$  kg desliza sobre una superficie lisa de hielo con velocidad constante. Las componentes de la velocidad son  $v_x = 3$  m/s y  $v_y = 2$  m/s. Una ráfaga de viento cede al cuerpo una cantidad de movimiento tal que después de la ráfaga las componentes de la velocidad son  $v_x = -1$  m/s y  $v_y = 4$  m/s. Si la ráfaga duró 2 s, ¿cuáles fueron la magnitud y dirección de la fuerza media que actuó sobre el cuerpo durante la ráfaga?

Antes de la ráfaga las componentes de la cantidad de movimiento eran  $p_{1x} =$

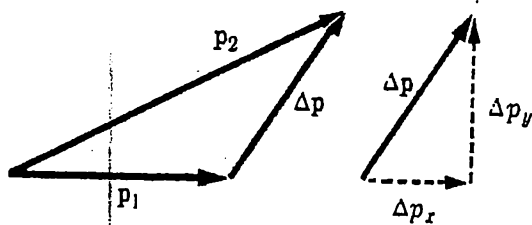


Fig. 4-9. La cantidad de movimiento cedida a un cuerpo no suele tener la dirección del movimiento.

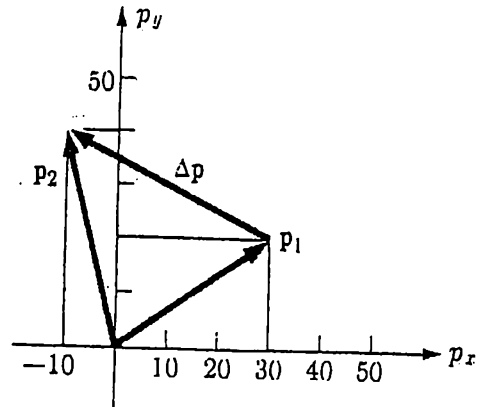


Fig. 4-10. Ejemplo de una cesión de cantidad de movimiento.

30 kg·m/s y  $p_{1y} = 20$  kg·m/s, y después de la ráfaga eran  $p_{2x} = -10$  kg·m/s y  $p_{2y} = 40$  kg·m/s. La cantidad de movimiento cedida tiene las componentes

$$\Delta p_x = -10 - 30 = -40 \text{ kg·m/s}$$

y

$$\Delta p_y = 40 - 20 = 20 \text{ kg·m/s}$$

Las componentes de la fuerza media son, pues,

$$\bar{F}_x = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = -\frac{40}{2} = -20 \text{ N} \quad \text{y} \quad \bar{F}_y = \frac{20}{2} = 10 \text{ N}$$

y el módulo del vector fuerza es  $|\bar{F}| = \sqrt{20^2 + 10^2} = 10\sqrt{5} \text{ N}$  dirigido en una dirección dada por  $\text{tg } \theta = +10/-20 = -1/2$ , indicada en la figura 4-10.

Los valores instantáneos de las componentes de la fuerza se definen como los valores límites de  $\Delta p_x/\Delta t$ , etc., cuando  $\Delta t = 0$ . Tenemos entonces

$$F_x = \frac{dp_x}{dt} \quad F_y = \frac{dp_y}{dt} \quad F_z = \frac{dp_z}{dt} \quad (4-9)$$

que definen el vector fuerza instantánea

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (4-10)$$

Si restringimos nuestro estudio al movimiento en un plano, la magnitud de la fuerza en función de sus componentes es

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(dp_x/dt)^2 + (dp_y/dt)^2} \quad (4-11)$$



y la dirección de la fuerza viene dada por

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{dp_y/dt}{dp_x/dt} \quad (4-12)$$

donde  $\theta$  es el ángulo que forma el vector fuerza con el eje de las  $x$ . Si la masa es constante, la dirección del vector fuerza es la misma que la del vector aceleración, que tiene las componentes  $dv_x/dt$  y  $dv_y/dt$ . Está claro que, en general, la dirección del vector aceleración o del vector fuerza, *no es la misma* que la del vector velocidad, ya que el cociente  $v_y/v_x$ , que define la dirección del vector velocidad, suele ser diferente de  $(dv_y/dt)/(dv_x/dt)$ .

**4-3 Análisis de un experimento.\*** Consideremos el movimiento de un cuerpo que desliza sobre un plano, como el de la fotografía de destello múltiple de la figura 4-11. El cuerpo, un disco suspendido por aire, está unido a un cordón de goma fijo por un extremo. El diámetro de 10 cm del disco (masa  $m = 1,5$  kg) establece la escala de longitudes en la figura.

Describiremos el movimiento del disco en función de las coordenadas  $x$  e  $y$ . Nuestro problema es obtener los vectores velocidad y fuerza como funciones del tiempo. En el instante (arbitrariamente elegido)  $t = 0$  la coordenada  $x$  es positiva y el disco se está moviendo en el sentido positivo de las  $x$ , hasta que

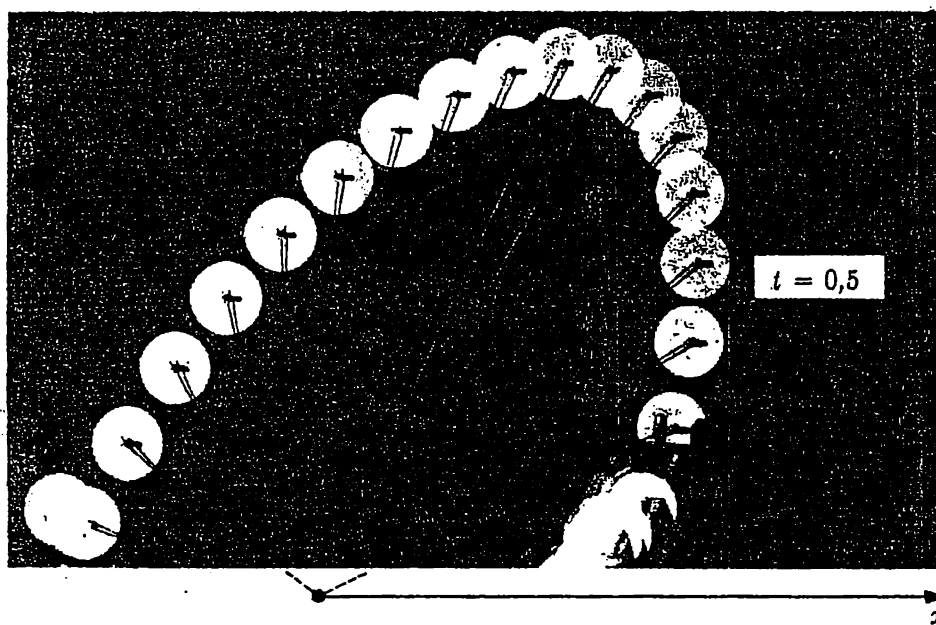


Fig. 4-11. Disco suspendido por aire situado al extremo de un cordón de goma. El tiempo transcurrido entre destellos consecutivos es  $\Delta t = 0,1$  s.

\* Puede suprimirse todo este apartado sin que se pierda la continuidad.

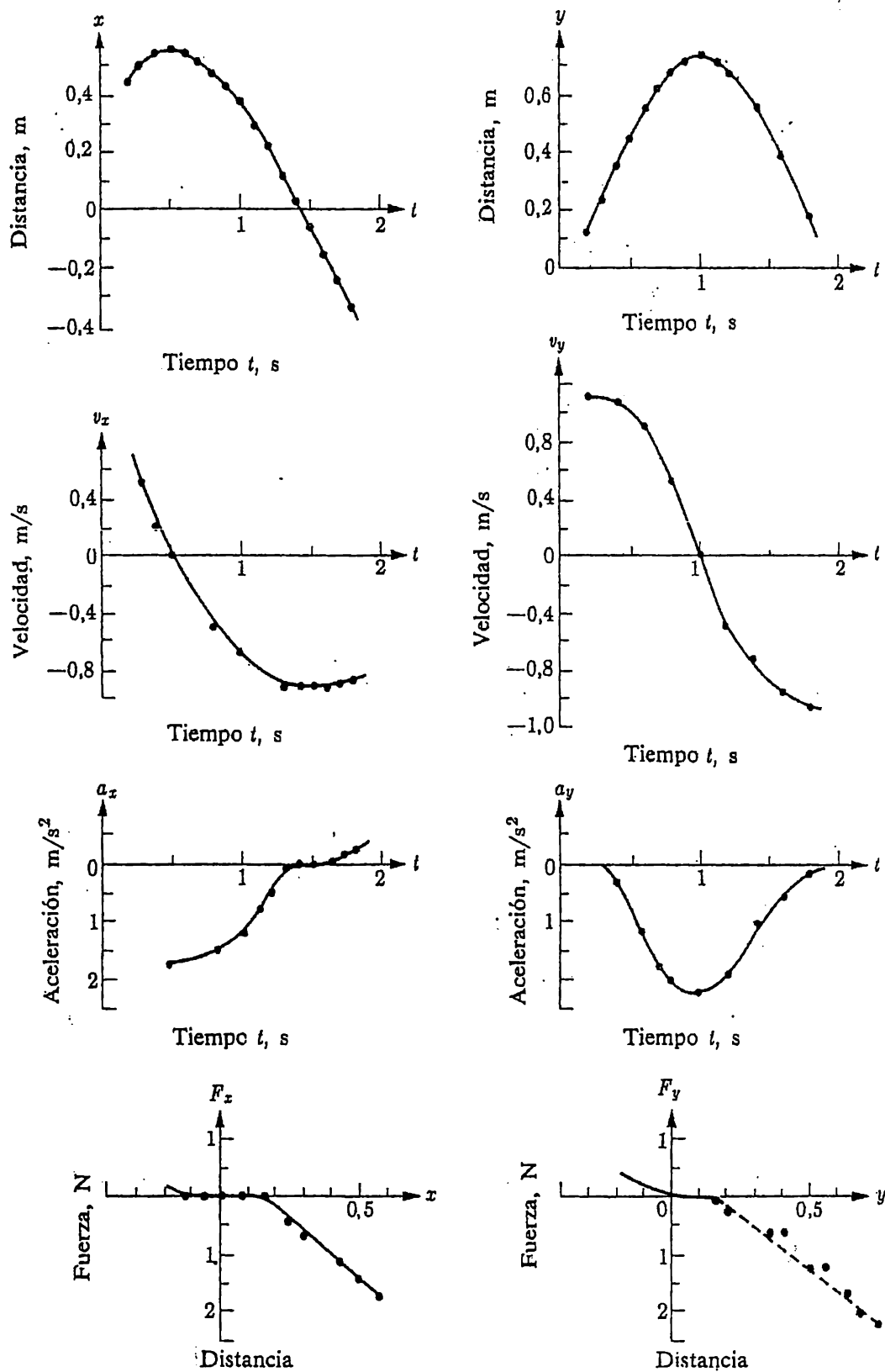


Fig. 4-12. Análisis del movimiento de la figura 4-11.

en  $t \simeq 0.5$  empieza a ir en el sentido negativo. Cuando  $t \simeq 1.4$ , el disco pasa por  $x = 0$ . La coordenada  $y$  se mantiene positiva durante el movimiento indicado en la figura. En el primer grupo de gráficas de la figura 4-12 se han representado las coordenadas  $x$  e  $y$  en función del tiempo.

Midiendo la pendiente de la gráfica de  $x$  en función de  $t$ , obtenemos la componente  $v_x$ , de la velocidad, y de la pendiente de la gráfica de  $v_x$  en función de  $t$  se obtiene la componente  $a_x$  de la aceleración. Análogamente hallaremos  $v_y$  y  $a_y$ ; a continuación se determinan las componentes  $F_x = ma_x$  y  $F_y = ma_y$ , de la fuerza, en función del tiempo. Resulta interesante representar gráficamente las componentes de la fuerza en función de las coordenadas  $x$  e  $y$ . Aun cuando en este procedimiento gráfico la precisión no es muy elevada, encontramos que la fuerza es esencialmente nula hasta que la longitud de la goma excede de su longitud natural en ausencia de deformación. A partir de esta longitud, la fuerza parece ser al menos, aproximadamente, proporcional al incremento de longitud que sufre la goma.

La celeridad se obtiene de  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ , y el ángulo que forma el vector velocidad con el semieje positivo de las  $x$  es  $\theta = \arctg(v_y/v_x)$ . Por ejemplo, en el instante  $t = 0.8$  s, tenemos  $v_x \simeq -0.47$  m/s y  $v_y \simeq +0.50$  m/s y la magnitud de la velocidad es  $v = \sqrt{0.47^2 + 0.50^2} \simeq 0.68$  m/s. El ángulo que forma con el semieje positivo de la  $x$  es  $\theta \simeq 90^\circ + 43^\circ$ .

Determinemos, también, la magnitud y dirección de la fuerza que se ejerce sobre el cuerpo en el instante  $t = 0.8$  s. De las gráficas de las componentes de la aceleración, de la figura 4-12, obtenemos  $a_x \simeq -1.5$  m/s<sup>2</sup> y  $a_y \simeq -2$  m/s<sup>2</sup>, con las correspondientes componentes de la fuerza  $F_x \simeq -2.25$  N y  $F_y \simeq -3$  N. La magnitud de la fuerza es, pues,  $F \simeq \sqrt{3^2 + 2.25^2} \simeq 3.7$  N y su dirección viene dada por  $\theta \simeq \arctg(-2/-1.5)$ , es decir  $\theta \simeq +180^\circ + 53^\circ$ . Como era de esperar, la fuerza está dirigida hacia el punto  $O$ , a lo largo del cordón de goma, como se indica en la figura 4-13.

En lugar de trabajar con las componentes  $x$ ,  $y$ ,  $v_x$ ,  $v_y$ , etc., podemos determinar los vectores velocidad y fuerza de manera más directa. En primer lugar, observemos que la dirección de la velocidad es siempre la de la tangente a la trayectoria del cuerpo. La magnitud de la velocidad media en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  se halla midiendo el desplazamiento  $\Delta s$  del cuerpo en dicho tiempo, como se ilustra en la figura 4-13. La velocidad media es, pues,

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Por ejemplo, entre  $t = 0.8$  s y  $0.9$  s, obtenemos por medida directa  $\Delta s \simeq 0.065$  m y  $\bar{v} = 0.65$  m/s. Análogamente, la velocidad media entre  $t = 0.7$  y  $0.8$  s es  $\bar{v} = 0.70$  m/s. Así, para dar un valor aproximado de la magnitud de la velocidad

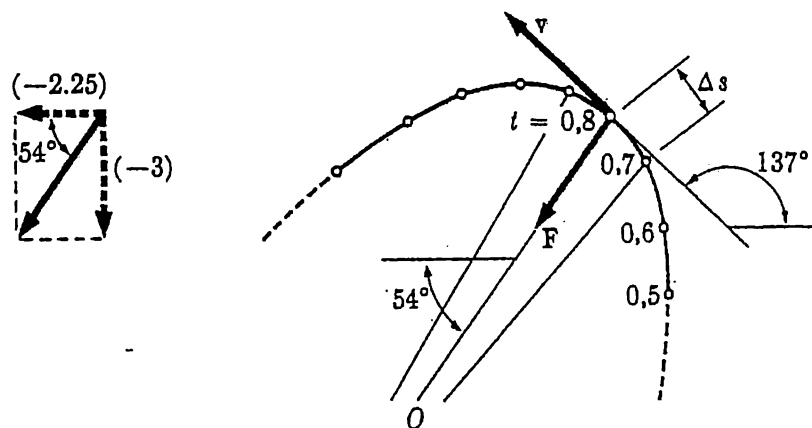


Fig. 4-13. El vector velocidad es tangente a la trayectoria y su módulo es  $v = ds/dt$ .

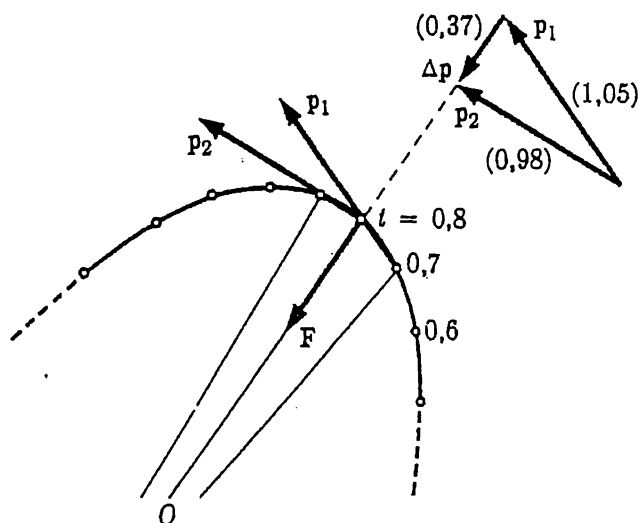


Fig. 4-14. La fuerza no sólo puede determinarse a partir de  $a_x$  y  $a_y$ , sino también directamente por medida de  $\Delta p$ .

instantánea en  $t = 0,8$  s, podemos tomar el valor medio de estos dos valores, o sea  $\bar{v} = 0,68$  m/s. La tangente a la trayectoria en  $t = 0,8$  s resulta formar un ángulo de  $90^\circ + 47^\circ = 137^\circ$  con el semieje positivo de las  $x$ , como antes.

Análogamente, la magnitud y dirección de  $F$  se hallan a partir de medidas directas de los vectores velocidad (o cantidad de movimiento). En primer lugar, tracemos los vectores cantidad de movimiento media en los intervalos de tiempo comprendidos entre  $t = 0,7$  y  $0,8$  s y entre  $t = 0,8$  y  $0,9$  s. En la figura 4-14 se han representado estos vectores, trazados directamente sobre la trayectoria del cuerpo; y también en un diagrama vectorial aparte en el cual puede verse la diferencia  $\Delta p$  entre los vectores  $p_1$  y  $p_2$ . Las magnitudes de los diferentes vectores

se obtienen a partir de las velocidades correspondientes como se halló anteriormente, es decir,  $p_1 = mv_1 = 1,5 \cdot 0,7 \simeq 1,05 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  y  $p_2 = 1,5 \cdot 0,65 \simeq 0,98 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ . La longitud del vector  $\Delta p$  medida sobre el diagrama, es  $0,37 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$

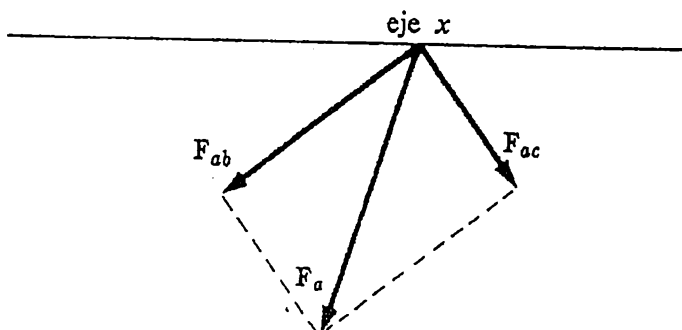
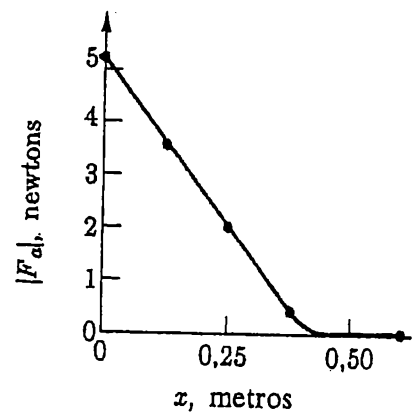
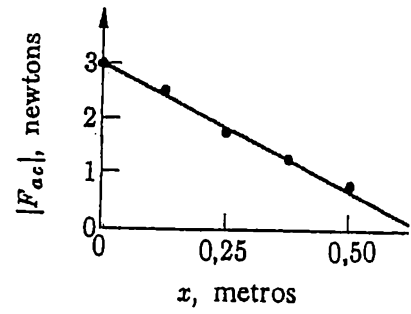
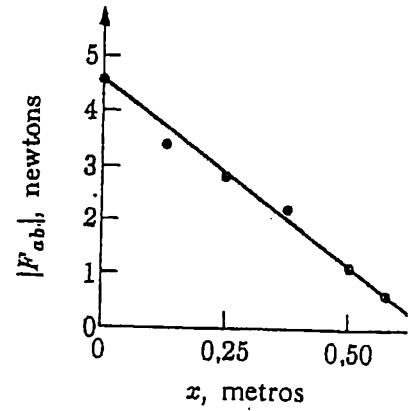
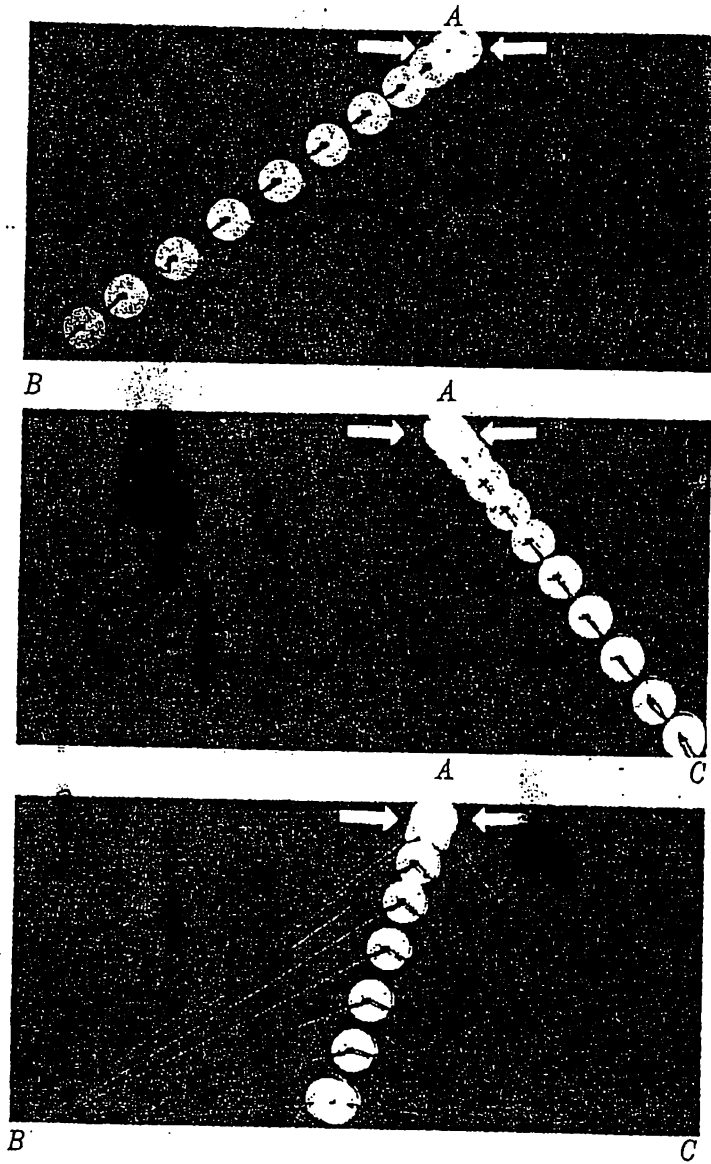


Fig. 4-15. Experimento de superposición de fuerzas en un plano.

y la dirección de  $\Delta p$  es la del cordón de goma. Como  $\Delta p$  es la cantidad de movimiento cedida al cuerpo en un intervalo de tiempo  $\Delta t = 0,1$  s centrado alrededor del instante  $t = 0,8$  s, la fuerza media en este intervalo es  $|\Delta p / \Delta t| \simeq 3,7$  N. En nuestra construcción vemos que la magnitud de la fuerza es compatible con  $\bar{F} = 3,7$  N y su dirección es la del cordón de goma y su sentido es hacia  $O$ , como antes.

**4-4 Principio de superposición.** Los experimentos con movimientos unidimensionales indicaban que se podía superponer las fuerzas; vamos ahora a estudiar experimentalmente si puede extenderse este principio al movimiento en dos o tres dimensiones. En la figura 4-15 tenemos un disco  $A$  suspendido por aire sometido a la acción de un cordón de goma unido a un punto fijo  $B$ . El movimiento de  $A$  puede considerarse como el resultado de la interacción entre  $A$  y  $B$ . Analizaremos el movimiento representado gráficamente la posición, velocidad y aceleración en función del tiempo y de la posición y obtendremos el valor de la fuerza  $F_{ab}$  en función de la distancia de  $A$  a su posición inicial. Encontramos que la magnitud de la fuerza en la posición inicial es  $F_{ab} \simeq 4,4$  N y que la fuerza  $F_{ab}$  forma un ángulo de  $143^\circ$  con el sentido positivo del eje  $x$ .

A continuación, dejaremos que  $A$  interactúe con  $C$  por medio de un cordón de goma análogo. El análisis del movimiento resultante de  $A$  da una fuerza inicial de magnitud  $F_{ac} \simeq 3$  N que forma un ángulo de  $50^\circ$  con el sentido positivo de las  $x$ . Por último, dejamos que  $A$  interactúe con  $B$  y  $C$  al mismo tiempo y encontramos que la fuerza inicial forma un ángulo de  $108^\circ$  con el sentido positivo del eje  $x$ . Aun cuando la precisión en un experimento y análisis de este tipo no sea extraordinaria, el resultado indica tajantemente que sigue siendo aplicable el principio de superposición de las fuerzas. Es decir, el efecto de dos fuerzas de interacción es el mismo que el de una fuerza única que sea la *suma vectorial de las dos fuerzas*. Así, tanto si tratamos un movimiento en una o dos dimensiones, la *superposición de fuerzas* puede expresarse como suma vectorial:

$$\mathbf{F}_a = \mathbf{F}_{ab} + \mathbf{F}_{ac} \quad (4-13)$$

Se deduce la extensión de este resultado a más de dos fuerzas aplicando repetidamente la ecuación (4-13), y el movimiento de una partícula sometida a la acción de varias fuerzas  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots$ , queda determinado por

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots = \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{F} \quad (4-14)$$

donde  $\mathbf{F}$  es la suma vectorial de las fuerzas y  $\sum$  simboliza la suma extendida a los valores de  $i = 1, 2, 3, \dots$  (Para un ulterior estudio, véase el cap. 3.)

EJEMPLO. Dos resortes  $S_1$  y  $S_2$  de longitudes iguales  $L = 0,5$  m pero de constantes diferentes  $K_1 = 50$  N/m y  $K_2 = 100$  N/m, se unen y fijan entre dos soportes  $A$  y  $B$  separados una distancia  $2L$ , según se indica en la figura 4-16. A la unión de los resortes se fija un cuerpo  $C$  de masa  $m = 2,5$  kg y se tira de él verticalmente hacia abajo hasta duplicar la longitud de los resortes. Se suelta entonces al cuerpo. ¿Cuál es su aceleración inicial?

Describiremos la aceleración en función de sus componentes  $x$  horizontal e  $y$  vertical. El cuerpo  $C$  se halla sometido a tres fuerzas, el peso  $mg$  y las dos fuerzas de los resortes, las cuales tienen por magnitudes  $F_1 = K_1(2L - L) = K_1L$  y  $F_2 = K_2L$ . Proyectamos entonces las fuerzas sobre las direcciones  $x$  e  $y$ , respectivamente, y obtenemos

$$ma_x = K_2L \sin 30^\circ - K_1L \sin 30^\circ = \frac{K_2 - K_1}{2} L$$

$$ma_y = (K_2 + K_1)L \cos 30^\circ - mg = \frac{(K_2 + K_1)L \cdot \sqrt{3}}{2} - mg$$

Es decir,

$$a_x = \frac{K_2 - K_1}{2m} L = \frac{50 \cdot 0,5}{2 \cdot 2,5} = 5 \text{ m/s}^2$$

$$a_y = \frac{(K_1 + K_2)L \cdot \sqrt{3}}{2m} - g \simeq 2,2 \text{ m/s}^2$$

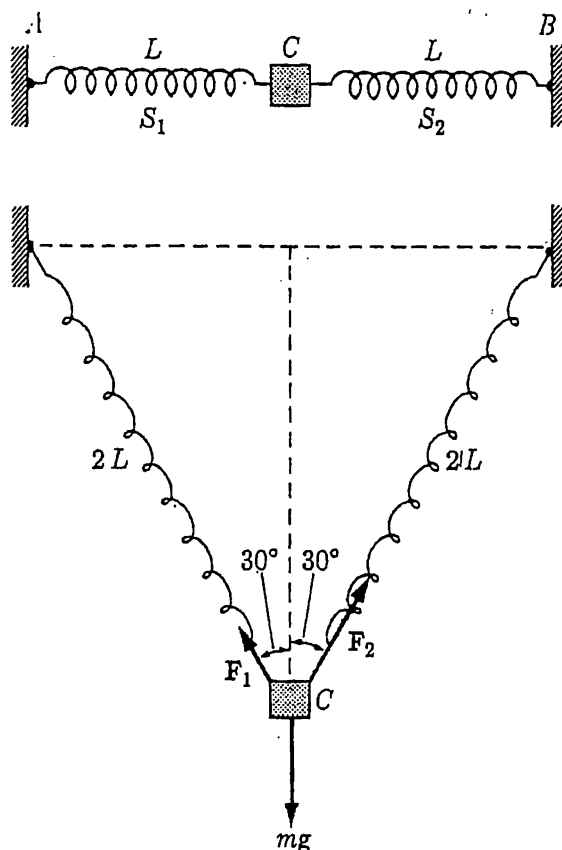


Figura 4-16

## 4-5 Movimiento del centro de masa. Las relaciones

$$M \frac{dV}{dt} = \sum F_i = F \quad (4-15)$$

o sea

$$M \frac{dV_x}{dt} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \dots = F_x$$

$$M \frac{dV_y}{dt} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \dots = F_y$$

determinan el movimiento del centro de masa de un sistema de partículas o de un cuerpo rígido, bajo la influencia de un cierto número de fuerzas exteriores que tienen direcciones diferentes y diferentes puntos de aplicación. Esto resulta de razonamientos totalmente análogos a los presentados en el capítulo 3 al tratar del movimiento unidimensional. La suma vectorial de todas las fuerzas interiores que se ejercen entre sí las partículas del sistema es nula y solamente las fuerzas exteriores serán capaces de originar una cesión de cantidad de movimiento al sistema, con la variación correspondiente de la velocidad del centro de masa. Es importante observar que si bien los detalles del movimiento de un sistema de partículas o de un cuerpo rígido dependen de los puntos de aplicación de las fuerzas exteriores, el movimiento del centro de masa *sólo* depende de la suma vectorial de las fuerzas.

**EJEMPLO.** Una haltera asimétrica consta de dos bolas,  $w_1 = 1$  kg y  $w_2 = 3$  kg, unidas por una barra de masa despreciable y tal que mantenga entre los centros de las bolas una separación de 0,50 m. La haltera se halla en reposo sobre una mesa exenta de rozamiento; en el instante  $t = 0$  se aplican dos fuerzas horizontales de 16 N y 20 N, tal como se indica en la figura 4-17. El eje de la haltera se halla dirigido inicialmente según el eje  $x$ , hallándose en el origen el peso menor. Las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  se mantienen constantes en magnitud y dirección independientemente del movimiento de la haltera. ¿Cuáles son las coordenadas del centro de masa de la haltera al cabo de 3 s?

El centro de masa del cuerpo está situado a una distancia de  $[1/(1+3)] \cdot 0,5 = 0,125$  m del cuerpo de 3 kg. Inicialmente, pues, las coordenadas del centro de masa son  $X_0 = 0,375$ ,  $Y_0 = 0$ .

El movimiento del centro de masa está regido por

$$M \frac{dV_x}{dt} = F_x, \quad M \frac{dV_y}{dt} = F_y$$

donde  $F_x$  y  $F_y$  son las componentes de la fuerza exterior, y  $V_x$  y  $V_y$  son las componentes de la velocidad del centro de masa. Como  $M = 4$  kg,  $F_x = 16$  N y  $F_y = 20$  N, obtenemos las relaciones

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{16}{4} = 4$$

$$\frac{dV_y}{dt} = \frac{20}{4} = 5$$



Éstas dan a su vez  $dX/dt = V_x = 4t$  y  $dY/dt = V_y = 5t$ , ya que la velocidad es nula en  $t = 0$ . Análogamente, pueden obtenerse las coordenadas del centro de masa:

$$X - X_0 = 4 \frac{t^2}{2} = 2t^2 \qquad Y - Y_0 = 5 \frac{t^2}{2}$$

Con  $t = 3$ ,  $Y_0 = 0$ , y  $X_0 = 0,375$ , las coordenadas del centro de masa serán  $X = 18 + 0,375 = 18,375$  m e  $Y = 22,5$  m.

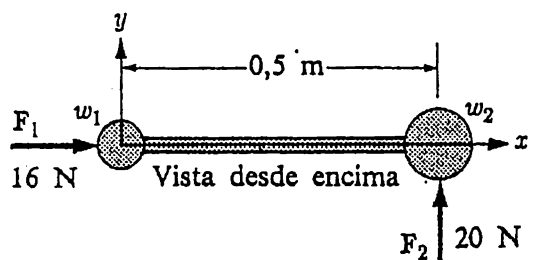


Figura 4-17

Otra manera de resolver este problema sería considerar la fuerza resultante de 25,6 N que forma un ángulo de  $51^\circ 20'$  con el sentido positivo del eje  $x$ . Al cabo de  $t$  segundos, el centro de masa se hallará a una distancia de  $1/2 \cdot 25,6/4 \cdot t^2$  de la posición inicial. Si multiplicamos esta expresión por  $\cos 51^\circ 20'$  y  $\sin 51^\circ 20'$ , obtenemos  $X - X_0 = 2 t^2$  e  $Y - Y_0 = 5/2 t^2$ , respectivamente, como antes. Así pues, el centro de masa se mueve a lo largo de una recta que forma un ángulo de  $51^\circ 20'$  con el semieje positivo de las  $x$ .

Las trayectorias de los cuerpos de 1 kg y 3 kg son más complicadas. Dejamos como ejercicio el estudio, al menos cualitativo, de las características de estos movimientos.

**4-6 Fuerza de contacto.** El origen de la fuerza de contacto se halla en las fuerzas intermoleculares que se ejercen dos cuerpos en contacto. Por tanto, el estudio detallado de la fuerza de contacto requiere el conocimiento de la estructura atómica y no lo emprenderemos aquí. En su lugar, no haremos más que estudiar algunos de los hechos experimentales sobre una base macroscópica y no microscópica. Cuando se coloca un cuerpo sobre una superficie horizontal (véase fig. 4-18), se halla en equilibrio bajo la acción de dos fuerzas: la gravitatoria (peso) y la de contacto. Al igual que el peso total puede considerarse como suma de los pesos de las partes elementales de un cuerpo, pero aplicada al centro de masa, la fuerza de contacto también puede considerarse como resultante de todas las fuerzas de contacto elementales que se hallan distribuidas sobre la superficie de contacto.

En el caso actual, en que el cuerpo descansa sobre una superficie horizontal, la fuerza de contacto resultante pasará por el centro de masa. En cambio, en otros casos esto no será necesariamente cierto. Como la fuerza gravitatoria es vertical,

las condiciones de equilibrio exigen que la fuerza de contacto resultante sea también vertical, si bien las fuerzas de contacto elementales no precisan serlo. La dirección de la fuerza de contacto en un punto determinado de la superficie de contacto depende de la naturaleza de la irregularidad de la superficie en dicho punto pero, en este caso, la componente horizontal de la resultante de todas las fuerzas elementales es nula.

*Rozamiento.* Aun cuando en el ejemplo anterior las componentes de las fuerzas elementales de contacto en la dirección del plano de contacto dan suma nula, ello no ocurre siempre, según deducimos de nuestra experiencia cotidiana. Si así ocurriera, no podríamos andar sobre una superficie horizontal. Para comprender cómo puede originarse una componente tangencial resultante de la fuerza de contacto, representaremos la superficie de contacto como dos engranajes que encajen uno en otro, según se indica (muy ampliado) en la figura 4-19. Las fuerzas de contacto elementales tienen componentes horizontales, pero cuando sobre el cuerpo se ejerce solamente la fuerza de la gravedad, la fuerza de contacto resultante es vertical.

Si tiramos ahora del cuerpo hacia la izquierda, como se indica en la figura 4-19, las fuerzas de contacto  $C_2$  aumentan su magnitud, mientras las  $C_1$  la disminuyen. La fuerza de contacto resultante tendrá entonces una componente

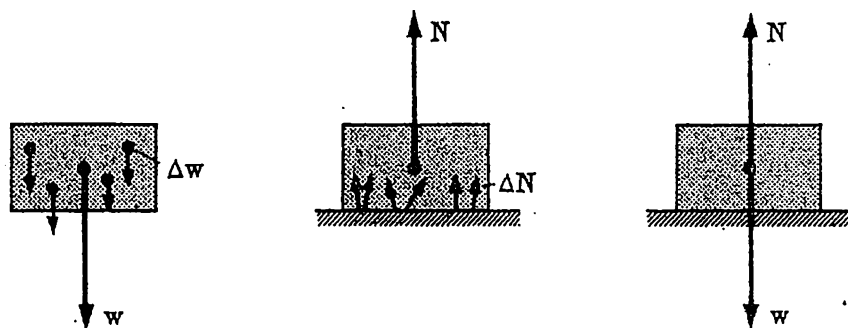


Fig. 4-18. La fuerza de contacto total puede considerarse como resultante de un cierto número de fuerzas de contacto elementales.

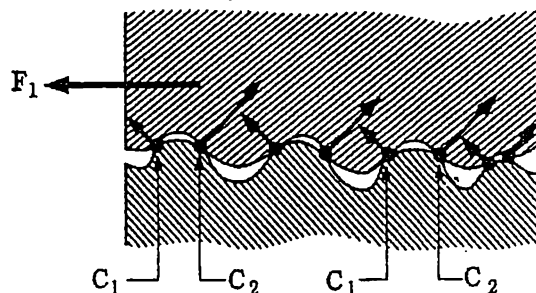


Fig. 4-19. Imagen ampliada de dos superficies en contacto.

horizontal dirigida hacia la derecha a la que se llama *fuerza de rozamiento* sobre el cuerpo. Al ir aumentando continuamente la fuerza exterior  $F_1$  también aumentará la fuerza de rozamiento  $F$  hasta que las fuerzas elementales  $C_2$  no puedan ya soportar al cuerpo y éste empiece a deslizarse. Este deslizamiento puede ser el resultado de que los engranajes deslicen saliéndose unos de otros, o de la ruptura de uno de los dientes de una de las superficies.

El valor máximo de la fuerza de rozamiento, es decir, el valor que existe inmediatamente antes de producirse el deslizamiento, recibe el nombre de *fuerza de rozamiento estático desarrollada totalmente*. De esta imagen sencilla que hemos dado de la fuerza de rozamiento, puede esperarse que al presionar el cuerpo contra el plano horizontal aumente la fuerza de rozamiento desarrollada totalmente.

Para muchas superficies, la fuerza de rozamiento estático desarrollada totalmente (máxima) es aproximadamente proporcional a la componente normal  $N$  de la fuerza de contacto:

$$F = \mu N \quad (4-16)$$

donde la constante de proporcionalidad  $\mu$  recibe el nombre de *coeficiente de rozamiento estático* entre las superficies. Recuérdese que la fuerza de rozamiento de la ecuación (4-16) es el valor *máximo posible*, por lo que cuando la fuerza exterior  $F_1$  crezca a partir de cero, la fuerza de rozamiento crecerá desde cero hasta este valor máximo. Cuando las superficies en contacto se muevan una respecto a otra, las irregularidades no tendrán la oportunidad de encajar muy profundamente una en otra y la fuerza que se precisa para mantener el deslizamiento del cuerpo, llamada *fuerza de rozamiento por deslizamiento*, será menor que la fuerza de rozamiento estático. Este es el caso de la mayoría de las superficies. Al igual que ocurría en el caso de la fuerza de rozamiento estático, la fuerza de rozamiento por deslizamiento para muchos tipos de superficies resulta ser aproximadamente proporcional a la fuerza normal. La constante de proporcionalidad correspondiente recibe el nombre de *coeficiente de rozamiento por deslizamiento* y a veces, *coeficiente de rozamiento cinético*.

El siguiente experimento puede resultar instructivo y ameno, poniendo de manifiesto el rozamiento. Sobre una mesa lisa de madera se apoya un bloque  $A$  de madera pulida que pesa 4 kg (fig. 4-20). Un hilo fijo en  $A$  pasa por una polea y tiene colgado un peso en el otro extremo. Al ir aumentando la fuerza aplicada al hilo, aumentando el peso que soporta, la fuerza de rozamiento del bloque crece hasta alcanzar la fuerza de rozamiento desarrollada totalmente  $F$ . Entonces el bloque empieza a deslizarse. Si la fuerza de rozamiento desarrollada totalmente resulta ser de 1 kp, el coeficiente de rozamiento correspondiente será  $\mu = 1/4 = 0,25$ , ya que la componente normal de la fuerza de contacto es 4 kp.

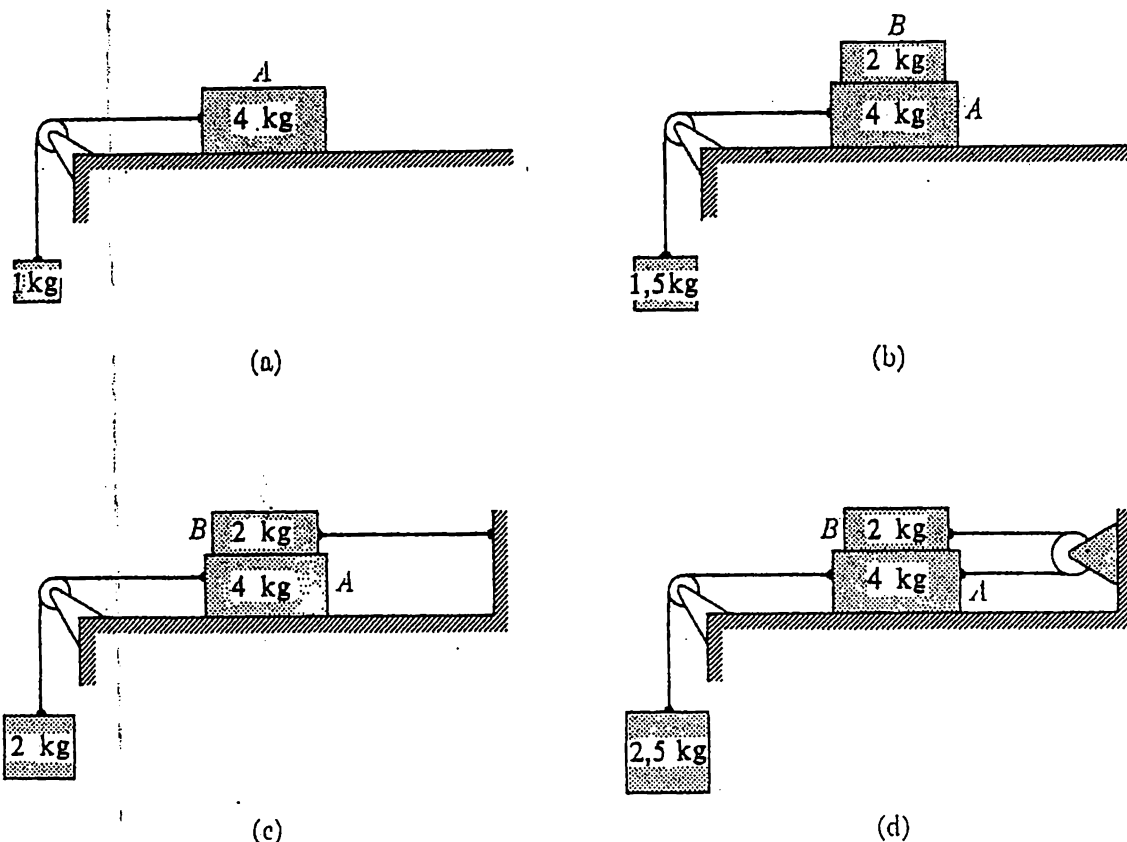


Fig. 4-20. Experimento sobre rozamiento.

A continuación, sobre el bloque  $A$  se coloca otro bloque de madera  $B$  que pesa 2 kg. La componente normal de la fuerza de contacto que la mesa ejerce sobre  $A$  será de 6 kp. La fuerza de rozamiento máxima resulta ser ahora de 1,5 kp, lo cual da  $\mu = 1,5/6 = 0,25$ , lo cual confirma la constancia de  $\mu$ . Se fija ahora el bloque  $B$  mediante un hilo en la forma que se indica en la figura 4-20 (c). Hay ahora dos superficies de contacto y dos fuerzas de rozamiento en  $A$ . La tracción del hilo necesaria para hacer deslizar  $A$  resulta ser ahora de 2 kp, lo cual sigue siendo compatible con  $\mu = 0,25$  si se suponen iguales los coeficientes de rozamiento de los dos pares de superficies de contacto. Por último, se unen los dos bloques mediante un hilo que pasa por una polea en la forma indicada en la parte (d) de la figura. El peso límite resulta ser ahora de 2,5 kp. Dejamos como ejercicio demostrar que estos dos últimos resultados son compatibles con  $\mu = 0,25$  (prob. 4-28).

**EJEMPLO.** Sobre un plano horizontal se apoya un trineo de 80 kg y el coeficiente de rozamiento para este par de superficies en contacto es  $\mu = 0,25$ . Se tira del trineo con una cuerda que forma un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal, como se indica en la figura 4-21. ¿Con qué fuerza hay que tirar de la cuerda para iniciar el deslizamiento del trineo?

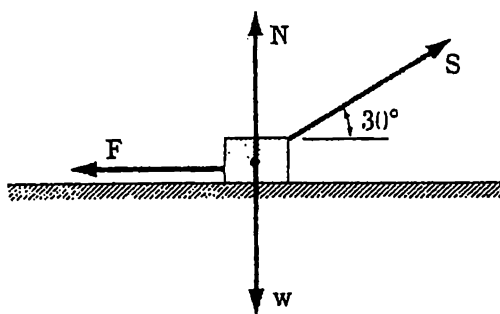


Figura 4-21

Sobre el trineo están aplicadas tres fuerzas: peso, fuerza de contacto aplicada por el plano y la fuerza de la cuerda. La fuerza  $S$  de la cuerda está dirigida, naturalmente, en su dirección. La de contacto sobre el trineo por parte del plano tiene componentes normal ( $N$ ) y tangencial ( $F$ ). En las condiciones límites que nos ocupan, la componente tangencial de la fuerza de contacto, o fuerza de rozamiento estático desarrollada totalmente, es

$$F = \mu N = 0,25N.$$

Sin embargo, hay que tener en cuenta que esta relación *sólo es válida cuando el cuerpo esté a punto de deslizarse*.

Introduzcamos un sistema de coordenadas con el eje  $x$  en el plano y el eje  $y$  normal a él. La suma de las componentes  $x$  de las fuerzas es entonces

$$S \cos 30^\circ - \mu N = 0$$

y la suma de las componentes  $y$  es

$$S \sin 30^\circ - w + N = 0$$

Tenemos ahora dos ecuaciones con dos incógnitas,  $S$  y  $N$ . Eliminando  $N$ , tenemos

$$S \sin 30^\circ - w + \frac{1}{\mu} S \cos 30^\circ = 0$$

o sea

$$S = \frac{w}{\sin 30^\circ + (1/\mu) \cos 30^\circ} = \frac{80}{0,5 + 4 \cdot 0,866} \simeq 20,25 \text{ kp}$$

La componente normal de la fuerza de contacto es, pues,

$$N = \frac{1}{\mu} S \cos 30^\circ = 4 \cdot 20,25 \cdot \sqrt{3}/2 \simeq 70 \text{ kp}$$

## PROBLEMAS

4-1. Dos cuerpos,  $A$  y  $B$ , se mueven en un plano. El cuerpo  $A$  tiene una velocidad de componentes  $v_x = 3$  m/s,  $v_y = 4$  m/s y el cuerpo  $B$  tiene componentes  $v_x = 3$  m/s,  $v_y = 1$  m/s. ¿Cuál es el ángulo que forman las trayectorias de  $A$  y  $B$ , y cuáles son las velocidades de los dos cuerpos?

4-2. Un cuerpo de masa  $m = 10$  kg se mueve con una celeridad de 10 m/s sobre un estanque helado. Una ráfaga de viento hace que el cuerpo cambie su movimiento de manera que, tras la ráfaga, se mueva en una dirección que forme un ángulo de  $30^\circ$  con la dirección inicial y a una velocidad de 12 m/s. Determinar la cantidad de movimiento entregada al cuerpo por la ráfaga.

4-3. Los vectores  $p_a$  y  $p_b$ , de dos cuerpos dan suma nula. ¿Cuál de las siguientes aseveraciones referentes al movimiento de los cuerpos son correctas? (a) Los cuerpos se mueven necesariamente a lo largo de una misma recta. (b) Las trayectorias de los cuerpos son paralelas. (c) Los cuerpos pueden moverse en planos paralelos. (d) Los cuerpos chocarán eventualmente y entrarán en contacto.

4-4. En la figura 4-22,  $P$  es un disco de hockey de 0,16 kg. Se mueve sobre una superficie de hielo, exenta de rozamientos, hacia una pared a una velocidad de 5 m/s. A una distancia de 28,8 m de la pared,  $P$  choca contra un bloque de madera estacionario de 0,09 kg. Cinco segundos después del choque, el bloque alcanza la pared en un punto a 9,6 m de la recta inicial de movimiento del disco. (a) ¿Dónde está el disco 5 s después del choque? (b) Trácese un diagrama de vectores cantidad de movimiento que presente las cantidades de movimiento de los dos cuerpos antes y después del choque.

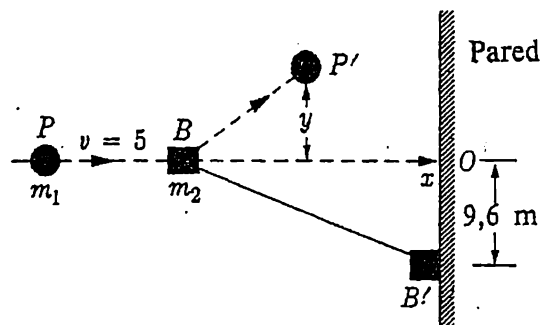


Figura 4-22

4-5. Un cuerpo de 0,5 kg desliza con velocidad constante de 2 m/s sobre una superficie horizontal a lo largo del eje  $x$  en un sistema de coordenadas rectangulares. Cuando el cuerpo pasa por  $x = 3$  m (moviéndose en el sentido positivo de  $x$ ), es alcanzado por una bala disparada desde el punto  $x = 0$ ,  $y = 4$  m. Después del choque, el cuerpo se mueve en una dirección que forma un ángulo de  $30^\circ$  con el eje  $x$ . Antes del choque, la bala iba a 500 m/s. Después del choque queda incrustada en el cuerpo. (a) Ilustrar en un diagrama vectorial de cantidades de movimiento cómo está relacionada la cantidad de movimiento total después del choque con los vectores cantidad de movimiento de cada cuerpo antes del choque. (b) A partir de medidas directas realizadas sobre este diagrama, estimar la masa y la magnitud de la cantidad de movimiento de la bala antes del choque.

4-6. Una piedra  $A$  de masa  $m_a = 1$  kilogramo desliza sobre una superficie lisa de hielo a una velocidad constante de  $v_{ax} = 16$  m/s. Choca con otra piedra  $B$  de masa  $m_b = 4$  kg, inicialmente en reposo. Después del choque,  $A$  se mueve perpendicularmente a su dirección inicial con una velocidad  $v'_{ay} = 12$  m/s. Hallar la magnitud y dirección de la velocidad de  $B$  después del choque.

4-7. Tres cuerpos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , de 1 kg, 1 kg y 2 kg, respectivamente, están unidos por barras de peso despreciable, como se indica en la figura 4-23. El sistema se halla en reposo sobre una mesa horizontal. ( $AB = 1$  m,  $BC = 0,5$  m). (a) ¿Cuáles son las coordenadas del centro de masa? (b) Un cuerpo con una cantidad de movimiento de  $5 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  dirigida en la dirección del eje  $x$  y sentido positivo choca con  $A$  y queda en reposo a consecuencia del choque. ¿Cuál es la velocidad del centro de masa después del choque?

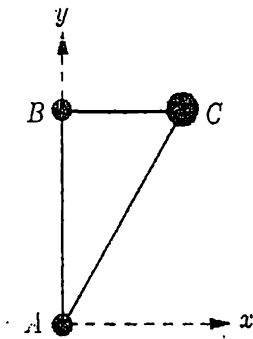


Figura 4-23

4-8. Un cuerpo de masa  $m = 40 \text{ kg}$  se mueve paralelamente al eje  $x$  con velocidad constante  $v = 0,1 \text{ m/s}$  a lo largo de la recta  $y = 2 \text{ m}$ . Cuando llega el cuerpo a  $x = 0$ , se dispara contra el cuerpo un tiro en la dirección  $y$ . Algún tiempo después del tiro, se ve que el cuerpo pasa por la posición  $x = 3 \text{ m}$ ,  $y = 6 \text{ m}$ . (a) Si la masa de la bala es de  $0,02 \text{ kg}$ , ¿cuál es su velocidad? (b) Determinar las velocidades del centro de masa del sistema antes y después del choque.

4-9. ¿Dónde está el centro de masa de una placa homogénea como la indicada en la figura 4-24?

4-10. Una bola de  $100 \text{ g}$  rueda sobre una superficie horizontal a una velocidad de  $0,5 \text{ m/s}$  y choca contra una superficie vertical según un ángulo de  $30^\circ$  con la

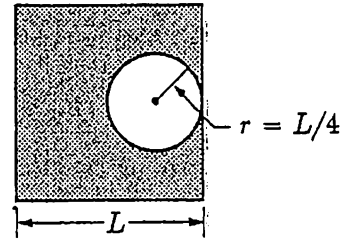


Figura 4-24

pared. Rebota con una celeridad de  $0,4 \text{ m/s}$  según un ángulo de  $37^\circ$  con la pared. Supóngase que la bola y la pared están en contacto durante un tiempo de  $0,01 \text{ s}$ . Hallar la fuerza media de contacto que durante este tiempo ha ejercido la pared sobre la bola.

4-11. En la figura 4-25 se han representado gráficamente en función del tiempo las componentes de las cantidades de movimiento de dos cuerpos  $A$  y  $B$  que chocan en un plano. (a) Completar las curvas que presentan las cantidades de movimiento de  $B$  durante el choque y después de él. (b) Poner de manifiesto cómo varía con el tiempo el vector  $p_a$  en un diagrama de cantidad de movimiento en el que se tracen los vectores a partir de un punto común, y determinar la magnitud y dirección de la fuerza que actúa sobre  $A$  en función del tiempo.

4-12. Un cuerpo se mueve en el espacio recorriendo una trayectoria descrita por un vector de posición  $r$ . ¿Cuáles de las siguientes aseveraciones referentes a este movimiento son correctas? Discútanse las respuestas.

(a) La velocidad está dirigida siempre a lo largo de  $r$ . (b) La velocidad puede ser normal a  $r$ . (c) La velocidad es nula cuando el módulo de  $r$  permanece constante. (d) La velocidad es paralela a la tangente a la trayectoria definida por  $r$ . (e) La fuerza es normal al vector cantidad de movimiento. (f) El vector fuerza puede ser normal al radio vector. (g) La fuerza

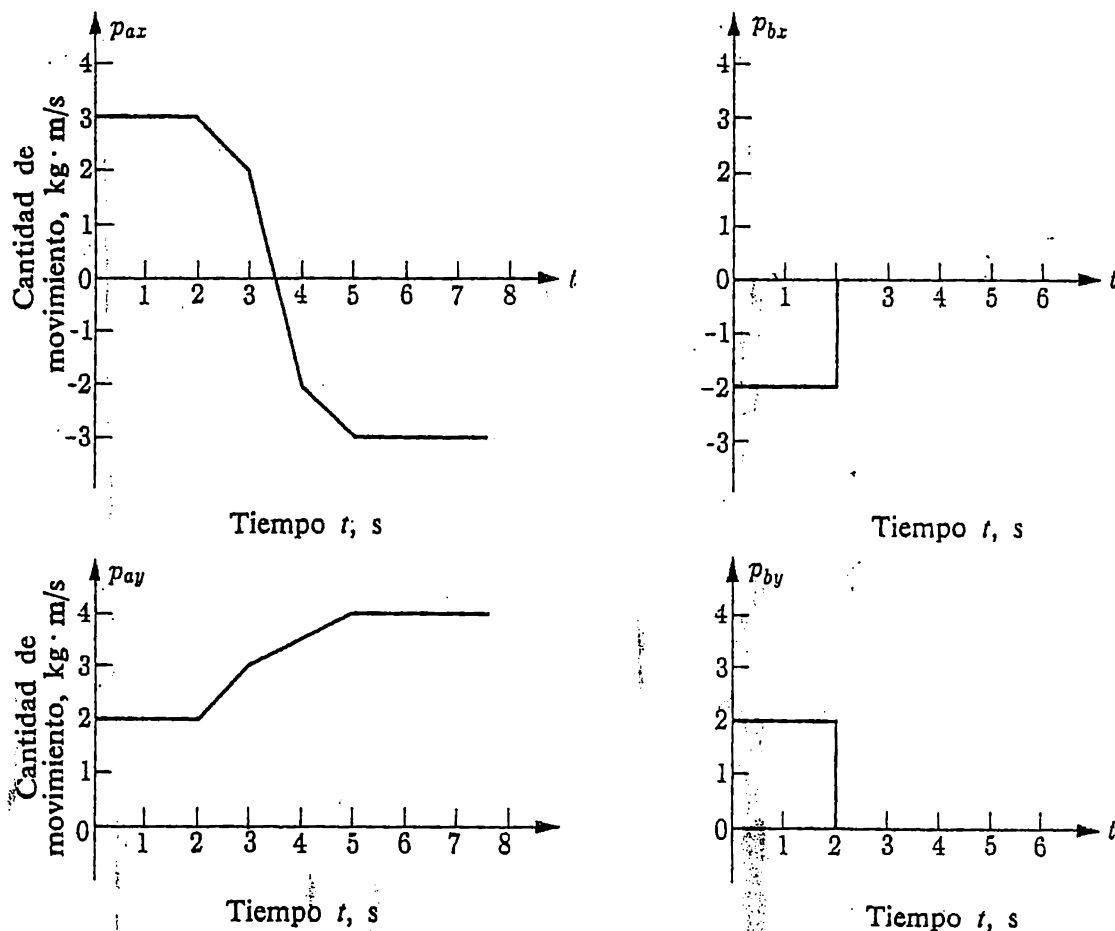


Figura 4-25

debe ser nula cuando  $dp/dt$  lo sea. ( $p =$  módulo de  $\mathbf{p}$ ).

4-13. Trazar un diagrama vectorial que ilustre cómo varía con el tiempo la cantidad de movimiento en el movimiento del disco indicado en la figura 4-11. Trácese todos los vectores cantidad de movimiento a partir de un origen y únanse sus extremos mediante una curva continua. A ésta suele llamársela *hodógrafa* del movimiento. Convénzase de que la tangente a la hodógrafa tiene la misma dirección que la fuerza ejercida sobre el disco.

4-14. Un cuerpo de 2 kg se halla sometido a tres fuerzas,  $F_1$  de magnitud 3 N y dirigida en la dirección  $x$ ,  $F_2$  de magnitud

4 N y dirigida según  $y$ , y  $F_3$  de magnitud 5 N dirigida hacia el cuarto cuadrante y formando un ángulo de  $45^\circ$  con el eje  $x$ . Determinar la magnitud y dirección de la fuerza adicional requerida para producir una aceleración de  $2 \text{ m/s}^2$  en el sentido negativo de las  $x$ . ¿Y para dar equilibrio?

4-15. Un cuerpo de masa  $m = 0,5$  kilogramos puede deslizarse libremente sobre una barra vertical sin rozamiento en la forma que se indica en la figura 4-26. Al cuerpo se une un extremo de un resorte que sin deformar tiene una longitud de 20 cm. El otro extremo del resorte se une a un punto  $B$  de la horizontal, situado a 20 cm de la barra. Se suelta entonces el



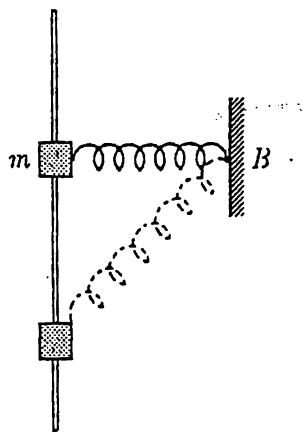


Figura 4-26

cuerpo. Encontramos que queda en equilibrio en un punto situado a un nivel 30 cm por debajo de  $B$ . (a) Dibujar un diagrama que aisle el cuerpo y ponga de manifiesto todas las fuerzas que actúan sobre él, e indicar las condiciones de equilibrio. (b) Determinar la constante del resorte y la magnitud y dirección de la fuerza de contacto que se ejerce sobre la barra.

4-16. Dos pesas, cada una de ellas de masa  $m$ , están unidas a los extremos opuestos de una cuerda larga, la cual cuelga de dos poleas separadas una distancia horizontal  $l$ . (a) ¿Cuál es la tensión de la cuerda? (b) En el punto medio del segmento determinado por las poleas se cuelga una tercera pesa de masa  $M$  y se observa que dicho punto medio desciende una distancia  $l/2\sqrt{3}$ . Expresar, en función de  $m$ , el valor de  $M$ .

4-17. Dos bolas están unidas a los extremos de dos cuerdas en la forma indicada en la figura 4-27. Cuando las bolas están cargadas eléctricamente, se repelen con una fuerza  $F = 9 \cdot 10^9 q_1 q_2 / r^2$  newton, donde  $r$  está dada en metros y  $q$  en coulomb. Si la masa de cada bola es de 1 g,  $l = 100$  cm, y el ángulo de desviación es  $\theta = 30^\circ$ , ¿cuáles serán las cargas (supuestas iguales) de las bolas?

4-18. Dos cuerdas  $A$  y  $B$  soportan

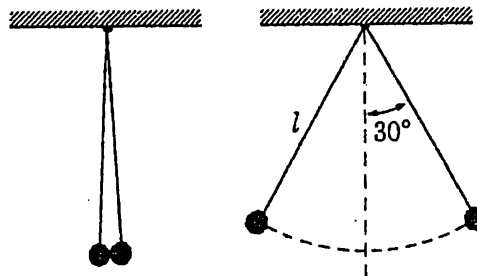


Figura 4-27

un cuerpo de 100 kg en la forma indicada en la figura 4-28. La cuerda  $B$  pasa por una polea (rozamiento despreciable) y los dos extremos de  $B$  están unidos al cuerpo. Un extremo de  $A$  está unido a una pared fija y el otro al cuerpo. Si los ángulos de las cuerdas son los indicados en la figura, determinar las tensiones de las cuerdas.

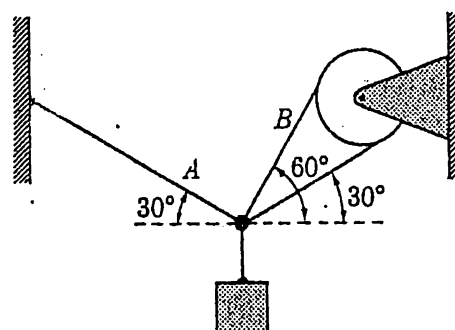


Figura 4-28

4-19. Los vértices de un cuadrado (véase fig. 4-29) atraen a un cuerpo pequeño  $A$  de masa  $m$  con fuerzas proporcionales a las distancias de  $A$  a los respectivos vértices. Las constantes de proporcionalidad son todas iguales a  $K$ . Demostrar que la fuerza resultante que se ejerce sobre  $A$  en un punto arbitrario interior al cuadrado es  $F = -4Kr_a$ , donde  $r_a$  es el vector de posición de  $A$ .

4-20. Consideremos un dispositivo análogo al de la figura 4-26. Si la constante del resorte es ahora 20 N/cm, ¿en qué posición habría que soltar el cuerpo

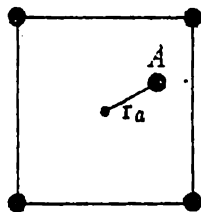


Figura 4-29

(masa = 0,5 kg) para que su aceleración inicial fuera  $g$  y dirigida hacia arriba? Si no se pudiera obtener una solución analítica, idéese un método numérico o gráfico de solución.

4-21. Consideremos un aro exento de rozamiento, de radio  $r$  y situado en un plano vertical. Un extremo de cada uno de dos resortes se une a un cuerpo que puede deslizarse sobre el aro. Los otros extremos de los resortes se fijan a los puntos más alto y más bajo del aro, como se indica en la figura 4-30. Los resortes son exactamente iguales y cada uno tiene una longitud, si no está deformado, de medio radio y la constante del resorte es tal que  $Kr/2 = p$  siendo  $p$  el peso del cuerpo. (a) Aislar el cuerpo mediante un diagrama de sólido libre que indique todas las fuerzas que actúan sobre él. (b) Determinar la aceleración del cuerpo en función de  $g$  cuando se suelta desde la posición  $P$  indicada en la figura. ¿Cuál es la fuerza de contacto que se ejerce sobre el aro en dicho punto?

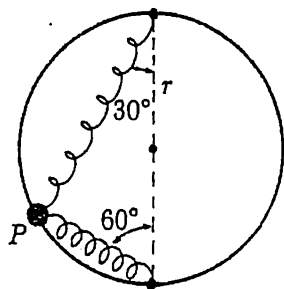


Figura 4-30

4-22. Una bola se halla confinada a deslizarse alrededor de un círculo de radio  $r$ , en un plano vertical. La bola se halla repelida por fuerzas ejercidas desde los extremos  $A$  y  $B$  del diámetro horizontal del círculo. Estas fuerzas son proporcionales a las distancias de la bola a  $A$  y  $B$ , y las constantes de proporcionalidad son  $K_1$  y  $K_2$ , respectivamente. Es decir,  $F_1 = K_1 r_1$ ,  $F_2 = K_2 r_2$ . (a) Determinar el ángulo  $\phi$  correspondiente al equilibrio, si el peso de la bola es  $p$ . (b) Determinar el ángulo  $\phi$  correspondiente al equilibrio si es despreciable el peso de la bola. (c) Bajo ciertas condiciones, ¿puede haber equilibrio para todos los ángulos  $\phi$  si es despreciable el peso de la bola?

4-23. Un hilo de longitud  $l$  une dos pesos  $w_1$  y  $w_2$  colocados sobre un cilindro liso, en la forma indicada en la figura 4-31. (a) Determinar la relación existente entre  $\phi_1$  y  $\phi_2$  en el equilibrio. (b) ¿Cuáles son, en tal caso, la tensión del hilo y las fuerzas que se ejercen sobre el cilindro?

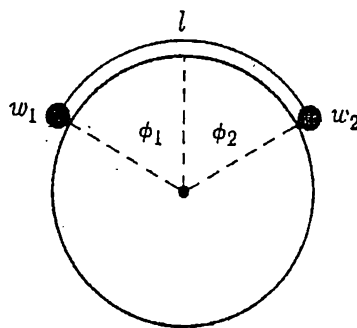


Figura 4-31

4-24. En un plano se mueven tres partículas  $A$ ,  $B$  y  $C$ . En un instante determinado, sus posiciones son  $x_a = 3$  m,  $y_a = -2$  m;  $x_b = 5$  m,  $y_b = 1$  m;  $x_c = -3$  m,  $y_c = 3$  m; las cantidades de movimiento correspondientes, expresadas en  $\text{kg} \cdot \text{m/s}$  son  $p_{ax} = -1$ ,  $p_{ay} = 2$ ;  $p_{bx} = 3$ ,  $p_{by} = 2$ ;  $p_{cx} = 2$ ,  $p_{cy} = -3$ . Las masas

de los cuerpos son  $m_a = 2$  kg,  $m_b = 3$  kg y  $m_c = 1$  kg. (a) Determinar la situación y la velocidad del centro de masa cuando se tienen estas condiciones. (b) De la anterior información, ¿puede predecirse el movimiento futuro del centro de masa? Si no, ¿qué información se precisa? Discusión.

4-25. A un extremo de una barra de 40 cm de longitud se fija una masa  $m_1 = 3$  kg y al otro extremo una  $m_2 = 1$  kilogramo. La barra se coloca verticalmente sobre un plano sin rozamiento en un punto  $P$ , como se indica en la figura 4-32, y se suelta. ¿A qué distancia del punto  $P$  chocará la masa  $m_1$  contra el plano?

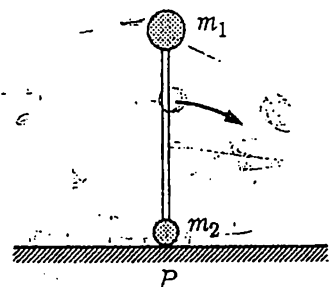


Figura 4-32

4-26. Sobre un plano horizontal se apoya una caja cerrada. De la cara interior de la tapa pende un péndulo constituido por un peso sujeto al extremo de un hilo de longitud  $l$ . La masa  $m$  del péndulo es igual a la de la caja. Se hace oscilar al péndulo en un plano vertical entre los ángulos  $\phi = +90^\circ$  y  $\phi = -90^\circ$ . Si un punto de la caja se halla en  $x = 0$  (véase fig. 4-33) en el instante en que  $\phi = 0$ , ¿cuál es la situación de dicho punto cuando  $\phi = +90^\circ$ ?

4-27. Consideremos tres cuerpos  $A$ ,  $B$  y  $C$  colocados sobre un plano horizontal exento de rozamiento. Sus masas son  $m_a = 4$  kg,  $m_b = 6$  kg y  $m_c = 8$  kg. Los cuerpos están unidos mediante resortes,

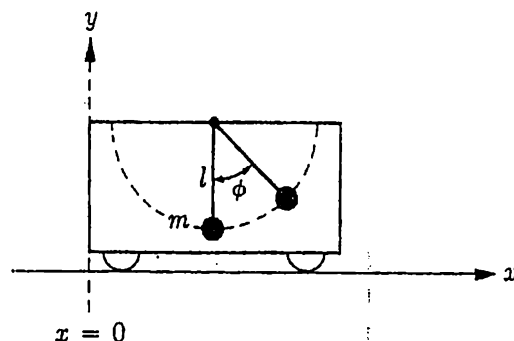


Figura 4-33

como se indica en la figura 4-34. Las tensiones en los resortes  $AB$  y  $BC$  son 10 N y 15 N, respectivamente. Se sueltan los cuerpos a partir de esta posición. Determinar las aceleraciones iniciales (a) de  $A$ ,  $B$  y  $C$ ; (b) del centro de masa del sistema  $A + B$ ; y (c) del centro de masa del sistema  $A + B + C$ .

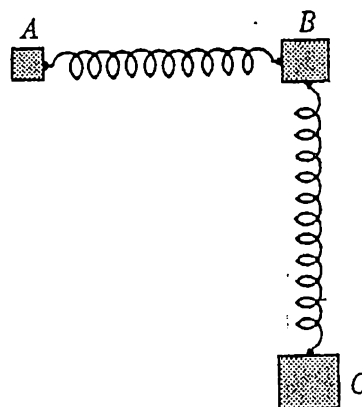


Figura 4-34

4-28. Analizar los experimentos representados en la figura 4-20 del texto. En cada experimento, aislar cada uno de los cuerpos que intervienen e indicar todas las fuerzas que se ejercen sobre él. Determinar las tensiones de los resortes.

4-29. Un cuerpo se apoya sobre un plano inclinado en la forma indicada en la figura 4-35. El coeficiente de rozamiento estático entre el cuerpo y el plano es  $\mu$ . (a) Aislar el cuerpo e indicar todas las

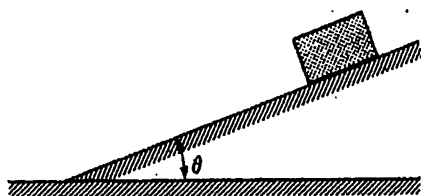


Figura 4-35

fuerzas que se ejercen sobre él. (b) Si crece continuamente el ángulo  $\theta$ , ¿a qué ángulo empezará a deslizar el cuerpo hacia abajo del plano?

4-30. Un bloque se apoya en una plataforma en la forma indicada en la figura 4-36. La plataforma se mueve con una aceleración constante igual a  $g/4$ , en la dirección que se indica en la figura. ¿Cuál debe ser el coeficiente de rozamiento en las superficies en contacto, para evitar el deslizamiento del cuerpo?

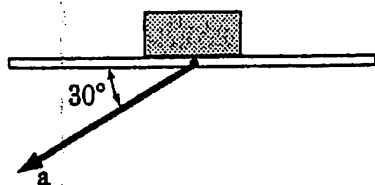


Figura 4-36

4-31. Dos cuerpos  $A$  y  $B$  de masas  $m_a = 2 \text{ kg}$  y  $m_b = 1 \text{ kg}$  están unidos por un hilo de masa despreciable, en la forma indicada en la figura 4-37. Los coeficientes de rozamiento en las superficies de contacto de los cuerpos son  $\mu_b = 0,2$  y  $\mu_a = 0,1$ . (a) Aislar  $A$  y  $B$  e indicar todas las fuerzas que se ejercen sobre ellos. ¿Cuántas fuerzas desconocidas y cuántas ecuaciones de movimiento hay? (b) ¿Cuál es la tensión del hilo cuando los cuerpos deslizan hacia abajo del plano? El ángulo de inclinación del plano es de  $30^\circ$ .

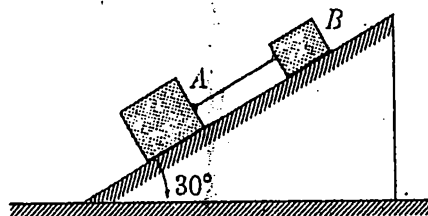


Figura 4-37

4-32. ¿Cuál es el dominio de aceleraciones que pueden darse al carrito de la figura 4-38, sin que deslice  $m_2$ ? Los coeficientes de rozamiento de las superficies horizontal y vertical son  $\mu_2$  y  $\mu_1$ , respectivamente.

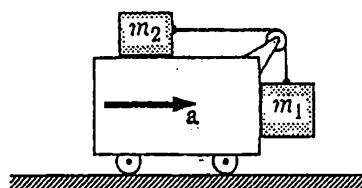


Figura 4-38

4-33. Hacia abajo de un plano inclinado desliza un depósito lleno de agua, según se indica en la figura 4-39. A través de un orificio del depósito sale agua hacia adelante a razón de  $\rho$  gramos/segundo con celeridad  $v_0$  relativa a la caja, constante. La masa de la caja vacía es  $M$  y la masa del agua es inicialmente  $M_0$ . Si el depósito inicia el deslizamiento a partir del reposo en  $t = 0$ , determinar su aceleración en función del tiempo, despreciando el rozamiento. El ángulo de inclinación del plano es  $\theta$ .

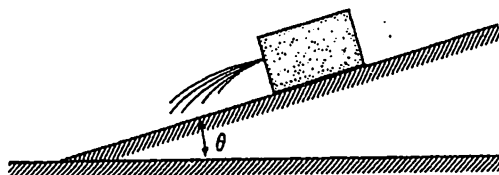


Figura 4-39

## EJEMPLOS DE FUERZAS Y MOVIMIENTO — I

*Resumen.* Empezaremos con un examen de las características fundamentales del movimiento de proyectiles en el campo gravitatorio local. Una vez familiarizados con este movimiento, estudiaremos cualitativamente la naturaleza de las trayectorias de partículas disparadas desde una posición elevada sobre la superficie terrestre, con velocidades que varíen desde valores muy pequeños hasta valores muy elevados. Una de estas trayectorias será una circunferencia que rodee a la Tierra, y se elige esta trayectoria para el estudio del movimiento circular. Sigue un estudio breve de los movimientos de partículas cargadas en campos eléctricos y magnéticos. La fuerza eléctrica es análoga a la fuerza gravitatoria local, mientras que la fuerza magnética tiene la particularidad de depender de la velocidad. Concluye el capítulo con un estudio del método matemático para determinar el movimiento cuando la fuerza depende del tiempo.

En los capítulos anteriores se han establecido los conceptos de cantidad de movimiento y fuerza, aplicándolos después a varios ejemplos ilustrativos. Sin embargo, existen ciertas fuerzas y movimientos que son tan importantes que merecen una atención especial. En este capítulo estudiaremos varios de dichos ejemplos, incluyendo el movimiento de un cuerpo en un campo de fuerzas constante (movimiento de los proyectiles) y el movimiento circular. Además, estudiaremos algunos aspectos del movimiento de las partículas cargadas eléctricamente tanto en campos eléctricos como magnéticos. Las propiedades esenciales de esos movimientos pueden describirse adecuadamente en función de los principios generales tratados hasta ahora.

**5-1 Movimiento de proyectiles.** El análisis del movimiento a lo largo de una recta vertical, presentado en el capítulo anterior, puede extenderse fácilmente al caso general en que la velocidad inicial del cuerpo tenga también componente en la dirección  $x$ . La experiencia nos indica que la fuerza de la gravedad es *independiente de la velocidad* del cuerpo. La fuerza de la gravedad en la proximidad

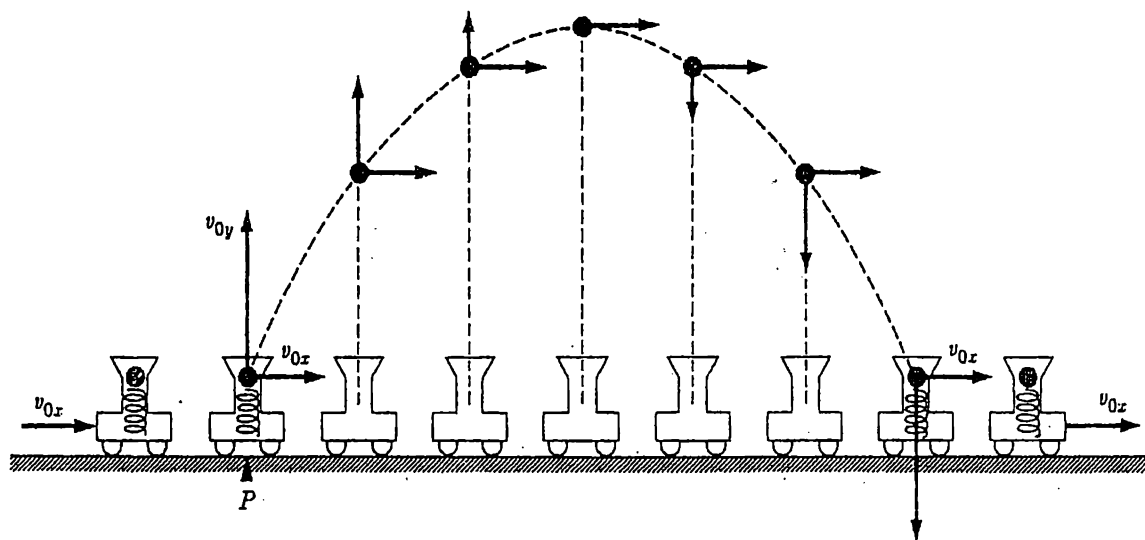


Fig. 5-1. Ejemplo del movimiento de un proyectil, que pone de manifiesto el que la componente horizontal de la velocidad permanece constante.

de la superficie terrestre tiene siempre la magnitud  $mg$  y está dirigida hacia abajo, *independientemente de la velocidad o dirección* del movimiento del cuerpo. En consecuencia, en la dirección horizontal no habrá cesión de cantidad de movimiento a un cuerpo que se mueva bajo la influencia de la gravedad. Es decir, la componente horizontal de la velocidad del cuerpo permanece constante, mientras que la componente vertical varía en la misma forma que en el movimiento puramente vertical.

La siguiente es una demostración experimental interesante de esta propiedad del movimiento de proyectiles y de que la fuerza de la gravedad es independiente de la velocidad. A uno de los carritos utilizados en los experimentos de choque del capítulo 3 se le provee de un resorte disparador cargado con una pelota de golf, como se indica esquemáticamente en la figura 5-1. El carrito, que puede moverse libremente sobre una pista horizontal, se pone en movimiento y se desplaza a velocidad constante. Cuando pasa por el punto  $P$ , se suelta el resorte y sale disparada la pelota. Al ser disparada, lleva la misma velocidad horizontal que el carrito y recibe, claro está, una componente vertical de la velocidad. Encontramos que la componente horizontal de la velocidad permanece efectivamente constante, ya que se ve que las posiciones horizontales de la pelota y el carrito son las mismas a lo largo de todo el movimiento, hasta que la pelota cae, por último, de nuevo en el carrito. En cambio, la componente vertical de la velocidad disminuye cantidades iguales en tiempos iguales hasta anularse en el punto más alto de la trayectoria de la pelota. A partir de este momento, cambia de signo y su magnitud crece en la misma proporción que disminuía antes, con lo que al alcanzar el carrito lleva una celeridad igual a la inicial.

El movimiento de la pelota lo describiremos respecto a un sistema de coordenadas que tenga un eje  $x$  horizontal y un eje  $y$  vertical. El origen de coordenadas se tomará en la posición de disparo de la pelota y el tiempo se mide a partir del instante de disparo. Así, en el instante  $t = 0$ , se dispara la pelota desde el punto  $x = 0$ ,  $y = 0$  con una celeridad  $v_0$  y un ángulo de elevación  $\theta$ . Las componentes horizontal y vertical de la velocidad son, pues,  $v_{0x} = v_0 \cos \theta$  y  $v_{0y} = v_0 \sin \theta$ . Las ecuaciones del movimiento son

$$m \frac{dv_x}{dt} = F_x = 0, \quad m \frac{dv_y}{dt} = -mg$$

Las componentes de la velocidad en un instante posterior  $t$  son, por tanto:

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \theta = \text{const}, \quad v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \theta - gt \quad (5-1)$$

y las posiciones correspondientes están dadas por

$$x = v_{0x}t = (v_0 \cos \theta)t, \quad y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = (v_0 \sin \theta)t - \frac{gt^2}{2} \quad (5-2)$$

Sustituyendo  $t = x/v_{0x} = x/v_0 \cos \theta$  en la expresión de  $y$ , obtenemos  $y$  en función de  $x$ , que es la función representativa de la trayectoria parabólica

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - g \frac{x^2}{2v_{0x}^2} = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x \left( 1 - \frac{g}{2v_{0x}v_{0y}} x \right) \quad (5-3)$$

Vemos que  $y = 0$  para  $x = 0$  y también para

$$x = l = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \quad (5-4)$$

Este último valor de  $x$  representa el alcance  $l$  del proyectil. La altura máxima  $h$  de la trayectoria se obtiene para  $x = l/2$  y es

$$h = \frac{l}{4} \frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \frac{l}{4} \operatorname{tg} \theta = \frac{v_{0y}^2}{2g} \quad (5-5)$$

Con el alcance y la altura de la trayectoria, que se indican en la figura 5-2, podemos escribir

$$\frac{y}{h} = 4 \frac{x}{l} \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \quad (5-6)$$

Se ve claramente que  $l$  tiene un valor máximo  $l_m = v_0^2/g$ , correspondiente al ángulo  $\theta = 45^\circ$  para el cual  $\sin 2\theta = 1$ . La altura máxima,  $h_m = v_0^2/2g = l_m/2$ , se obtiene cuando  $\theta = 90^\circ$ . En otras palabras, el alcance máximo es el doble de la altura máxima del proyectil.

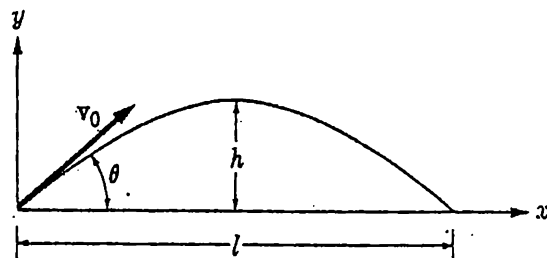


Fig. 5-2. Movimiento del proyectil.

En lugar de partir de un ángulo de elevación dado, vamos ahora a invertir el problema y partir de una posición  $x_1, y_1$  del blanco y buscar el ángulo de elevación para el cual la trayectoria pase por el blanco. Se da la celeridad  $v_0$  del proyectil. En tal caso, utilizando  $1/\cos^2\theta = 1 + \operatorname{tg}^2\theta$ , obtenemos de la ecuación (5-3) de la trayectoria, la relación existente entre el ángulo  $\theta$  y las coordenadas  $x_1, y_1$ :

$$y_1 = x_1 \operatorname{tg} \theta - \frac{g}{2v_0^2} x_1^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \theta)$$

Despejando  $\operatorname{tg} \theta$  se tiene

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{l_m}{x_1} \pm \frac{1}{x_1} \sqrt{l_m^2 - x_1^2 - 2l_m y_1} \quad (5-7)$$

donde  $l_m = v_0^2/g$ .

Según puede verse en la figura 5-3, a un blanco dado le corresponden dos ángulos de elevación posibles. Cuando se anula la raíz cuadrada de la ecuación (5-7), los dos ángulos se hacen iguales y sólo hay una orientación posible. La relación entre  $y_1$  y  $x_1$  para la cual se anula la raíz cuadrada es

$$y_1 = \frac{l_m^2 - x_1^2}{2l_m} = \frac{l_m}{2} - \frac{x_1^2}{2l_m} = h_m - \frac{x_1^2}{2l_m} \quad (5-8)$$

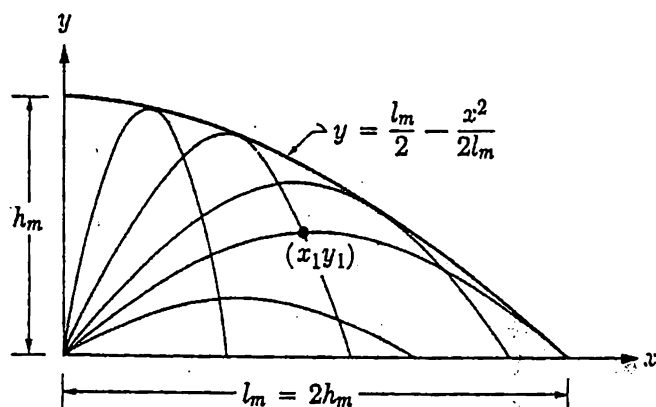


Fig. 5-3. Envolvente de las diversas trayectorias de un proyectil que se obtienen al variar el ángulo de elevación.



que define la curva indicada en la figura 5-3. Si el blanco se halla en el interior de esta curva, existen dos valores posibles de  $\theta$ ; si el blanco se halla sobre la curva, sólo hay un ángulo posible; y si el punto se halla fuera de la curva, no hay ningún ángulo posible para el cual el proyectil pueda alcanzar el blanco. Por tanto, la ecuación (5-8) define una línea límite que no puede sobrepasar un proyectil de celeridad inicial  $v_0$ .

**5-2 Movimiento circular.** Cuando es nula la fuerza resultante que se ejerce sobre un cuerpo móvil, éste recorre una trayectoria rectilínea con velocidad constante. La influencia de una fuerza sobre este movimiento dependerá, desde luego, de la dirección de la fuerza. Si tiene la misma dirección que la velocidad del cuerpo, como en el caso de caída libre, el efecto de la fuerza no es mas que alterar la magnitud de la velocidad. Para variar la dirección del movimiento y dar a la trayectoria la curvatura correspondiente, se precisa una componente de la fuerza perpendicular a la velocidad. Si la magnitud de la fuerza es constante, la rapidez de variación de dirección y la curvatura correspondiente de la trayectoria son máximas cuando la fuerza total es perpendicular a la velocidad. Un ejemplo de esto se halla en nuestro estudio del movimiento de proyectiles realizado en el apartado anterior, donde hallábamos curvatura máxima en la parte superior de la trayectoria.

Esta curvatura de la trayectoria no sólo depende de la fuerza perpendicular a la velocidad, sino también de la celeridad del proyectil. Para ilustrar mejor esta cuestión, estudiemos cualitativamente las trayectorias de proyectiles disparados con diferentes velocidades en una dirección horizontal a partir de una posición  $P$  elevada sobre la superficie terrestre, como se indica en la figura 5-4. Cuando la velocidad es nula, el proyectil cae verticalmente, y cuando la velocidad es muy grande, tendiendo a infinito, la trayectoria es muy aproximadamente rectilínea. A velocidades intermedias la curvatura de la trayectoria, que depende de la celeridad, puede ser menor o mayor que la curvatura de la superficie terrestre. En consecuencia, a una velocidad crítica determinada, la trayectoria será tal que se mueva siempre paralelamente a la superficie terrestre; es decir, la «caída» del proyectil hacia la Tierra está siempre «compensada» por la curvatura de la superficie terrestre, con lo que la altura del proyectil sobre dicha superficie se mantiene constante. La trayectoria representada por la línea de trazos de la figura 5-4 es entonces circular y la fuerza es siempre perpendicular a ella y dirigida hacia el centro de la Tierra. Podemos determinar fácilmente la velocidad crítica del proyectil correspondiente a esta órbita circular buscando la relación que debe existir entre la curvatura (conocida) de la trayectoria circular y la «desviación» del proyectil originada por su caída continua hacia la Tierra.

Consideremos un segmento de la trayectoria circular comprendido entre dos puntos  $P_1$  y  $P_2$ , separados una distancia  $R \Delta\theta = \Delta s$ , donde  $R$  es el radio de la

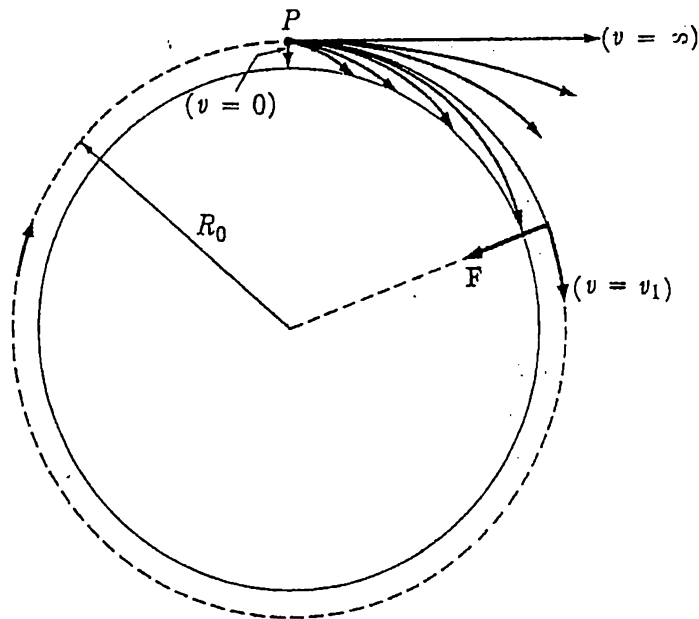


Fig. 5-4. Trayectorias de proyectiles disparados en una dirección horizontal con velocidades diferentes desde un punto elevado  $P$ .

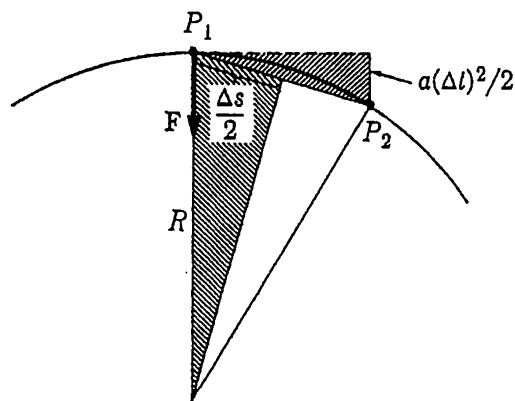


Fig. 5-5. Radio de curvatura originado por una fuerza constante perpendicular a la trayectoria.

trayectoria circular y  $\Delta s$  es la longitud de trayectoria entre  $P_1$  y  $P_2$ , indicada en la figura 5-5. Si es  $v$  la celeridad del proyectil, el tiempo de tránsito entre  $P_1$  y  $P_2$  es  $\Delta t = \Delta s/v$ . Ya hemos dicho que la fuerza que se ejerce sobre el proyectil y la aceleración  $a$  correspondiente, son perpendiculares a la velocidad. Tomando el intervalo de tiempo  $\Delta t$  suficientemente pequeño, podremos considerar constante la aceleración en ese intervalo. La distancia que en el tiempo  $\Delta t$  cae hacia la Tierra el proyectil es, pues,  $a(\Delta t)^2/2$ , según se indica en la figura. Tomando  $\Delta t$  suficientemente pequeño, el tramo de trayectoria  $\Delta s$  puede aproximarse a

un segmento rectilíneo entre  $P_1$  y  $P_2$ . En la figura 5-5 resulta inmediato, al comparar los triángulos semejantes indicados que

$$\frac{\Delta s/2}{R} = \frac{a(\Delta t)^2/2}{\Delta s}$$

o sea

$$a = \frac{(\Delta s/\Delta t)^2}{R} = \frac{v^2}{R} \quad (5-9)$$

En otras palabras, si es  $v = \sqrt{aR}$ , la celeridad del proyectil al ser disparado desde  $P$  bajo la influencia de la aceleración  $a$  perpendicular a la trayectoria, la «caída» del proyectil en la dirección de la aceleración será tal que la trayectoria sea una circunferencia de radio  $R$ . Obsérvese que al ir variando la dirección del movimiento, lo mismo hace la dirección de la fuerza, con lo que la fuerza y la aceleración correspondiente son siempre perpendiculares a la velocidad en el movimiento circular. La celeridad del proyectil permanece, pues, constante. Para otras velocidades de proyectil, las trayectorias no son circulares y existirá una componente de la fuerza según la dirección del movimiento que aumentará o disminuirá la celeridad del proyectil. Comparemos este movimiento con el del apartado anterior, donde se consideraban proyectiles con celeridades pequeñas. En el capítulo 10 se considerará el caso en que la celeridad sea mayor que  $v = \sqrt{aR}$ . La celeridad crítica a la cual el proyectil se pone en órbita alrededor de la Tierra puede estimarse tomando  $R = 6,4 \cdot 10^6$  m y  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>. El valor correspondiente de la celeridad crítica resulta ser entonces  $v_1 \simeq 8000$  m/s.

Hasta ahora, por lo que respecta al movimiento circular, no nos interesa conocer el origen o naturaleza de la fuerza. En vez de la fuerza de la gravedad, podríamos tener una fuerza de intensidad constante que la proporcionara un hilo, una barra rígida, una pista, etc., o podríamos tener una fuerza electromagnética que actuara de manera que el cuerpo recorriese una trayectoria circular. Al igual que en la trayectoria alrededor de la Tierra, la fuerza que se ejerce sobre un cuerpo que recorre una órbita circular es siempre perpendicular a la trayectoria y está dirigida hacia el centro de la circunferencia. La magnitud de la fuerza está relacionada con la celeridad  $v$  del cuerpo y con el radio  $R$  de la circunferencia, mediante la ecuación

$$F = ma = \frac{mv^2}{R} \quad (5-10)$$

que se deduce de la ecuación (5-9).

Es importante hacer observar que cuando un cuerpo se mueve siguiendo una circunferencia, frecuentemente se halla forzado a ello por una «ligadura» tal como un alambre circular o una pista de algún tipo. En tales casos sobre el cuerpo se ejerce más de una fuerza, por ejemplo, la de la gravedad y una o más fuer-

zas de contacto. Al recorrer el cuerpo la circunferencia, la aceleración hacia el centro del círculo tiene siempre la magnitud  $v^2/R$  incluso si la celeridad varía de un punto a otro. La suma de todas las componentes de las fuerzas dirigidas hacia el centro de la circunferencia deberá ser igual a  $mv^2/R$ . Por supuesto, estas fuerzas también pueden tener componentes en la dirección tangencial que hagan que la velocidad del cuerpo varíe en magnitud al recorrer la circunferencia.

**EJEMPLO 1.** Un péndulo consta de un hilo de 1 m, fijo por un extremo y que soporta en el otro un cuerpo de 2 kg (fig. 5-6). Al oscilar el péndulo en un plano vertical, la velocidad resulta ser de 3 m/s cuando la desviación angular es de  $45^\circ$ . En este instante, ¿cuál es la tensión del hilo?

Sobre el cuerpo sujeto a un extremo del hilo se ejercen dos fuerzas: su peso  $mg$  y la tensión  $S$  del hilo. La aceleración hacia el centro de la trayectoria circular del cuerpo es  $v^2/R$ . La componente según esta dirección de la fuerza resultante es  $S - mg \cos \theta$ , según se indica en la figura. En consecuencia, tenemos

$$S - mg \cos \theta = \frac{mv^2}{R}$$

o sea

$$S = \frac{mv^2}{R} + mg \cos \theta$$

Utilizando los valores numéricos  $v = 3$  m/s,  $m = 2$  kg y  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>  $R = 1$  m y  $\theta = 45^\circ$ , obtenemos

$$S = 2 \cdot \frac{3^2}{1} + 2 \cdot 9,8 \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 31,9 \text{ N}$$

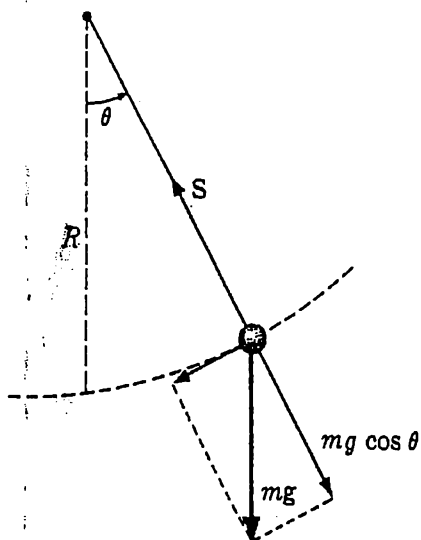


Figura 5-6

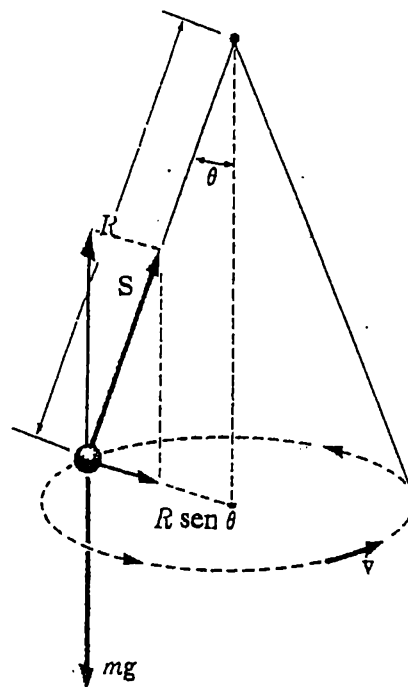


Figura 5-7

**EJEMPLO 2.** Dejemos que el péndulo del ejemplo anterior se mueva cónicamente, de manera que el cuerpo situado al extremo del hilo se mueva en un plano horizontal en vez de vertical, y el hilo describa una superficie cónica, según se indica en la figura 5-7. (Ese movimiento se emplea en los reguladores centrífugos.) ¿Qué celeridad se precisa para que el ángulo que forme el hilo con la vertical sea de  $45^\circ$ , y cuál es la tensión del hilo correspondiente?

Si es  $R$  la longitud del hilo, el radio del círculo horizontal es  $R \sin \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo que forma el hilo con la vertical. Sobre el cuerpo actúan dos fuerzas: su peso  $mg$  y la tensión  $S$  del hilo. La componente vertical de la aceleración es nula y tendremos  $S \cos \theta - mg = 0$ , o sea  $S = mg / \cos \theta$ . La componente horizontal de la aceleración está dirigida hacia el centro de la circunferencia y tenemos

$$S \sin \theta = \frac{mv^2}{R \sin \theta}$$

o sea

$$v^2 = Rg \tan \theta \sin \theta$$

Con los valores numéricos  $R = 1$  m,  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup> y  $\theta = 45^\circ$ , obtenemos

$$v \simeq \sqrt{1 \cdot 9,8 \cdot 1 \cdot 0,7} \simeq 2,6 \text{ m/s}$$

La tensión del hilo correspondiente es

$$S = \frac{mg}{\cos \theta} \simeq 28 \text{ N}$$

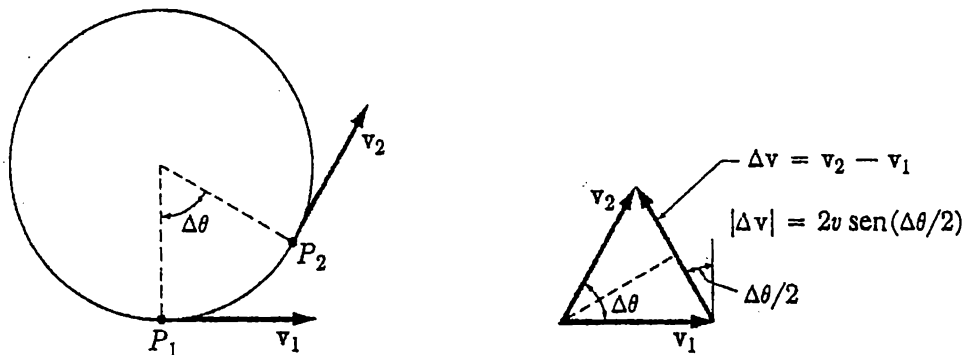


Figura 5-8

**EJEMPLO 3.** Vamos a ver otra deducción de la expresión de la relación entre la fuerza y la celeridad de una partícula animada de movimiento circular. Partiremos directamente de la definición del vector aceleración media,  $\bar{a} = (v_2 - v_1)/(t_2 - t_1) = \Delta v / \Delta t$ , y buscaremos el valor límite de esta aceleración para  $\Delta t = 0$ . Consideremos un cuerpo que se mueva con celeridad constante en una circunferencia de radio  $R$ . Determinemos la aceleración media del cuerpo en el intervalo entre dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  separados por un ángulo  $\Delta\theta$ , como se ilustra en la figura 5-8.

La variación de velocidad entre esos dos puntos,  $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ , tiene por módulo  $|\Delta \mathbf{v}| = 2v \sin(\Delta\theta/2)$  y su dirección forma un ángulo  $\Delta\theta/2$  con la vertical. El cuerpo va de  $P_1$  a  $P_2$  en el tiempo  $\Delta t = R \Delta\theta/v$ ,\* con lo que la aceleración media  $\bar{\mathbf{a}} = \Delta \mathbf{v} / \Delta t$  tiene por módulo

$$\bar{a} = \frac{v^2}{R} \frac{\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2}$$

Para hallar la aceleración instantánea en  $P_1$ , determinamos el valor límite de esta aceleración cuando  $\Delta t$  (y  $\Delta\theta$ ) es cero. Como el valor límite de

$$\frac{\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2}$$

es la unidad, vemos que la magnitud de la aceleración instantánea en  $P_1$  es  $a = v^2/R$ , como antes. Como la aceleración media forma un ángulo  $\Delta\theta/2$  con la vertical, se deduce que en el límite cuando  $\Delta t$  y  $\Delta\theta$  tienden a cero, la dirección de la aceleración instantánea en  $P_1$  es vertical; es decir, la aceleración está dirigida hacia el centro de la circunferencia. Está bien claro que el mismo resultado es aplicable a un punto arbitrario de la circunferencia.

*Coordenadas polares.* En el estudio del movimiento de proyectiles, se especificaba la posición del cuerpo mediante sus coordenadas cartesianas rectangulares  $x$  e  $y$ . Estas coordenadas definen el vector de posición  $\mathbf{r}$  del cuerpo. Aparte

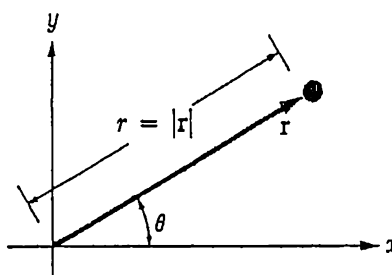


Fig. 5-9. Coordenadas polares  $r$  y  $\theta$ .

de definir  $\mathbf{r}$  por  $x$  e  $y$ , también podemos especificarlo mediante su longitud  $r$  y su dirección y sentido dados, por ejemplo, por el ángulo  $\theta$  que forma  $\mathbf{r}$  con el semieje positivo de las  $x$ . Las dos cantidades  $r$  y  $\theta$  reciben el nombre de *coordenadas polares* del cuerpo. Refiriéndonos a la figura 5-9, podemos obtener las siguientes relaciones entre las coordenadas rectangulares y polares:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (5-11)$$

\* El ángulo  $\Delta\theta$  se mide en radianes. Recordemos que una circunferencia completa corresponde a  $360^\circ$  ó  $2\pi$  radianes y que la longitud del arco de circunferencia subtendido por un ángulo  $\alpha$  es  $r\alpha$ , donde  $r$  es el radio de la circunferencia y  $\alpha$  se mide en radianes.

o bien

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$$

Al moverse el cuerpo variarán, en general, las coordenadas radial y angular  $r$  y  $\theta$ . Las variaciones en unidad de tiempo de  $r$  y  $\theta$  se llaman, respectivamente, velocidades *radial* y *angular*. Así, la velocidad radial es

$$v_r = \frac{dr}{dt} \quad (5-12)$$

y la *velocidad angular* es

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (5-13)$$

En el caso particular del movimiento circular, el radio  $r$  permanece constante ( $R$ ), y la velocidad radial es nula. La velocidad angular está relacionada de manera sencilla con la celeridad de la partícula. Un desplazamiento  $ds$  a lo largo de la circunferencia corresponde a un desplazamiento angular  $d\theta = ds/R$  y la velocidad angular es, pues,  $d\theta/dt = (1/R)(ds/dt)$ , o sea

$$\omega = \frac{v}{R}, \quad v = \omega R \quad (5-14)$$

En el movimiento circular, pues, la magnitud de la aceleración dirigida hacia el centro puede expresarse en la forma

$$a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \quad (5-15)$$

Si se mide el ángulo  $\theta$  a partir del semieje positivo de las  $x$  y si hacemos  $t = 0$  cuando  $\theta = 0$ , tenemos  $\theta = \omega t$  si es constante la velocidad angular  $\omega$ .

Las coordenadas cartesianas  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ , de una partícula que se mueve siguiendo una trayectoria circular con celeridad constante son, pues,

$$x = R \cos \omega t, \quad y = R \sin \omega t \quad (5-16)$$

Las componentes correspondientes de la velocidad y la aceleración son

$$\frac{dx}{dt} = v_x = -R\omega \sin \omega t, \quad \frac{dy}{dt} = v_y = R\omega \cos \omega t \quad (5-17)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} = a_x &= -R\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x \\ \frac{dv_y}{dt} = a_y &= -R\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 y \end{aligned} \quad (5-18)$$

Los movimientos de las coordenadas son oscilantes y reciben el nombre de *movimientos armónicos*. Estos dos tipos de movimientos, circular y armónico, tienen gran importancia en Física. De la ecuación (5-18) podemos ver que en el movimiento armónico la aceleración es proporcional y de sentido contrario al desplazamiento. Esta interesante propiedad del movimiento es la misma que la del cuerpo sometido a la influencia de una fuerza de resorte  $F = -Kx$  como la dada en la ecuación (3-19) del capítulo 3. Más adelante veremos que una masa unida al extremo de un resorte realiza, en realidad, un movimiento armónico.

**5-3 Movimiento de partículas cargadas eléctricamente. Fuerza electrostática.** Las fuerzas electrostáticas tal vez no sean tan familiares o se encuentren tan a menudo como las gravitatorias, de contacto y de resorte, pero todos conocemos su existencia. Al frotar un peine de plástico con un paño de lana queda «cargado» y tiende a atraer los pedacitos de papel. A esta fuerza atractiva se le llama electrostática. A las fuerzas electrostáticas se debe el comportamiento peculiar y molesto del polvo sobre los discos gramofónicos. Y aún más importante, las fuerzas interatómicas son, en gran manera, de origen electrostático.

La ley fundamental que rige las fuerzas electrostáticas fue enunciada por COULOMB en 1785; sin embargo, la existencia de dichas fuerzas hacía tiempo que se conocía. La ley de COULOMB es

$$F = Cq_1q_2/r^2 \quad (C = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \quad (5-19)$$

donde  $F$  es la fuerza electrostática ejercida entre dos cargas puntuales  $q_1$  y  $q_2$  que están separadas una distancia  $r$ . La constante  $C$  depende, naturalmente, de las unidades que se tomen. Cuando la longitud se da en metros, la carga en coulomb y la fuerza en newton,  $C$  tiene el valor indicado en la ecuación (5-19). La ley de COULOMB se halló primeramente a partir de experimentos estáticos. No vamos a estudiar experimentos de equilibrio posibles que nos lleven a esta ley, o a posibles definiciones de la carga  $q$ . Nos limitaremos a exponer que la ley de la Electrostática es de forma muy parecida a la ley de NEWTON para la gravitación, al sustituir la masa pesante por la carga eléctrica. Pero, así como sólo conocemos un tipo de masa pesante, la carga eléctrica de un cuerpo puede ser positiva o negativa. Cuando dos cuerpos tienen cargas *negativas ambos*, o *positivas ambos*, la fuerza que se ejercen es *repulsiva*; cuando uno de los cuerpos tiene carga negativa y el otro carga positiva, la fuerza que se ejercen es *atractiva*. (La fuerza gravitatoria, por lo que se conoce hasta ahora, es siempre *atractiva*). Debe observarse que la aplicación directa de la ecuación (5-19) a cuerpos de tamaño finito sólo es posible cuando su separación es muy grande frente a sus propias dimensiones.

En los experimentos realizados en el laboratorio, encontramos que la fuerza



electrostática entre objetos suele ser mucho mayor que la fuerza gravitatoria correspondiente. El movimiento de los electrones en las válvulas de vacío y en algunos osciloscopios de rayos catódicos está totalmente determinado por las fuerzas electrostáticas. El movimiento de los electrones está determinado por dichas fuerzas al actuar sobre el electrón cuando se mueve a través del espacio.

Las fuerzas gravitatorias y electrostáticas pueden actuar a través del vacío y no precisan de contacto material entre los cuerpos que se ejercen la interacción. Por tanto, es muy útil considerar que el espacio posee un *campo* (gravitatorio o electrostático), que se define como la fuerza ejercida por unidad de masa (campo gravitatorio) o por unidad de carga (campo eléctrico) sobre un cuerpo colocado en el campo. El campo se debe, desde luego, a la presencia de cuerpos, pero en muchos problemas de movimiento puede especificarse el campo como función de la posición en el espacio y del tiempo. (En la práctica, el campo puede variar como consecuencia de la introducción de un cuerpo, ya que el cuerpo afectará a los generadores del campo por interacción con dichos generadores.)

El espacio próximo a la Tierra posee un campo gravitatorio y cuando se introduce un cuerpo en esta región, se encuentra sometido a una fuerza gravitatoria. Si es  $m_1$  la masa de este cuerpo, la fuerza que se ejerce sobre él es  $F = m_1(Gm_2/r^2)$ . La cantidad de dentro del paréntesis es la *intensidad del campo* gravitatorio, siendo la *fuerza* gravitatoria proporcional a la masa del cuerpo y a la intensidad del campo. En la proximidad de la superficie terrestre, la intensidad del campo es constante e igual a  $g$ , y está dirigida hacia abajo.

Análogamente, la fuerza que se ejerce sobre una carga eléctrica  $q_1$  situada en la región que rodea a otra carga  $q_2$  puede considerarse como consecuencia de un campo eléctrico  $E = Cq_2/r^2$ , creado por  $q_2$ . La fuerza puede escribirse en la forma

$$F = q_1 E \quad (5-20)$$

Si se mide la intensidad del campo en *newton por coulomb* (más frecuentemente llamado *volt por metro*) y se mide la carga en *coulomb*, la fuerza quedará expresada en *newton*. En general, el campo eléctrico  $E$  se debe a una distribución de cargas y variará en el espacio de manera debida a la distribución de cargas. La expresión para el campo eléctrico ya no es simplemente  $Cq_2/r^2$ , como antes. Sin embargo, el campo eléctrico en un punto dado está siempre definido, en magnitud, dirección y sentido, por la fuerza que se ejercería sobre la unidad positiva de carga situada en dicho punto. Como la fuerza es proporcional a la carga, en un campo eléctrico arbitrario la fuerza sobre una partícula está dada por  $F = qE$ . La fuerza es independiente de la velocidad de la partícula. En el caso particular de un plano muy extenso cargado uniformemente, el campo eléctrico en el exterior de dicho plano será constante, al igual que el campo gravitatorio próximo a la Tierra lo es. Análogamente, la región comprendida entre dos placas

cargadas con cargas opuestas, separadas una distancia pequeña frente a las dimensiones de las placas, tendrá un campo eléctrico prácticamente constante a todos los efectos. La fuerza que se ejerce sobre una carga positiva situada entre dichas placas es, pues, constante y perpendicular a las placas, dirigida de la placa positiva a la negativa.

**EJEMPLO.** Un haz de electrones pasa entre un par de placas de un osciloscopio en la forma indicada en la figura 5-10. La longitud de las placas es  $l$  cm y su separación  $d$  cm. La pantalla del osciloscopio se halla a  $L$  cm de las placas, según se indica. Si es  $E$  la intensidad del campo eléctrico entre las placas, ¿cuál es la desviación vertical en la pantalla? La velocidad de los electrones que penetran en las placas es  $v_0$  cm/s.

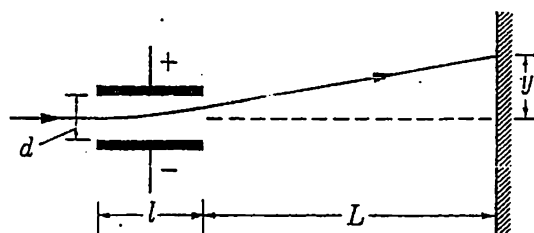


Figura 5-10

La fuerza electrostática  $F = qE$  es constante y la trayectoria del electrón es la misma que la de un proyectil en el campo gravitatorio local. Por tanto, la componente  $x$  de la velocidad permanece constante y la componente  $y$  es  $v = (F/m)t = (q/m)(E/v_0)x$ . Al salir la carga de entre las placas, la componente  $y$  de la velocidad es  $(qE/mv_0)l$ . Esta componente se mantendrá constante y al cabo de un recorrido  $L$  y del correspondiente tiempo  $L/v_0$  de tránsito a la pantalla, el desplazamiento en la pantalla según la dirección  $y$  es  $(qE/mv_0^2)lL$ . Además, tenemos el desplazamiento (pequeño) que sufre entre las placas,  $(F/m)t^2/2 = (qE/mv_0^2)l^2$ , y hallamos que el desplazamiento total es  $y = (qE/mv_0^2)lL(1 + l/2L)$ .

**Fuerza magnética.** Hemos visto que la fuerza que se ejerce sobre una carga que se mueve en un campo electrostático es independiente de la velocidad de

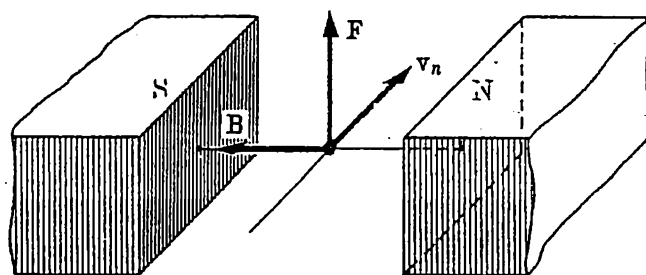


Fig. 5-11. Fuerza que se ejerce sobre una partícula cargada que se mueve en un campo magnético.

la partícula. La situación es totalmente diferente cuando la partícula cargada se mueve en la región existente entre los polos de un imán. En este caso, la experiencia nos indica que la fuerza es proporcional a la carga  $q$  de la partícula y también a la componente normal  $v_n$  de la velocidad en el plano de las piezas polares, es decir,  $F = \text{const} \cdot qv_n$ . La dirección de la fuerza se halla también en el mismo plano que las piezas polares, pero es perpendicular a la velocidad, según se indica en la figura 5-11. Se dice que la región comprendida entre las piezas polares posee un *campo magnético*. La magnitud  $B$  del campo se define como la constante de proporcionalidad en la ecuación anterior de la fuerza, con lo que tenemos

$$F = qv_n B \quad (5-21)$$

La dirección del campo magnético se toma perpendicular a  $v$  y a  $F$ , como se indica en la figura. Esta dirección, que es la misma que la de la aguja magnética colocada en el campo, define la dirección de las líneas de fuerza del campo magnético, utilizadas para visualizar el campo. Cuando se mide la fuerza en newton, la velocidad en m/s y la carga eléctrica en coulomb, la intensidad del campo magnético definida por la ecuación (5-21) se obtiene medida con la unidad N·s/m·C a la que se da el nombre de tesla. Como la fuerza es perpendicular a la velocidad de la partícula, la magnitud de la velocidad no variará, pero sí su dirección. Por tanto, cuando la velocidad es perpendicular a un campo magnético uniforme, la trayectoria de la partícula es circular.

**EJEMPLO.** Una partícula de carga eléctrica  $q$  y masa  $m$  se mueve perpendicularmente a las líneas de fuerza del campo magnético existente entre los polos de un imán. El campo magnético  $B$  es constante. La fuerza que se ejerce sobre la partícula tendrá, pues, magnitud constante igual a  $qvB$  y es perpendicular a la velocidad, es decir, las condiciones corresponden a las del movimiento circular. La trayectoria es circular y su radio vendrá dado por

$$\frac{mv^2}{R} = F = qvB$$

es decir,

$$R = \frac{m}{q} \frac{v}{B} = \frac{p}{qB}$$

El tiempo que emplea en dar una vuelta completa es, pues,  $t = 2\pi R/v = 2\pi(m/qB)$ , y la velocidad angular correspondiente es

$$\omega = \frac{2\pi}{t} = \frac{q}{m} B$$

Es interesante observar que el período  $t$  es *independiente* de la celeridad de la partícula, hecho que constituye el fundamento de los aceleradores de partículas tipo mag-

nético, tales como el ciclotrón. La frecuencia característica correspondiente recibe el nombre de *frecuencia ciclotrónica*.

**5-4 Fuerza dependiente del tiempo.** Frecuentemente se da la fuerza que se ejerce sobre una partícula como función del tiempo, como en el caso de una partícula con carga eléctrica situada en un campo eléctrico variable con el tiempo. La variación instantánea de cantidad de movimiento en unidad de tiempo y la aceleración de la partícula se darán, por tanto, en función del tiempo, pero si queremos determinar la velocidad o la trayectoria de la partícula, deberemos resolver la ecuación del movimiento

$$m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} = F(t) \quad (5-22)$$

Para las componentes  $y$  y  $z$  existen ecuaciones análogas. El problema estriba en determinar  $v$  y  $x$  a partir de esta ecuación. Si  $v$  y  $x$  son funciones dadas del tiempo, la fuerza se hallará geoméricamente a partir de la pendiente de la curva representativa de  $p$  en función de  $t$  (cap. 3), o analíticamente por derivación. Los aspectos analíticos de este problema son puramente matemáticos y para detalles remitiremos al lector a los textos clásicos de Cálculo infinitesimal. Vamos a presentar solamente un repaso breve del método fundamental que interviene en dicho análisis.

Para expresar que una cantidad, por ejemplo  $x$ , depende del tiempo, escribiremos  $x = x(t)$ , donde  $t$  es la variable de la que depende  $x$ . La dependencia funcional de  $t$  puede ser  $x(t) = Ct^2$ ,  $x = A \sin \omega t$ , etc. Supongamos ahora que para una  $x(t)$  dada queremos hallar la velocidad y aceleración correspondientes  $v(t)$  y  $a(t)$ . Como ejemplo, consideremos una función sencilla tal como  $x = Ct^2$ . El valor de la constante  $C$  depende de las unidades de medida de  $x$  y  $t$ , y supondremos que se han tomado de manera que la constante sea igual a la unidad. Tenemos entonces

$$x = t^2$$

Para determinar la velocidad instantánea que, por definición, es el límite al que tiende  $\Delta x / \Delta t$  cuando  $\Delta t$  tiende a cero, determinaremos primeramente el valor de  $\Delta x$  es decir, el incremento de la coordenada  $x$  del cuerpo cuando el tiempo crece de  $t$  a  $t + \Delta t$ . Evidentemente, este incremento es

$$\begin{aligned} \Delta x &= x(t + \Delta t) - x(t) = (t + \Delta t)^2 - t^2 \\ &= t^2 + (\Delta t)^2 + 2t\Delta t - t^2 = 2t\Delta t + (\Delta t)^2 \end{aligned} \quad (5-23)$$

En consecuencia, obtenemos

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = 2t + \Delta t$$

que se convierte en la velocidad instantánea al hacer tender a cero  $\Delta t$ :

$$v = \frac{dx}{dt} = 2t$$

Así, cuando el cuerpo se halla en  $x = t^2$ , su velocidad es  $v = 2t$ . Análogamente, podemos hallar la aceleración calculando el límite de  $\Delta v/\Delta t$ :

$$a = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2(t + \Delta t) - 2t}{\Delta t} = 2$$

Si partimos de una dependencia más general del tiempo, tal como  $x = t^n$ , la velocidad resulta ser

$$v = \frac{dx}{dt} = nt^{n-1} \quad (5-24)$$

y para  $n = 2$ , se reduce a  $2t$ , como antes. La aceleración correspondiente es

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = n(n-1)t^{n-2}$$

Análogamente, cuando la posición es  $x = kt^n$ , donde  $k$  es constante, la velocidad resulta ser  $v = knt^{n-1}$ .

Cuando una función es una suma de términos, su derivada no es más que la suma de las derivadas de los distintos términos. Por ejemplo, si  $x = t^2 + t^3$ , la derivada es  $dx/dt = 2t + 3t^2$ . Si la función  $x = x(t)$  es el producto de dos funciones del tiempo,  $x = f(t)g(t)$ , su derivada es  $dx/dt = f(t)(dg/dt) + g(t)(df/dt)$ . Podemos ver que esta relación es compatible con las fórmulas anteriores considerando, por ejemplo,  $x = t^5$ . Según la ecuación (5-24), la derivada de esta función es  $dx/dt = 5t^4$ . Si consideramos  $t^5$  como producto de  $t^2$  por  $t^3$ , la «fórmula del producto» da  $dx/dt = 2t \cdot t^3 + t^2 \cdot 3t^2 = 5t^4$ .

A partir de la definición general y del procedimiento dados por la ecuación (5-23) podrán encontrarse siempre las derivadas de funciones más complicadas. Se dispone, además, de tablas extensas de  $dx/dt$  para gran número de funciones  $x(t)$ .

**EJEMPLO.** La posición de un cuerpo queda determinada por  $x = 4t - 3t^3$ , donde  $x$  se mide en metros y  $t$  en segundos. ¿Cuándo es nula la velocidad del cuerpo y cuál es entonces la aceleración? ( $t$  es positivo).

Utilizando la expresión general de la ecuación (5-24), obtenemos la derivada de  $x$  respecto al tiempo

$$v = \frac{dx}{dt} = 4 - 9t^2 \text{ m/s}$$

Si hacemos  $v = 0 = 4 - 9t^2$ , hallamos  $t = (\pm)2/3$  s. Análogamente, la aceleración se obtiene derivando la expresión de la velocidad:

$$a = \frac{dv}{dt} = -18t$$

Cuando  $t = 2/3$  s, la aceleración es  $-12$  m/s<sup>2</sup>.

Consideremos el caso contrario en el que se da  $F(t)$  y se buscan  $v(t)$  y  $x(t)$ . Empecemos con el caso familiar de una aceleración constante  $a_0$ , y tenemos

$$m \frac{dv}{dt} = F_0 \quad \text{o sea} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{F_0}{m} = a_0$$

Como la cantidad de movimiento cedida en unidad de tiempo es constante, se deduce que en un tiempo  $t$  la variación total de cantidad de movimiento es igual a  $F_0 t$ . Así pues, si en  $t = 0$  es  $p_0$ , la cantidad de movimiento del cuerpo en el instante  $t$  será:

$$p(t) = p_0 + F_0 t \quad \text{o sea} \quad v = v_0 + \frac{F_0}{m} t = v_0 + at$$

Consideremos ahora una fuerza proporcional al tiempo, es decir,

$$\frac{dp}{dt} = F = kt$$

donde  $k$  es constante. Cuando la fuerza es  $F = kt$ , la cantidad de movimiento  $p$  debe ser una función del tiempo cuya derivada  $dp/dt$  sea igual a  $kt$ . En nuestro ejemplo,

$$p(t) = k \frac{t^2}{2} + \text{const} \quad (5-25)$$

ya que la derivada  $dp/dt$  da la fuerza  $F(t) = dp/dt = kt$ . Se ha añadido la constante para tener en cuenta el valor que existe en el instante  $t = 0$ , o en otro instante cualquiera, de la cantidad de movimiento. Ya que si es  $F = kt$  la fuerza,

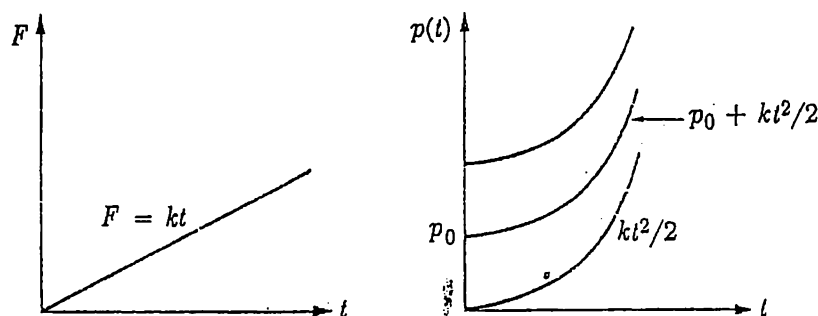


Fig. 5-12. La cantidad de movimiento correspondiente a la fuerza  $F_x = kt$  es  $p(t) = kt^2/2 + C$ .

cualquiera de las curvas paralelas  $p(t) = kt^2/2 + \text{const.}$  de la figura 5-12 es una función cantidad de movimiento posible. Para seleccionar la curva aplicable a un problema particular, deberemos especificar el movimiento describiendo, por ejemplo, las condiciones en que se inició, es decir, el valor de la cantidad de movimiento en  $t = 0$ . Si este valor es  $p(0)$ , la constante de la ecuación 5-25 será, simplemente,  $p(0)$  y tendremos

$$p(t) - p(0) = k \frac{t^2}{2}$$

Si, en vez de esto, conocemos el valor  $p(t_1)$  de la cantidad de movimiento en un instante  $t_1$ , en vez de en  $t = 0$ , hallamos que  $\text{const} = p(t_1) - kt_1^2/2$ . Incorporaremos esto en la ecuación 5-25 y se obtiene

$$p(t) - p(t_1) = k \frac{t^2}{2} - k \frac{t_1^2}{2} \quad (5-26)$$

En principio, el procedimiento, ilustrado en los casos particulares anteriores, para calcular la cantidad de movimiento a partir de una fuerza dada, puede aplicarse a una función fuerza arbitraria. En otras palabras, con la fuerza  $F(t)$  dada como función del tiempo, la cantidad de movimiento es igual a aquella función del tiempo que tenga como derivada la función fuerza. Al igual que en los ejemplos presentados, siempre existe una constante indeterminada que, no obstante, puede determinarse conociendo la cantidad de movimiento en un instante, y que conduce a una relación análoga a la ecuación 5-25 para el incremento de la cantidad de movimiento.

La función cuya derivada es igual a  $F(t)$  recibe el nombre de *integral* de  $F(t)$  y se representa por  $\int F(t) dt$ . Luego, tendremos en general

$$p(t) = \int F(t) dt + \text{const} \quad (5-27)$$

La función integral de  $F(t) = kt$  resulta ser  $\int F(t) dt = kt^2/2$ . Una vez obtenida la función integral, se obtiene análogamente la posición de la partícula a partir de  $m(dx/dt) = p(t)$ .

**EJEMPLO.** Un cuerpo parte en el instante  $t = 0$  desde  $x = 5$  m con velocidad  $v = 3$  m/s dirigida en la dirección y sentido positivo del eje  $x$ . Durante el intervalo de tiempo comprendido entre  $t = 0$  y 3 s, se halla sometido a una fuerza  $F = 4t^3$  N dirigida según las  $x$  positivas. ¿Cuáles son la velocidad y posición del cuerpo en el instante  $t = 1$  s? La masa del cuerpo es 0,5 kg.

La aceleración es  $dv/dt = a(t) = 4t^3/0,5 = 8t^3$ , con lo que  $v(t) = 8t^4/4 + C_1$ . En el instante  $t = 0$ ,  $v(0) = 3$  m/s, con lo que  $C_1 = 3$  y  $v(t) = 2t^4 + 3$ . La posición se obtiene a partir de  $dx/dt = v(t) = 2t^4 + 3$ , es decir,  $x = 2t^5/5 + 3t + C_2$ . En el

instante  $t = 0$  tenemos  $x = 5$ , con lo que  $C_2 = 5$ . En consecuencia,  $x = 0,4 t^5 + 3t + 5$ . Por tanto, en el instante  $t = 1$ , obtenemos  $v = 5$  m/s y  $x = 0,4 + 3 + 5 = 8,4$  m.

**Trayectoria.** Una vez halladas, en función del tiempo, las componentes de la velocidad y las coordenadas de la posición a partir de la ecuación (5-22), la trayectoria de la partícula queda definida en forma paramétrica; es decir, la relación existente entre  $x$  e  $y$  (en el movimiento plano) está expresada indirectamente en función del parámetro  $t$  (tiempo). Eliminando  $t$ , obtenemos la ecuación de la trayectoria, según pudo verse anteriormente al tratar del movimiento de proyectiles.

**EJEMPLO.** El movimiento en un plano de una partícula de masa  $m$  está determinado por las relaciones

$$x = 3t^2, \quad y = 2t^3$$

donde  $x$  viene dada en metros y  $t$  en segundos: (a) ¿Cuáles son la magnitud, dirección y sentido de la fuerza que se ejerce sobre la partícula en el instante  $t = 1/2$  s? (b) ¿Cuál es el ángulo que forman los vectores fuerza y velocidad? (c) ¿Cuál es la ecuación de la trayectoria de la partícula (y función de  $x$ )?

(a) Las componentes de la velocidad son

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 6t, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = 6t^2$$

y las componentes de la aceleración son

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 6, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = 12t$$

En el instante  $t = 1/2$  s, las componentes de la aceleración son  $a_x = 6$  y  $a_y = 6$ . La magnitud de la aceleración es entonces  $a = 6\sqrt{2}$  y forma un ángulo de  $45^\circ$  con el sentido positivo del eje  $x$ . La fuerza tendrá la magnitud  $|F| = ma$  e igual dirección y sentido que la aceleración.

(b) El vector velocidad tiene en el instante  $t = 1/2$  las componentes  $v_x = 3$  y  $v_y = 6/4$ . Formará, pues, con el semieje positivo de las  $x$  un ángulo  $\theta_v = \arctg(v_y/v_x) = \arctg[6/(3 \cdot 4)] = \arctg(1/2) = 26,6^\circ$ . El ángulo que forman la fuerza y la velocidad será, pues,  $45 - 26,6 = 18,4^\circ$ .

(c) Eliminando  $t$  se llega a  $t = \sqrt{x/3}$ , y por tanto

$$y = 2 \left( \frac{x}{3} \right)^{3/2}$$



## PROBLEMAS

5-1. Desde lo alto de un despeñadero de altura  $h$  sobre un plano horizontal, se deja caer un cuerpo  $A$ . Simultáneamente, se dispara horizontalmente con una velocidad  $v$ , desde el mismo punto, otro cuerpo  $B$ . ¿Cuál de los dos cuerpos alcanzará antes el suelo? Despréciase la resistencia del aire.

5-2. Desde el suelo y con un ángulo de elevación de  $45^\circ$  se dispara un proyectil con celeridad 400 m/s. ¿Cuánto tardará en volver al suelo? Despréciase la resistencia del aire.

5-3. Se dispara un proyectil desde el suelo de manera que su alcance sea  $l$  y su altura máxima sobre el suelo,  $h$ . ¿Cuáles son la velocidad inicial y el ángulo de elevación del proyectil expresados en función de  $h$ ,  $l$  y  $g$ ? Despréciase la resistencia del aire.

5-4. Con un ángulo de elevación de  $30^\circ$  y una celeridad de 200 m/s se dispara una partícula de 100 g. (a) ¿Dónde alcanzará el suelo el proyectil? (b) Si representamos por  $l$  la distancia pedida en (a), determinar la magnitud y dirección del vector cantidad de movimiento cuando la coordenada  $x$  de la partícula es 0,  $l/4$ ,  $l/2$ ,  $3l/4$  y  $l$ . (c) Tomando origen común para todos los vectores determinados en (b), trácese un diagrama vectorial de las cantidades de movimiento. Dense cuenta de que los extremos de los vectores cantidad de movimiento se hallan sobre una recta vertical y que la variación en unidad de tiempo del vector cantidad de movimiento es igual a  $mg$ . (d) ¿Cuál es la variación total de cantidad de movimiento de la partícula durante su movimiento? (e) Obsérvese que las direcciones de los vectores fuerza y velocidad son diferentes en todo momento. ¿Cuándo serán perpendicu-

lares los vectores fuerza y velocidad? Despréciase siempre la resistencia del aire.

5-5. Un cañón situado en  $x = 0$ ,  $y = 0$  tiene un alcance máximo  $l_m$ . Determinar los dos ángulos de elevación que corresponden a un blanco situado en

$$x_1 = l_m/2, \quad y_1 = l_m/4$$

5-6. Se dispara un proyectil desde un lugar del suelo de manera que el alcance y tiempo de vuelo previstos sean  $l$  y  $T$ , respectivamente. En el punto más elevado de su trayectoria, explota el proyectil, dividiéndose en dos partes iguales. Después de la explosión, las dos partes se mueven en el mismo plano que la trayectoria inicial. Al cabo de un tiempo  $T/2$  después de la explosión, una de las partes alcanza el suelo en el punto desde el que se disparó el proyectil. ¿Dónde y cuándo alcanzará el suelo la otra parte?

5-7. Si se halla en órbita un satélite artificial a una altura de 300 km sobre la superficie terrestre, ¿cuál debe ser la velocidad del satélite? El radio terrestre es de 6 370 km. Utilícese  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ . ¿Con qué frecuencia dará vueltas alrededor de la Tierra y durante cuánto tiempo será visible desde un punto de la superficie terrestre?

5-8. A un extremo de un resorte que tiene, indeformado, una longitud de 0,5 m y cuya constante es de 400 N/m, se fija un cuerpo de 2 kg. A éste se le hace recorrer una circunferencia horizontal sobre una mesa exenta de rozamientos mientras se mantiene fijo a la mesa el otro extremo del resorte. (a) Si el radio de la circunferencia resulta ser de 1 m, ¿cuál será en tal caso la celeridad del cuerpo?

(b) Si se duplica la celeridad, ¿cuál deberá ser el nuevo radio?

5-9. En un vehículo de pruebas de laboratorio, se sujeta una persona a un asiento situado al extremo de un brazo horizontal de 5 m de longitud y se hace girar el brazo alrededor de un eje vertical situado en el otro extremo. ¿Cuántas revoluciones por segundo debe dar el brazo para imprimir a la persona una aceleración radial de  $10g$ ? ( $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ).

5-10. Una cuerda de longitud  $l$  tiene en uno de sus extremos un cuerpo de peso  $p$ . El otro extremo de la cuerda se mantiene fijo al moverse el cuerpo recorriendo una circunferencia vertical. (a) ¿Cuál es la menor celeridad que puede tener el cuerpo en la parte más alta de la trayectoria y mantenerse en ella? (b) Si, en las condiciones anteriores, la tensión en la parte más baja es  $6mg$ , ¿cuál es la celeridad en la parte inferior?

5-11. Un motorista recorre una circunferencia horizontal por la pared de un cilindro vertical de radio  $r$ . ¿Cuál es la mínima celeridad que lo mantendría en movimiento si es  $\mu$  el coeficiente de rozamiento entre las ruedas y la pared? Aplicación al caso  $r = 5 \text{ m}$  y  $\mu = 0,25$ .

5-12. Un cuerpo sujeto al extremo de una cuerda recorre una circunferencia vertical. Cuando la cuerda forma un ángulo de  $45^\circ$  con el sentido hacia arriba de la vertical, se anula la tensión de la cuerda. ¿Cuál es la celeridad del cuerpo en dicho punto? Describir el movimiento subsiguiente del cuerpo. ¿Dónde se halla el cuerpo cuando vuelve a tensarse la cuerda? (Se permite la resolución gráfica.)

5-13. Un coche recorre una curva horizontal de radio de curvatura  $r$ . (a) Si la carretera es horizontal y el coeficiente de

rozamiento es  $\mu$ , ¿cuál es la celeridad máxima que puede llevar el coche sin empezar a deslizar? (b) ¿Qué ángulo debe tener de pendiente hacia adentro la carretera para que la fuerza de contacto que se ejerce sobre el coche que se mueve a velocidad  $v$ , sea normal a la carretera? (c) ¿Qué influencia tendrá sobre el resultado la masa del coche?

5-14. Una vagoneta recorre un «aro de la muerte» cuyo radio de curvatura es  $r$  en la parte más alta y en la más baja. La fuerza de contacto entre la vagoneta y el carril no debe superar al séxtuplo del peso de la vagoneta. ¿Cuál será, pues, la celeridad máxima de la vagoneta en la parte más baja? ¿Cuál es la mayor celeridad que puede tener en la parte superior para que la fuerza de contacto que se ejerce en dicho punto sobre la vagoneta, sea cero?

5-15. En el modelo de BOHR del átomo de hidrógeno se considera que en torno a un pequeño núcleo cargado positivamente se mueve un electrón recorriendo una trayectoria circular. La fuerza electrostática que se ejerce entre electrón y núcleo está dada por

$$F = \frac{2,3 \cdot 10^{-19}}{r^2} \text{ dynas}$$

donde  $r$  (en cm) es la separación entre electrón y núcleo. ¿Cuál debe ser el orden de magnitud de la velocidad del electrón si su órbita tiene un radio  $r \simeq 10^{-8} \text{ cm}$ ? La masa del electrón es  $m = 9,1 \cdot 10^{-28} \text{ g}$ .

5-16. Una partícula pequeña se mueve en una órbita gravitatoria próxima a la superficie de una esfera de densidad  $\rho$ . ¿Cuál es el tiempo empleado por la partícula en dar una vuelta?

5-17. Una partícula con carga eléctri-

ca  $q$  y masa  $m$  atraviesa un campo eléctrico constante  $E$  entre dos placas planas paralelas de longitud  $x_0$ . La partícula penetra en el campo con una velocidad  $v$  perpendicular al campo eléctrico. ¿Cuál es la velocidad de salida de la partícula?

5-18. Se proyecta una partícula de carga eléctrica  $q$  y masa  $m$  en un campo magnético constante de manera que su velocidad  $v$  forme un ángulo  $\phi$  con las líneas de fuerza del campo magnético. Describir el movimiento.

5-19. Supongamos que, en el problema anterior, se añade un campo eléctrico de intensidad  $E$ , paralelo a las líneas de fuerza del campo magnético. ¿Cuál será la naturaleza del movimiento?

5-20. Una partícula se mueve con velocidad angular  $\omega$  constante en una trayectoria circular de radio  $r$ . La posición angular  $\theta$  de la partícula se mide respecto al eje  $x$  y se toma  $t = 0$  de manera que se tenga  $\theta = \omega t$ . (a) Trazar, en la posición de la partícula, el vector velocidad en el instante  $t$  y determinar las proyecciones de este vector sobre los ejes  $x$  e  $y$ . (b) Trazar el vector aceleración y determinar sus proyecciones sobre los ejes  $x$  e  $y$ . Comparar los resultados con los obtenidos en el apartado 5-2.

5-21. Una partícula de masa  $m$  se mueve siguiendo una recta, partiendo del

reposo en  $t = 0$  bajo la acción de una fuerza  $F_1 = F_0(t/t_0)$ , donde  $F_0$  y  $t_0$  son constantes. En  $t = t_0$  se anula bruscamente la fuerza y empieza a actuar una nueva fuerza  $F_2 = -F_0[(t - t_0)^2/t_0^2]$ . ¿Dónde y cuándo empezará a volver al origen la partícula?

5-22. Un cuerpo se mueve siguiendo una trayectoria respecto a un sistema de coordenadas  $xy$  de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}x &= at^2, & a &= 3 \text{ cm/s}^2 \\y &= bt^3 & b &= 2 \text{ cm/s}^3\end{aligned}$$

donde  $t$  es el tiempo. (a) ¿En qué instante  $t_2$  es paralela la velocidad del cuerpo a la recta  $x = y$ ? (b) ¿En qué instante  $t_1$  es paralela la aceleración a la recta  $x = y$ ? (c) ¿Cuál es la velocidad media (magnitud y dirección) en el intervalo de tiempo  $t_2 - t_1$ ?

5-23. A partir de la distancia conocida de la Tierra al Sol, la masa conocida de la Tierra y del tiempo conocido que tarda la Tierra en dar una vuelta completa alrededor del Sol, hallar la fuerza que debe estar ejerciéndose sobre la Tierra.

Una buena cuerda de nylon de 1 cm de diámetro soportaría un peso de 10 000 kg. ¿Cuántas cuerdas de este tipo serían necesarias para mantener la Tierra en su órbita, en ausencia de la fuerza gravitatoria?

## IMPULSO Y TRABAJO

*Resumen.* Si se conoce la posición de un cuerpo en función del tiempo, puede determinarse el comportamiento detallado de la fuerza que se ejerce sobre el cuerpo. Inversamente, si se conoce en función del tiempo o de la posición, la fuerza que se ejerce sobre el cuerpo, podrán predecirse los detalles del movimiento del cuerpo. En cambio, si sólo se conocen las variaciones totales de cantidad de movimiento o celeridad de un cuerpo, sólo se podrán determinar ciertos efectos integrales de la fuerza conocidos, respectivamente, por los términos impulso y trabajo. Inversamente, de los valores conocidos del impulso y del trabajo pueden hallarse las variaciones totales de la cantidad de movimiento y de la energía cinética, respectivamente. El impulso, que es igual a la variación de la cantidad de movimiento, es un vector. El trabajo, que está relacionado con la variación de la energía cinética, es una cantidad escalar.

Como ya se mencionó anteriormente, el estudio del movimiento se ocupa, en términos generales, de dos tipos de problema. En uno de ellos, se conoce el movimiento de antemano y hay que hallar la fuerza que se ejerce sobre el cuerpo. Este tipo de problema es el más fundamental para la Física y en los capítulos anteriores hemos dado varios ejemplos de él. Son ejemplos clásicos la teoría de la gravitación universal de NEWTON y los estudios de RUTHERFORD que condujeron al modelo atómico nuclear (véase cap. 10). En el otro tipo de problemas se conocen (o se consideran conocidas) las fuerzas y hay que determinar el movimiento del cuerpo. Intentamos ahora predecir qué fenómenos van a ocurrir —cuál será el movimiento de un satélite o de un cometa, cuántos botes dará una pelota de goma antes de «pararse», cuál es el movimiento de una partícula cargada en un campo conocido, etc. Evidentemente, cuando decimos que se conocen las fuerzas, queremos significar que se ha estudiado el movimiento de otros cuerpos en un medio ambiente análogo y que conocemos, o creemos conocer, a partir de dicho estudio, las fuerzas y cómo dependen del tiempo, celeridad, masa, carga eléctrica y otros parámetros que caracterizan al cuerpo, su movimiento y su medio ambiente.

Sin embargo, en ocasiones no hay que abordar la descripción de un movimiento en todos sus detalles. Por ejemplo, en los experimentos de choque estu-

diados en los capítulos anteriores no podíamos, generalmente, determinar las posiciones de los cuerpos en colisión como funciones del tiempo, durante el corto tiempo de choque; sólo se hallaban las variaciones totales de cantidad de movimiento. Análogamente, cuando un arma de fuego dispara una bala es relativamente sencillo determinar su velocidad de salida, si bien no es tan sencillo determinar la posición de la bala en función del tiempo, mientras recorre el cañón. En los problemas de este tipo sólo se observan variaciones totales del movimiento y no puede determinarse en detalle el comportamiento de la fuerza en función del tiempo o de la posición. Sólo podrán determinarse ciertos valores medios o integrales de la fuerza durante el intervalo de tiempo o a lo largo de la distancia que se considere. En el caso del choque de dos cuerpos hallaremos que, a partir de las variaciones de cantidad de movimiento de los cuerpos, puede hallarse la integral extendida al tiempo de la fuerza que se ejerce durante el choque sobre uno de los cuerpos. Si se conoce la duración del choque puede hallarse también el valor medio (en el tiempo) de la fuerza. La integral de la fuerza extendida al tiempo, que es igual al producto del valor medio (en el tiempo) de la fuerza por el tiempo que dura el choque, recibe el nombre de *impulso de la fuerza*. Análogamente, en el ejemplo citado referente a la bala, encontraremos que su energía cinética  $mv^2/2$  está relacionada con la integral de la fuerza extendida a la longitud del cañón. A partir de la longitud conocida del cañón, podemos obtener el valor medio (en el espacio) de la fuerza. La integral de la fuerza extendida al espacio, que es igual a la fuerza media (en el espacio) multiplicada por el desplazamiento de la bala, recibe el nombre de *trabajo de la fuerza*. El trabajo de una fuerza es, pues, en esencia, el producto de una fuerza por una longitud, mientras que el impulso es el producto de una fuerza por un tiempo.

Si se conocen el impulso y el trabajo de una fuerza, podrán predecirse las variaciones totales de cantidad de movimiento y de energía cinética, respectivamente. Aunque se conozca en detalle la fuerza en función del tiempo o de la posición, puede no interesarnos predecir los detalles del movimiento del cuerpo, sino solamente las variaciones de cantidad de movimiento o de energía cinética. Estas variaciones pueden determinarse directamente a partir del impulso y del trabajo de la fuerza, sin necesidad de calcular la posición del cuerpo en función del tiempo. Hallaremos que el empleo del trabajo de una fuerza para calcular variaciones de celeridad de un cuerpo es especialmente útil en el caso de los llamados movimientos vinculados o sometidos a ligaduras, en los que el cuerpo se halla obligado a seguir una trayectoria determinada. Ejemplos típicos de movimientos vinculados son los del carrito que recorre el «aro de la muerte» y el movimiento de un péndulo. Los aspectos cuantitativos de los conceptos de impulso y trabajo se establecerán con ayuda de experimentos sencillos con un carrito sobre una pista horizontal o con un disco suspendido por aire sobre un plano horizontal, bajo la influencia de una fuerza constante.

**6-1 Impulso de una fuerza.** Para desarrollar los conceptos de impulso y trabajo, comenzaremos con el experimento sencillo ilustrado esquemáticamente en la figura 6-1. Se tira de un carrito colocado en una pista horizontal, con una fuerza constante  $F$  dirigida según la pista. Puede leerse la magnitud de la fuerza en un dinamómetro intercalado entre el mecanismo tractor y el carrito. (El movimiento es unidimensional y, de momento, no tenemos por qué atender al carácter vectorial de la fuerza). Tiramos del carrito, que parte del reposo, con la

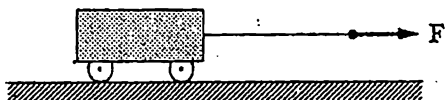


Figura 6-1.

fuerza constante durante un tiempo  $\Delta t$  y medimos la velocidad adquirida por el carrito al final de dicho intervalo de tiempo. Si repetimos el experimento con carritos de masas diferentes, observaremos que las velocidades finales son diferentes, pero que las cantidades de movimiento entregadas a los distintos carritos son iguales todas ellas y de valor  $F \Delta t$ . Es decir, la variación de cantidad de movimiento originada por la fuerza constante  $F$  durante el tiempo  $\Delta t = t_2 - t_1$  es

$$\Delta p = F \Delta t$$

independientemente de la masa del cuerpo. Desde luego, este resultado se deduce directamente de la definición de fuerza como variación en unidad de tiempo de la cantidad de movimiento. A la cantidad  $F \Delta t$  se le da el nombre de *impulso*,  $J$ , de la fuerza (*constante*) durante el tiempo  $\Delta t$ :

$$J = F \Delta t = F(t_2 - t_1) \quad (6-1)$$

Tengamos bien presente que el efecto de un impulso dado es originar una variación de cantidad de movimiento, variación que no depende de la masa del cuerpo. Luego, una fuerza resultante de una dyna ejercida durante un segundo origina una variación de cantidad de movimiento de 1 g·cm/s tanto si la fuerza está aplicada a un grano de arena como si lo está a un transatlántico. Evidentemente, aun cuando las variaciones de cantidad de movimiento no dependen de la masa, sí dependen de ella las variaciones de velocidad.

Si se representa gráficamente la fuerza en función del tiempo (fig. 6-2), el impulso de la fuerza es proporcional geoméricamente al área limitada bajo la curva representativa de la fuerza. La constante de proporcionalidad depende de las escalas tomadas para  $F$  y para  $t$ , y de ahora en adelante supondremos que se tiene

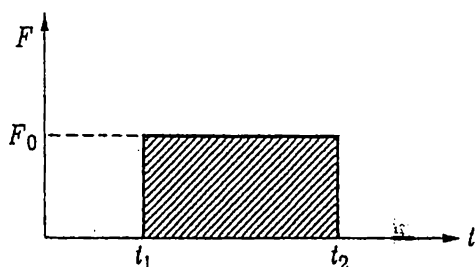


Fig. 6-2. Impulso de una fuerza constante.

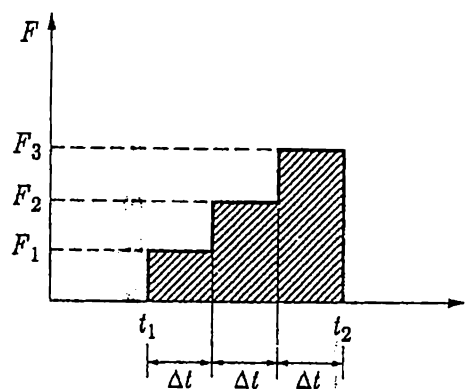


Fig. 6-3. Impulso de una fuerza que varía por escalones.

ello en cuenta al hablar del impulso como de un área. El impulso se mide en N·s, kp·s, dyna·s, etc.

Hagamos variar la fuerza por escalones, como se indica en la figura 6-3, entre los instantes  $t_1$  y  $t_2$ . En el primer intervalo  $\Delta t$  la fuerza es  $F_1$ , en el segundo ha variado a  $F_2$ , etc. La variación total de cantidad de movimiento en un intervalo de tiempo  $t_2 - t_1$  es ahora la suma de las cesiones totales de cantidad de movimiento en los distintos intervalos y tenemos

$$J = F_1 \Delta t + F_2 \Delta t + F_3 \Delta t + \dots$$

De nuevo, el impulso total de la fuerza en el intervalo de tiempo  $t_2 - t_1$  es proporcional al área limitada por la curva representativa de la fuerza entre las ordenadas correspondientes a  $t_1$  y  $t_2$ .

A continuación, dejemos que la fuerza varíe con el tiempo en forma continua, como se indica en la figura 6-4. Podemos tomar una aproximación de  $F(t)$  consistente en una sucesión de fuerzas constantes como la indicada, y el impulso total vendrá representado por el área limitada por la línea escalonada. Al ir haciendo cada vez menores los intervalos de tiempo, la línea escalonada se va aproximando más y más a la curva representativa de la fuerza y el impulso total de la fuerza podrá seguir midiéndose por el área limitada bajo la curva representativa de la fuerza entre los límites fijados por  $t_1$  y  $t_2$ .

Según ya indicamos, nos encontramos a veces ante el caso de que, habiendo observado el movimiento de un cuerpo, queremos saber algo acerca de la fuerza que se ejerce sobre él. Supongamos, por ejemplo, que hemos observado la velocidad de un cuerpo de masa  $m$  en los instantes  $t_1$  y  $t_2$ . Sabemos, entonces, que el impulso de la fuerza *resultante* que se ejerce sobre el cuerpo debe haber sido  $J = \Delta p = mv_2 - mv_1$ . Aun cuando el conocimiento de  $J$  no basta para una des-

cripción detallada de la fuerza durante el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , nos permite determinar el valor medio de la fuerza en el tiempo,

$$\bar{F} = \frac{J}{\Delta t} = \frac{p_2 - p_1}{t_2 - t_1} \quad (6-2)$$

La fuerza media es tal que  $\bar{F}(t_2 - t_1)$  esté representada por el área total limitada bajo la curva representativa de la fuerza  $F(t)$ , según se indica esquemáticamente en la figura 6-4. El valor máximo de la fuerza en el intervalo de tiempo es siempre igual o mayor que  $\bar{F}$  y es igual a  $\bar{F}$  cuando la fuerza es constante.

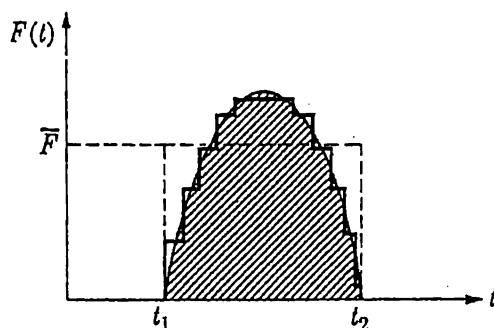


Fig. 6-4. Impulso de una fuerza variable en forma continua.

Las anteriores consideraciones unidimensionales relativas al impulso de una fuerza pueden aplicarse directamente a las *componentes* de una fuerza arbitraria. Así, si la fuerza  $\mathbf{F}$  es constante durante un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , el vector  $\mathbf{J} = \mathbf{F} \Delta t$  es el impulso de la fuerza durante el intervalo de tiempo  $\Delta t$  y la variación correspondiente de cantidad de movimiento viene dada por

$$\Delta p = \mathbf{J} = \mathbf{F} \Delta t \quad (6-3)$$

Si la fuerza no fuese constante durante el intervalo  $\Delta t$ , la relación (6-3) seguiría siendo aplicable si se sustituyera  $\mathbf{F}$  por la fuerza media  $\bar{\mathbf{F}}$ .

La interpretación del impulso como área también es aplicable a las componentes de la fuerza. Es decir, la componente  $x$  del impulso puede representarse por el área limitada por la curva representativa de  $F_x$  en función de  $t$ .

**EJEMPLO 1.** Una pelota de 200 g llega al puesto de un bateador con una velocidad de 25 m/s siguiendo una dirección horizontal. La pelota sale disparada por el bate según un ángulo de elevación de  $30^\circ$  y con una velocidad de 50 m/s. ¿Cuál es el impulso de la fuerza ejercida por el bate sobre la pelota? ¿Cuál es la fuerza media que se ejerce sobre el bate si el tiempo de contacto entre bate y pelota es de 0,01 s?



Las cantidades de movimiento antes y después del choque tienen por magnitudes

$$p_1 = mv_1 = 0,2 \cdot 25 = 5 \text{ N}\cdot\text{s}, \quad p_2 = mv_2 = 0,2 \cdot 50 = 10 \text{ N}\cdot\text{s}$$

La magnitud de la cantidad de movimiento cedida a la pelota será

$$\Delta p = \sqrt{(5 + 10 \cos 30^\circ)^2 + (10 \sin 30^\circ)^2} \simeq 14,5 \text{ N}\cdot\text{s}$$

La magnitud de la fuerza media es, pues,

$$\bar{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{14,5}{0,01} = 1450 \text{ N}$$

La dirección y sentido de la fuerza media son iguales que los del vector  $\Delta p$ , ilustrado en la figura 6-5.

**EJEMPLO 2.** Un cuerpo de masa  $m = 2 \text{ kg}$  recorre el eje  $x$  en un plano horizontal y penetra en una región en la que se halla sometido a una fuerza de la misma dirección  $x$ , que depende del tiempo en la forma indicada en la figura 6-6.

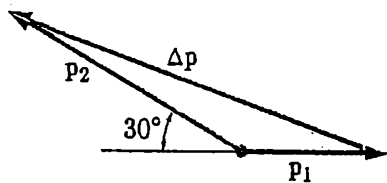
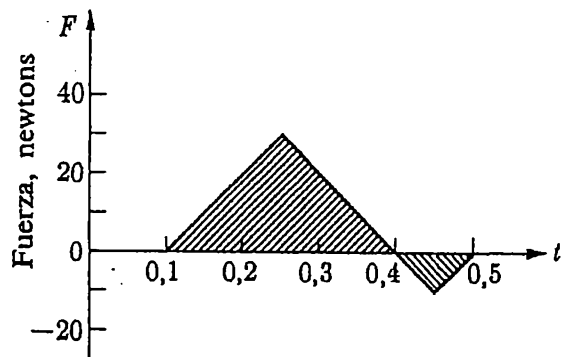


Figura 6-5



Tiempo  $t$ , segundos

Figura 6-6

El «área» total, medida en  $\text{N}\cdot\text{s}$ , limitada bajo la gráfica de fuerza en el intervalo entre 0,1 y 0,5 s vemos que es  $(0,4 - 0,1) (30/2) - (0,5 - 0,4) (10/2) = 4,5 - 0,5 = 4 \text{ N}\cdot\text{s}$ , que es igual al impulso de la fuerza en el intervalo de tiempo entre 0,1 y 0,5 s. Como consecuencia, la celeridad del cuerpo variará en  $\Delta v = 4/2 = 2 \text{ m/s}$ .

6

**El impulso como integral de la fuerza.** Supongamos ahora que la fuerza que se ejerce sobre un cuerpo varíe con continuidad y que se dé en forma matemática como función del tiempo. Queremos expresar el impulso de la fuerza en el intervalo  $t_2 - t_1$ . Tendremos, para la componente  $x$  de la cantidad de movimiento

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x(t).$$

Según lo dicho en el apartado 5-4, la función cuya derivada es  $F_x(t)$  se representa matemáticamente por  $\int F_x(t) dt$ , y se llama integral de  $F_x(t)$ . Así, pues, en general, tendremos

$$p_x(t) = \int F_x(t) dt + \text{const.} \quad (6-4)$$

Para obtener el impulso de una fuerza en el intervalo de tiempo  $t_2 - t_1$ , no haremos mas que evaluar  $p_x(t_2) - p_x(t_1)$ , es decir, la diferencia entre los valores de la función  $\int F_x(t) dt$  en  $t_2$  y  $t_1$ . Ya sabemos, por matemáticas, que dicha diferencia se representa por  $\int_{t_1}^{t_2} F_x(t) dt$ , y se llama integral *definida* de  $F_x(t)$ . Luego, tenemos

$$J_x = p_x(t_2) - p_x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} F_x(t) dt \quad (6-5)$$

Tengamos presente que  $\int_{t_1}^{t_2} F_x(t) dt$  puede interpretarse como el área bajo la curva representativa de la fuerza, limitada por los valores  $t_1$  y  $t_2$ , según se describió anteriormente.

Podemos extender a dos y a tres dimensiones este estudio. Así, si son  $F_x$ ,  $F_y$ , y  $F_z$ , las componentes de la fuerza ejercida sobre un cuerpo, las componentes del impulso vendrán dadas por

$$J_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt, \quad J_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt, \quad J_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt \quad (6-6)$$

Estas relaciones pueden sustituirse por la relación vectorial

$$p_2 - p_1 = J = \int_{t_1}^{t_2} F dt \quad (6-7)$$

La ecuación (6-7) se conoce con el nombre de *teorema de la cantidad de movimiento*, si bien no hemos de perder de vista que es consecuencia inmediata de la definición de fuerza.

*Impulso sobre un sistema de partículas o sobre un cuerpo rígido.* Hemos visto anteriormente que el movimiento del centro de masa de un sistema de partículas queda determinado por las *fuerzas exteriores*. Es decir, demostramos que

$$F = M \frac{dV}{dt}$$

donde  $M$  es la masa total,  $V$  es la velocidad del centro de masa y  $F$  es la fuerza exterior resultante. A partir de aquí se deduce inmediatamente que si se conocen en función del tiempo las fuerzas exteriores, puede hallarse la cantidad  $\Delta P = M \Delta V$  donde  $\Delta V$  es la variación de velocidad del centro de masa.

$$J = \Delta P = \int_{t_1}^{t_2} F dt \quad (6-8)$$

Si sobre un cuerpo rígido actúa un impulso dado  $J$ , el movimiento del centro de masa no dependerá del punto de aplicación de  $J$ . Si se aplica  $J$  en el centro de masa, el cuerpo sólo se hallará animado de traslación; si se aplica  $J$  a una cierta distancia del centro de masa, el cuerpo girará al tiempo que se traslada, según veremos en el capítulo 12. Mientras sea el mismo en ambos casos el impulso  $J$ , el movimiento del centro de masa será el mismo.

**6-2 Trabajo de una fuerza.** Volvamos al experimento de movimiento unidimensional de un carrito tirado por una fuerza a lo largo de una pista horizontal, indicado en la figura 6-1. Cuando se aplicaba la fuerza durante un intervalo de *tiempo* constante  $\Delta t$ , la variación de cantidad de movimiento del carrito era siempre la misma, independientemente de cuál fuera la masa del carrito. Ahora vamos a tirar de los carritos con una fuerza  $F$  constante a lo largo de una *distancia* dada, digamos, desde  $x = 0$  hasta  $x = x_1$ . Para recorrer la distancia  $x_1$  un carrito más pesado empleará mayor tiempo que uno más ligero y, en consecuencia, al carrito más pesado se le comunica un mayor impulso y una mayor cantidad de movimiento. Como la fuerza es constante, el carrito se acelerará uniformemente y tendremos

$$x_1 = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 \quad \text{y} \quad v_1 = \frac{F}{m} t$$

Cuando se elimina  $t$  entre estas dos expresiones, obtenemos

$$v_1 = \sqrt{2Fx_1/m}$$

o sea

$$p_1 = mv_1 = \sqrt{2mFx_1} \quad (6-9)$$

La cantidad de movimiento suministrada al carrito por la fuerza ya no es independiente de la masa de aquél, como ocurría cuando se aplicaba la fuerza durante un *tiempo* dado. La cantidad de movimiento es proporcional a la raíz cuadrada de la masa  $m$ . Sin embargo, en la ecuación (6-9) vemos que hay otra cantidad que *es la misma* para todos los cuerpos, independientemente de su masa, a saber,

$$\frac{p_1^2}{2m} = \frac{mv_1^2}{2} = Fx_1$$

Es decir, cuando se ejerce una fuerza constante a lo largo de una *distancia* especificada sobre cuerpos inicialmente en reposo, todos adquieren el mismo valor de la cantidad  $p^2/2m = mv^2/2$ . A esta cantidad se le da el nombre de *energía cinética* y la representaremos por  $E$ . Jugará un importantísimo papel en la teoría del movimiento, ya que está relacionada con la fuerza de manera tan sencilla.

También podríamos, claro está, tirar del carrito a lo largo de una distancia. Tendríamos entonces

$$E_2 = \frac{mv_2^2}{2} = Fx_2$$

y la variación de energía cinética  $\Delta E = E_2 - E_1$  entre  $x_1$  y  $x_2$  sería

$$\Delta E = F(x_2 - x_1) = F \Delta x$$

La variación de energía cinética en el intervalo  $x_2 - x_1$  sólo depende del producto de la fuerza (constante) por el desplazamiento,  $F(x_2 - x_1) = F \Delta x$  y no de la masa del cuerpo. A esta cantidad se le llama *trabajo* de la fuerza. Al igual que un impulso dado origina siempre la misma variación de cantidad de movimiento independientemente de la masa, una cantidad dada de trabajo origina siempre la misma variación de energía cinética.

La relación  $\Delta E = F \Delta x$  (o bien  $F = \Delta E / \Delta x$ ) es válida aunque no sea constante la fuerza, según puede comprenderse, con tal de tomar  $F$  como fuerza media. Entonces, en el límite para  $\Delta x \rightarrow 0$  tenemos

$$F = \frac{dE}{dx} \quad (6-10)$$

La fuerza es la variación en unidad de tiempo de la cantidad de movimiento y, también, la variación por unidad de distancia de la energía cinética.

En la deducción de la anterior relación, partimos del caso más sencillo de una fuerza constante dirigida en la dirección del movimiento y utilizamos las relaciones para aceleración uniforme para obtener  $v$  en función de  $x$ . Sin embargo, podemos obtener el resultado (6-10) de manera matemáticamente más elegante a partir de  $F = dp/dt$  de la manera siguiente: Partamos de  $\Delta p / \Delta t$ . Si es  $v$  la velocidad media en el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , tenemos  $\Delta x = v \Delta t$ . Sustituyendo  $\Delta t$  por  $\Delta x / v$ , obtenemos  $\Delta p / \Delta t = v(\Delta p / \Delta x)$ . En el límite para  $\Delta x \rightarrow 0$ , esto puede expresarse en la forma

$$F = v \frac{dp}{dx} = mv \frac{dv}{dx} = \frac{d(mv^2/2)}{dx} = \frac{dE}{dx} \quad (6-11)$$

Cuando se da la fuerza en función de  $x$ , podemos obtener la energía cinética de la ecuación (6-10) en la forma

$$E = \int F_x(x) dx + C$$

donde  $C$  es la constante de integración. La diferencia entre las energías cinéticas

en  $x_1$  y  $x_2$  se obtendrá eliminando esta constante y tenemos

$$E_2 - E_1 = \int_{x_1}^{x_2} F_x(x) dx = W \quad (6-12)$$

donde  $W = \int_{x_1}^{x_2} F_x(x) dx$  es el *trabajo* realizado por la fuerza en el intervalo  $x_2 - x_1$ . Recordemos del estudio del impulso que el trabajo puede interpretarse como el área limitada bajo la curva representativa de  $F_x$  en función de  $x$  entre los límites  $x_1$  y  $x_2$  como se indica en la figura 6-7. La ecuación (6-12) constituye la expresión matemática del llamado *teorema de las fuerzas vivas*, si bien, como en el caso del teorema de la cantidad de movimiento, es una consecuencia inmediata de la definición de fuerza.

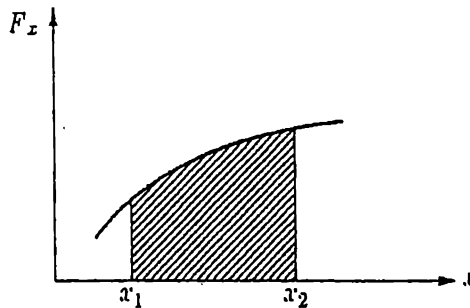


Fig. 6-7. El trabajo realizado por una fuerza viene medido por el área limitada bajo la curva representativa de  $F_x$  en función de  $x$ .

**EJEMPLO 1.** Desde una altura  $h$  sobre el suelo se suelta un cuerpo de masa  $m$ . ¿Qué velocidad llevará al alcanzar el suelo?

La fuerza  $mg$  y el desplazamiento  $h$  tienen la misma dirección y sentido, por lo que el trabajo realizado es  $mgh$ . Este trabajo se invierte en incrementar la energía cinética y tenemos

$$\frac{mv^2}{2} = mgh, \quad v = \sqrt{2gh}$$

**EJEMPLO 2.** Consideremos un resorte de constante  $K$ . Cuando se halla indeformado, su extremo se halla en  $x = 0$  (véase fig. 6-8). Se comprime el resorte mediante

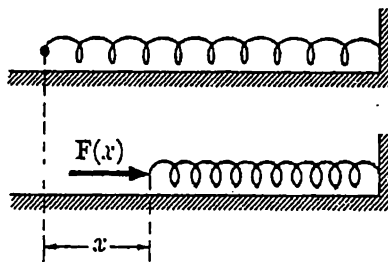


Figura 6-8.

una fuerza exterior cuya magnitud debe ser proporcional a la compresión del resorte; es decir, la fuerza exterior debe ser  $Kx$ , donde  $K$  es la constante del resorte y es igual a 100 N/m. ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza exterior sobre el resorte para comprimirlo una distancia  $x_1 = 4\text{m}$ ? La gráfica de  $F$  en función de  $x$  es la de la figura 6-9. El trabajo realizado en una compresión desde  $x = 0$  hasta  $x_1$  está representado por el área limitada bajo la curva y es

$$W = \frac{Kx_1^2}{2} = \frac{100 \cdot 16}{2} = 800 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Analíticamente,

$$W = \int_0^{x_1} F dx = \int_0^{x_1} Kx dx = \frac{Kx_1^2}{2}$$

y  $W = 800 \text{ N}\cdot\text{m}$ , como antes.

**EJEMPLO 3.** La fuerza que se ejerce sobre un cuerpo varía con la posición en la forma ilustrada en la figura 6-10. ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza?

En este caso no tenemos expresión analítica de la fuerza. No obstante, podemos hallar un valor aproximado del trabajo estimando el área limitada bajo la curva. Por ejemplo, podemos aproximar la curva representativa de la fuerza a un triángulo que tenga un área  $(0,5 - 0,1)(100/2) = 50 \cdot 0,4 = 20 \text{ N}\cdot\text{m}$ .

**Unidades de energía y trabajo.** En el sistema cgs, la unidad de trabajo es una dyna·cm, que lleva el nombre de *erg*. En el sistema Giorgi será, claro está, el newton·metro al que se da el nombre de *joule* (J). Un joule equivale a  $10^7$  erg. En el sistema terrestre, la unidad de trabajo es el *kilopondmetro* (antiguamente llamado kilogrametro) que equivale a 9,81 J.

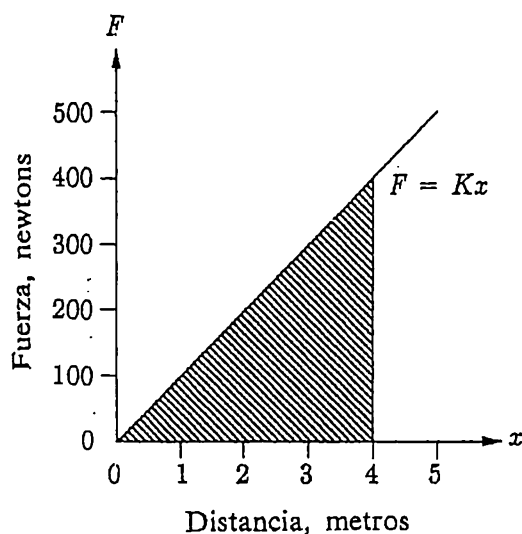


Fig. 6-9. Gráfica de  $F$  en función de  $x$  para la compresión de un resorte.

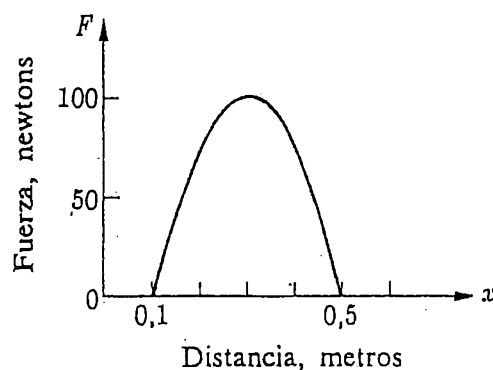


Figura 6-10

*Trabajo realizado por varias fuerzas. Fuerzas que «no trabajan».* Iniciamos nuestro estudio de la energía cinética con el movimiento de un cuerpo a lo largo de una recta bajo la influencia de una sola componente  $F_x$  de la fuerza en la dirección del movimiento. El trabajo realizado por esta fuerza única era  $\int_{x_1}^{x_2} F_x dx$  y se demostró que era igual a la variación de energía cinética en este intervalo  $\Delta E = mv_2^2/2 - mv_1^2/2$ .

Si sobre el cuerpo actuaran varias fuerzas  $F_1, F_2, F_3, \dots$  mientras se mueve en la dirección  $x$ , el principio de superposición nos dice que el movimiento del cuerpo no se altera al sustituir esas fuerzas por la fuerza resultante  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots$  cuya componente  $x$  es  $F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \dots$ . Luego, la energía cinética  $E$  será la misma en ambos casos y la variación de  $E$  vendrá dada por  $\Delta E = F_x \Delta x = W$ . Sin embargo, como  $F_x \Delta x = F_{1x} \Delta x + F_{2x} \Delta x + F_{3x} \Delta x + \dots$  el trabajo total podrá obtenerse como suma de los trabajos individuales  $W_1 = F_{1x} \Delta x$ , etc. En otras palabras, podemos determinar la variación de energía cinética del cuerpo como suma de las contribuciones individuales al trabajo de las diferentes fuerzas que se ejercen sobre el cuerpo.

Inversamente, cuando se representa una fuerza por sus componentes, la suma de los trabajos realizados por las componentes es igual al trabajo realizado por la resultante, hecho que utilizaremos en un estudio posterior.

En la práctica, cuando queramos calcular la energía cinética de un cuerpo que se mueve bajo la influencia de varias fuerzas, hallamos frecuentemente que una o varias de ellas son perpendiculares al desplazamiento del cuerpo. Por ejemplo, la fuerza de la gravedad y la componente normal de la fuerza de contacto que se ejercen sobre el carrito de la figura 6-1 no influyen sobre el movimiento en el plano  $y$ , por tanto, no contribuyen a la energía cinética y al trabajo realizado. Análogamente, una vagoneta de «montañas rusas» exenta de rozamiento (fig. 6-11) se mueve bajo la influencia de dos fuerzas, la de la gravedad y la fuerza normal que la vía ejerce sobre la vagoneta. Evidentemente, la vagoneta no tiene velocidad normal a la vía y toda su energía cinética se debe a su movimiento a lo largo de la vía. Solamente la fuerza de la gravedad tiene componente se-

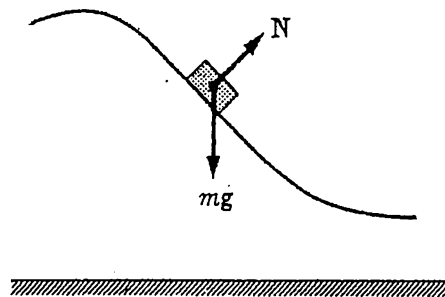


Fig. 6-11. La fuerza normal «no trabaja».

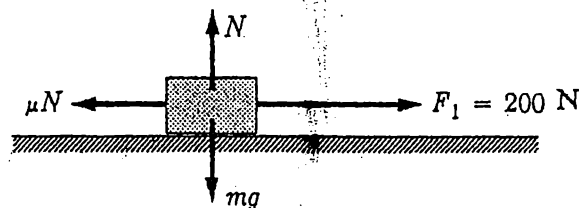


Figura 6-12

gún la vía, y esta fuerza será la única que realiza trabajo. La fuerza normal que se ejerce sobre la vagoneta se dice que «no trabaja».

Las fuerzas que «no trabajan» son, pues, perpendiculares a la dirección de movimiento de los cuerpos, por lo que no contribuyen a variar la energía cinética. Un movimiento obligado a seguir una trayectoria preestablecida, una pista o un alambre, o bien a moverse en un plano preestablecido, se dice que es un movimiento *vinculado*. En él existen fuerzas que «no trabajan», pero su conocimiento no es necesario para calcular las variaciones de energía cinética.

**EJEMPLO.** Con una cuerda, tiramos horizontalmente de un cuerpo de masa  $m = 50$  kg apoyado sobre una superficie horizontal. La fuerza horizontal aplicada al cuerpo es  $F_1 = 200$  N (fig. 6-12). El coeficiente de rozamiento en la superficie de contacto es  $\mu = 0,2$ . Si el cuerpo parte del reposo, ¿cuál será su velocidad cuando haya sido arrastrado a lo largo de una distancia  $d = 5$  m?

Las fuerzas que contribuyen al trabajo son  $F_1$  y la fuerza de rozamiento  $F_r = -\mu N$ . El trabajo realizado por la fuerza de la cuerda es  $W_1 = +F_1 d$ , y el realizado por la fuerza de rozamiento es  $W_2 = -\mu N d$ . Por tanto, el trabajo total será  $W = W_1 + W_2 = (F_1 - \mu N) d$ . La componente normal de la fuerza de contacto es  $N = mg \simeq 50 \cdot 9,81 \simeq 490$  N. El trabajo total es pues,  $W = (200 - 0,2 \cdot 490) \cdot 5 = 102 \cdot 5 = 510$  J. El aumento de energía cinética es, por tanto,  $mv^2/2 = W$ , por lo que la velocidad tras haber deslizado 5 m será

$$v = \sqrt{2W/m} = \sqrt{2 \cdot 510/50} \simeq 4,5 \text{ m/s}$$

**Movimiento a lo largo de una curva.** Los resultados obtenidos referentes al trabajo y a la energía cinética pueden extenderse fácilmente al caso en que el movimiento del cuerpo tenga lugar a lo largo de una curva arbitraria en vez de a lo largo de una recta (véase fig. 6-13). Podemos aproximar el camino a una sucesión de segmentos rectilíneos. Sea  $\Delta s$  uno de ellos y sea  $F$  la fuerza media a lo largo de él. El trabajo realizado por  $F$  al moverse el cuerpo es

$$\Delta W = F_s \Delta s = F \Delta s \cos \theta_s \quad (6-13)$$

donde  $\theta_s$  es el ángulo que forman  $F$  y  $\Delta s$ . Las magnitudes de la fuerza y del elemento de camino son, respectivamente,  $F$  y  $\Delta s$ . La componente de  $F$  según la dirección de  $\Delta s$  es  $F_s = F \cos \theta_s$ .



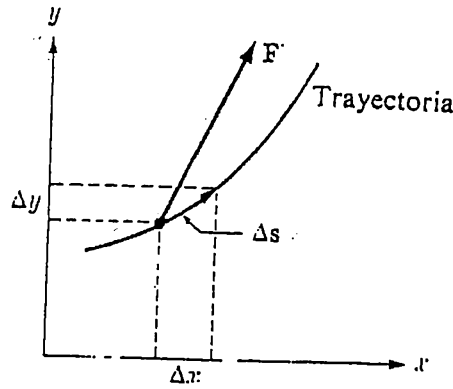


Fig. 6-13. Movimiento a lo largo de una curva plana.

Obsérvese, en la ecuación (6-13), que el trabajo elemental puede interpretarse de dos maneras: o bien como el *producto de la magnitud  $\Delta s$  por la componente  $F \cos \theta_s = F_s$  en la dirección de  $\Delta s$* , o bien como el *producto de la magnitud de la fuerza  $F$  por la componente  $\Delta s \cos \theta_s$  en la dirección de la fuerza*. Utilizando esta última interpretación, podemos expresar directamente el trabajo elemental en función de las componentes  $F_x$  y  $F_y$  de la fuerza. Así, sustituiremos  $F$  por sus componentes y determinaremos el trabajo realizado por  $F$  como suma de los trabajos de dichas componentes. El trabajo de  $F_x$ , según acabamos de indicar, es el producto de  $F_x$  por la proyección  $\Delta x$  de  $\Delta s$  sobre la dirección  $x$ . Análogamente, el trabajo de  $F_y$  es el producto de  $F_y$  por la proyección  $\Delta y$  de  $\Delta s$  sobre la dirección  $y$ . El trabajo total, en función de las componentes de la fuerza será, pues

$$\Delta W = F_x \Delta x + F_y \Delta y.$$

Resulta, pues, que el trabajo puede expresarse de tres maneras distintas:

$$\Delta W = F_s \Delta s = F \Delta s \cos \theta_s = F_x \Delta x + F_y \Delta y. \quad (6-14)$$

Análogamente, si consideramos el movimiento en el espacio habrá otra contribución  $F_z \Delta z$  al trabajo:

$$\Delta W = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z.$$

El trabajo total realizado por la fuerza  $F$  al moverse el cuerpo desde un punto  $(x_1, y_1, z_1)$  hasta otro  $(x_2, y_2, z_2)$  podrá expresarse en la forma

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz \\ &= \int_{(1)}^{(2)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz), \end{aligned} \quad (6-15)$$

que, abreviadamente, puede escribirse en la forma

$$W = \int_{(1)}^{(2)} F_s ds$$

El trabajo es igual al incremento de energía cinética  $\frac{1}{2}mv^2$ , donde  $v$  es la celeridad. La energía cinética puede expresarse en función de las componentes de la velocidad en la forma siguiente:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2$$

Como  $v_x$  sólo depende de la componente  $F_x$  tenemos

$$\int_{x_1}^{x_2} F_x dx = \frac{1}{2}mv_{x_2}^2 - \frac{1}{2}mv_{x_1}^2$$

Para las componentes  $y$  y  $z$  pueden obtenerse expresiones análogas.

Los resultados dados por la ecuación (6-15) pueden obtenerse directamente de manera formal a partir de  $dp/dt = F$  en la forma siguiente. Tenemos

$$\frac{dp_x}{dt} = v_x \frac{dp_x}{dx} = \frac{d(mv_x^2/2)}{dx} = F_x$$

En consecuencia,

$$d(mv_x^2/2) = F_x dx$$

Análogamente,

$$d(mv_y^2/2) = F_y dy \quad \text{y} \quad d(mv_z^2/2) = F_z dz$$

Sumando estas relaciones, obtenemos

$$dE = d(mv^2/2) = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

de donde se deduce la ecuación (6-15).

**EJEMPLO 1.** Un cuerpo desliza hacia abajo por un plano inclinado y el coeficiente de rozamiento en la superficie de contacto es  $\mu$  (fig. 6-14). ¿Cuál será la velocidad del cuerpo cuando haya recorrido hacia abajo del plano una distancia  $d$ , partiendo del reposo?

Sobre el cuerpo se ejercen tres fuerzas. El trabajo realizado por la componente normal  $N$  de la fuerza de contacto es nulo, ya que dicha componente es siempre perpendicular al desplazamiento del cuerpo. El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento  $F$  es  $Fd = \mu Nd$  y el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad es  $mgd \sin \theta$ . Entonces, siendo  $N = mg \cos \theta$ , obtenemos

$$v = \sqrt{2gd(\sin \theta - \mu \cos \theta)}$$

**EJEMPLO 2.** Un péndulo consistente en un cuerpo sujeto al extremo de un hilo de longitud  $R$  se suelta partiendo de un ángulo  $\theta$ , en la forma que se indica en la figura 6-15. ¿Cuál será la velocidad del cuerpo al pasar el péndulo por su posición más baja?

Sobre el cuerpo se ejercen dos fuerzas: la tensión  $S$  del hilo y el peso  $mg$  del cuerpo. El trabajo realizado por  $S$  es nulo, por ser  $S$  siempre perpendicular a la velocidad del cuerpo. El trabajo realizado por el peso es el producto de la fuerza  $mg$  por el desplazamiento en la dirección de la fuerza. Este desplazamiento es  $R - R \cos \theta = R(1 - \cos \theta)$  y el trabajo total es

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR(1 - \cos \theta)$$

Para la velocidad obtendremos, pues,

$$v = \sqrt{2gR(1 - \cos \theta)}$$

*El trabajo como producto escalar de dos vectores.* El trabajo y la energía cinética son cantidades escalares; uno y otra pueden especificarse mediante un número. Por ejemplo, la energía cinética sólo depende de la magnitud de la velocidad de un cuerpo y no de su dirección. No obstante, es conveniente hacer observar que aun cuando el trabajo es una cantidad escalar, en su cálculo intervienen dos vectores: la fuerza  $F$  y el desplazamiento  $\Delta s$  o bien  $\Delta r$  según se indica en la figura 6-16. Según hemos visto, el trabajo puede expresarse en función

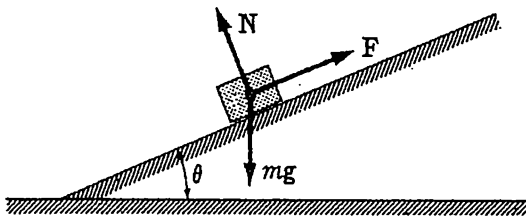


Figura 6-14

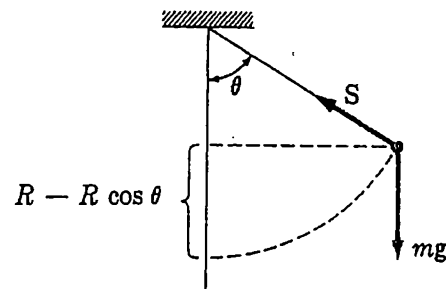


Figura 6-15

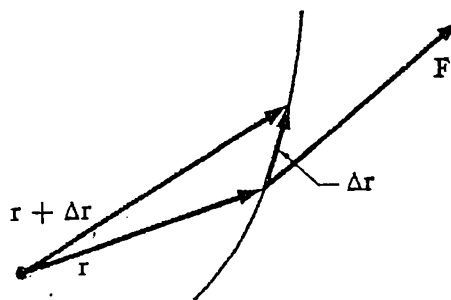


Figura 6-16

de las componentes de esos vectores en la forma

$$\Delta W = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z$$

Esta suma de productos de las componentes homólogas recibe el nombre de *producto escalar*  $F \cdot \Delta r$  de los dos vectores  $F$  y  $\Delta r$ , según se mencionó en el capítulo 1. Tenemos, pues,

$$F \cdot \Delta r = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z = F \Delta r \cos \theta \quad (6-16)$$

donde  $F$  y  $\Delta r$  son las magnitudes de  $F$  y  $\Delta r$  y  $\theta$  es el ángulo formado por dichos vectores.

Escribiendo la relación (6-15) en función del producto escalar, tenemos

$$W = \int_{(1)}^{(2)} F \cdot dr \quad (6-17)$$

Para un estudio general, esta manera de expresar el trabajo suele ser conveniente, pero en los cálculos numéricos deberemos utilizar uno de los métodos dados en la ecuación (6-16).

*Potencia.* El trabajo realizado por una fuerza sólo depende de la fuerza y del desplazamiento o, en otras palabras, el trabajo determina la variación de energía cinética y es independiente de lo rápidamente que tenga lugar esta variación. En muchos casos es útil tener una cantidad que pueda utilizarse para describir lo deprisa que se realiza el trabajo, o lo rápidamente que varía la energía cinética. A esta cantidad se le da el nombre de *potencia* y queda definida por

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (6-18)$$

Un trabajo  $\Delta W$  realizado por una fuerza  $F$  que se ejerza durante un desplazamiento  $dr$  puede escribirse en la forma  $F \cdot dr$ . Pero  $dr/dt$  no es más que la velocidad  $v$  y por tanto tendremos

$$P = F \cdot v = Fv \cos \theta \quad (6-19)$$

donde  $\theta$  es el ángulo que forman  $F$  y  $v$ .

La potencia se mide en unidades de energía (o trabajo realizado) por unidad de tiempo. Luego, en el sistema Giorgi, la potencia tendrá por unidad el joule/segundo o watt (W), en el sistema cgs el erg/s y en el sistema técnico el kilopondmetro/segundo, si bien suele utilizarse en su lugar el caballo de vapor (CV) que vale 75 kpm/s.

EJEMPLO. Un coche de masa  $m$  se acelera uniformemente partiendo del reposo hasta alcanzar una celeridad  $v_0$  en  $t_0$  segundos. Hallar, en función del tiempo, la potencia entregada al coche.

La aceleración será  $v_0/t_0$ , con lo que la fuerza horizontal que debe ejercer la carretera sobre las ruedas será  $mv_0/t_0$ , mientras que la velocidad del coche es  $v_0 t/t_0$ . La potencia será

$$P = Fv = \frac{mv_0}{t_0} \cdot \frac{v_0 t}{t_0} = \frac{mv_0^2}{t_0^2} t$$

Luego, si un automóvil de 1000 kg se acelera en 10 s hasta alcanzar una velocidad de 108 km/h (30 m/s), la potencia que precisa al final de los 10 segundos será

$$P = \frac{1000 \cdot 30^2 \cdot 10}{10^2} = 90000 \text{ W} = 90 \text{ kW} \simeq 120 \text{ CV}$$

La potencia suministrada por el motor deberá ser mucho mayor que esta, a causa de la resistencia del aire, rozamientos, etc., que realizan un trabajo negativo sobre el coche acelerado. Obsérvese que en la primera parte del periodo de aceleración se precisa muy poca potencia ¿Por qué?

*Trabajo realizado por una fuerza exterior sobre un conjunto de partículas.* Imaginemos un conjunto de partículas de masa total  $M$ . El conjunto puede constituir un cuerpo sólido, pero el estudio que sigue es aplicable incluso en el caso en que las partículas no mantengan invariables sus distancias recíprocas. Hemos visto que el movimiento del centro de masa de un conjunto de partículas está determinado por las fuerzas exteriores. Es decir, tenemos  $F = M dV/dt$ , donde  $F$  es la resultante de las fuerzas exteriores y  $V$  es la velocidad del centro de masa. Multiplicando escalarmente los dos miembros de esta igualdad por  $V$  se tiene

$$F \cdot V = M \frac{dV}{dt} \cdot V = \frac{dE_t}{dt} \quad (6-20)$$

donde  $E_t = MV^2/2$  es la energía cinética de traslación. El primer miembro es el producto escalar de la resultante de las fuerzas exteriores por la velocidad del centro de masa. La expresión (6-20) equivale a la

$$F \cdot \Delta S = \Delta E_t \quad (6-21)$$

donde  $\Delta S$  es el desplazamiento del centro de masa. Aun cuando esta expresión es análoga a la del teorema de las fuerzas vivas, difiere de ella en dos aspectos importantes. En primer lugar,  $\Delta S$  es el desplazamiento del centro de masa y no la distancia a lo largo de la cual actúa la fuerza. En segundo,  $E_t$  es la energía cinética de traslación solamente, y no incluye la energía cinética que podría te-

ner un cuerpo rígido, por ejemplo, en virtud de su movimiento de rotación. En el capítulo 12 se estudiará una forma más completa de expresión del teorema de las fuerzas vivas, en la cual se iguala la cantidad  $F \cdot \Delta s$  a  $\Delta E$ , donde  $\Delta s$  es el desplazamiento de la fuerza y  $E$  es la energía cinética total.

Como ejemplo sencillo de la utilización de la ecuación (6-21), consideremos un cuerpo rígido situado en el campo gravitatorio terrestre. La fuerza exterior resultante es  $Mg$  y está dirigida hacia abajo. Si el centro de masa cae una distancia  $h$ , el término  $F \cdot \Delta s$  será igual a  $Mgh$  y éste deberá ser también igual a la variación de energía cinética de traslación  $MV^2/2$ . El hecho de que el cuerpo rígido pueda estar afectado simultáneamente de un movimiento de rotación complicado, no altera el resultado. El centro de masa del cuerpo rígido se comporta igual que un punto material de masa  $M$ .

### PROBLEMAS

6-1. Desde lo alto de una torre de 100 m de altura cae un cuerpo de masa  $m = 2$  kg. (a) ¿Qué impulso recibirá el cuerpo durante el primer segundo? ¿y durante el segundo segundo? ¿Cuál es el impulso total recibido durante  $t$  segundos de caída? (b) ¿Cuál es la cantidad de movimiento de la masa de 2 kg en los instantes  $t = 1$  y  $2$  s? (c) Si la masa llega al suelo y se detiene en 0,2 s, ¿qué impulso recibe? ¿Cuál era la fuerza media que se ejerció sobre la masa durante el periodo de detención?

6-2. Imaginemos una mesa cuadrada de billar. Supongamos que los choques que efectúa la bola con las bandas sean perfectamente elásticos. (a) ¿Cómo habrá que disparar una bola para que siga una trayectoria cuadrada? (b) ¿Qué impulso recibirá la bola en cada choque? Supóngase una bola de 250 g lanzada a 3 m/s. Especificar las magnitudes y direcciones de los impulsos.

6-3. Un cuerpo de masa 1,5 kg se mueve a lo largo del eje  $y$  en un plano horizontal con una cantidad de movi-

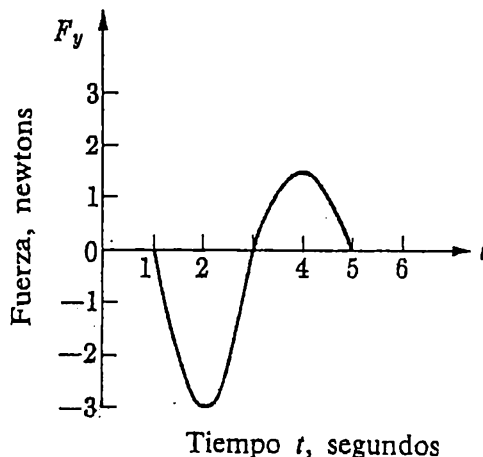
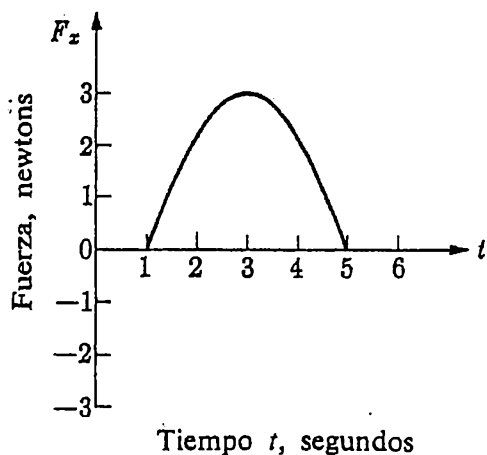


Fig. 6-17. Supóngase que las curvas son parábolas.

miento constante  $p_y = 10 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ . Penetra en una región en la que se encuentra sometida a una fuerza cuyas componentes dependen del tiempo en la forma indicada en la figura 6-17. (a) ¿Cuáles son la magnitud y dirección del impulso total de esta fuerza? (b) ¿Cuál es la velocidad (vector) del cuerpo en el instante  $t = 5 \text{ s}$ ?

6-4. Tres bolas  $A$ ,  $B$  y  $C$ , de  $1 \text{ kg}$ ,  $1 \text{ kg}$  y  $2 \text{ kg}$ , respectivamente, están conectadas por barras de peso despreciable, en la forma indicada por la figura 6-18 y están en reposo sobre una mesa horizontal (rozamiento despreciable). Se da a la bola  $A$  un impulso exterior de  $50 \text{ N} \cdot \text{s}$  en la dirección  $x$  y a  $B$  se da un impulso de  $75 \text{ N} \cdot \text{s}$  en la dirección  $y$ . ¿Cuál es la velocidad resultante del centro de masa?

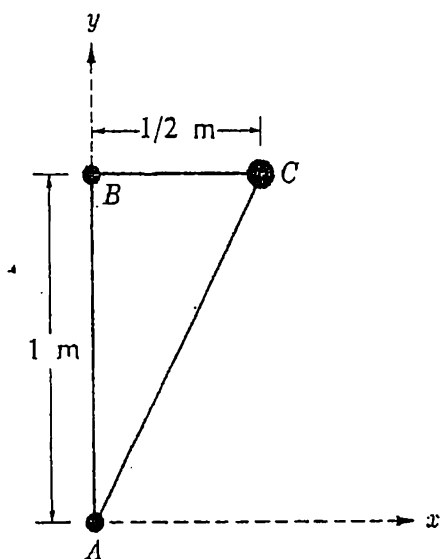


Figura 6-18

6-5. La fuerza que se ejerce sobre un cuerpo de  $2 \text{ kg}$  es  $F = F_m \sin(2\pi t/T)$ , donde  $F_m = 20 \text{ N}$  y el período es  $T = 0,5 \text{ s}$ . (a) ¿Cuál es la cantidad de movimiento del cuerpo en función del tiempo si es nula la velocidad del cuerpo en el instante  $t = 0$ ? (b) ¿Cuál es el impulso de la fuerza en el intervalo entre  $t = 0$  y

$t = T/2$ ? (c) ¿Cuál es el impulso en el intervalo entre  $t = 0$  y  $t = T$ ?

6-6. Una fuerza tiene por componentes  $F_x = F_0(t/t_0)$  y  $F_y = F_0(t/t_0)^2$  en el intervalo de tiempo comprendido entre  $t = 0$  y  $3t_0$ . En el instante  $t = 0$  el cuerpo sobre el que se ejerce la fuerza se halla en reposo. (a) ¿Cuál es la cantidad de movimiento del cuerpo en función del tiempo? (b) ¿Es siempre paralelo al vector fuerza el vector cantidad de movimiento? (c) ¿Cuál es el impulso total de la fuerza? Especificúense magnitud, dirección y sentido.

6-7. Se golpea una pelota de golf de  $45 \text{ g}$  que vuela a lo largo de una distancia horizontal de  $180 \text{ m}$ . El mazo y la pelota están en contacto  $0,01 \text{ s}$ . ¿Qué impulso mínimo y qué fuerza media ejerce el mazo sobre la pelota?

6-8. Una masa de  $0,5 \text{ kg}$  confinada a moverse en una sola dimensión tiene una energía cinética que depende de  $x$  en la forma que se indica en la figura 6-19. (a) Representar gráficamente, en función de  $x$ , la fuerza que se ejerce sobre la masa. (b) ¿Qué velocidad tendrá la masa en  $x = 0, 1, 2, 5 \text{ m}$ ? (c) Hallar cómo varía  $x$

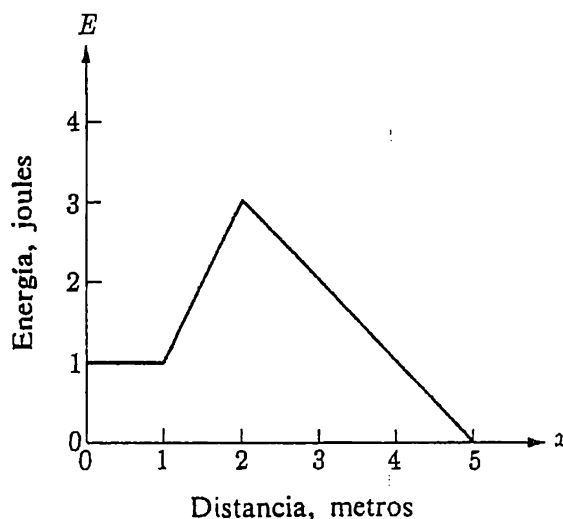


Figura 6-19

con el tiempo. Supóngase que  $t = 0$  en  $x = 0$  y que la masa se mueve hacia  $x = 5$ . (d) ¿Qué impulso recibirá el cuerpo al moverse de  $x = 0$  a  $x = 5$  m?

6-9. A un grano de arena de  $10^{-5}$  g se le da un impulso de  $50 \text{ dyna} \cdot \text{s}$ , que luego se da a un centímetro cúbico de hielo (1 g) y luego a un automóvil pequeño ( $10^6$  g). Supóngase que los tres cuerpos se hallan inicialmente en reposo. En cada caso, especificar la variación de cantidad de movimiento, la velocidad final y la energía cinética adquirida.

6-10. A una pelota de 0,1 kg se le da un impulso de  $2 \text{ N} \cdot \text{s}$ . ¿Qué variaciones de cantidad de movimiento y de energía cinética sufrirá si (a) se halla inicialmente en reposo, (b) tiene inicialmente una velocidad de 1, 5, 10, 100 m/s en la dirección del impulso, y (c) tiene inicialmente una velocidad de 1, 5, 10, 100 m/s perpendicular al impulso?

6-11. Sobre un cuerpo de masa  $m = 1$  kg se realiza un trabajo de 10 J. (a) Si la fuerza que realiza el trabajo está dirigida en la misma dirección y sentido que el movimiento inicial del cuerpo, la variación de cantidad de movimiento ¿será mayor o menor, para velocidades iniciales grandes o pequeñas? (b) Si la velocidad inicial es de 1,5 m/s, ¿cuál es la variación de celeridad? ¿Depende la respuesta de la dirección de la fuerza? ¿Sería la misma la contestación a (b) para va-

riaciones de cantidad de movimiento y de velocidad?

6-12. Un cuerpo desliza a lo largo del eje  $x$  y se halla propulsado por dos fuerzas  $F_1$  y  $F_2$ . La fuerza  $F_1$  varía con  $x$  tal como se indica en la figura 6-20 y  $F_2$  es constante e igual a 1 000 N. (a) Determinar el trabajo realizado por  $F_1$  cuando se desplaza el cuerpo de  $x = 0$  hasta 9 m. (b) ¿Cuál es el trabajo correspondiente realizado por  $F_2$ ? (c) ¿Cuál es la velocidad del cuerpo en  $x = 10$ , si parte del reposo en  $x = 0$  y el peso es de 400 kg?

6-13. Una bala de masa  $m = 50$  g sale del cañón con una velocidad  $v_0 = 400$  m/s. La longitud del cañón es  $d = 1$  m. En su interior, se supone constante la fuerza que se ejerce sobre la bala. ¿Cuál es esta fuerza?

6-14. Se tira de un bloque de masa  $m$  con un hilo inclinado un ángulo  $\theta$  respecto a la horizontal, estando situado el bloque sobre un plano horizontal. El coeficiente de rozamiento entre éste y el bloque es  $\mu$ . (a) Cuando se ha tirado del bloque una distancia  $x$ , ¿cuál es su velocidad? (b) ¿Dónde está el bloque  $t$  segundos después de empezar a tirar? ¿Qué fuerza se precisa para mantener en movimiento el bloque con velocidad constante? ¿Cuánto trabajo realiza por segundo la fuerza en este caso?

6-15. Una cuenta de masa 1 g puede deslizar libremente por un aro vertical

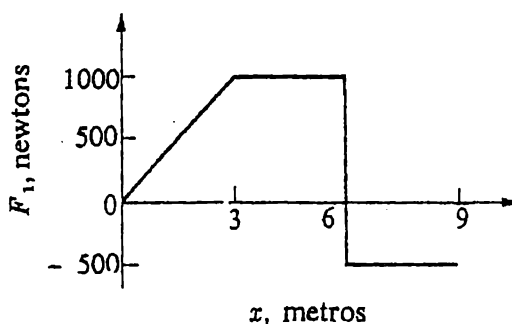
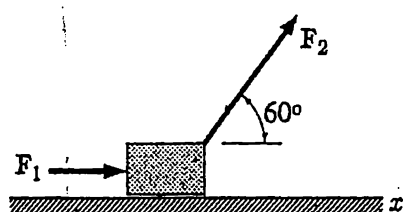


Figura 6-20



de radio 100 cm exento de rozamiento. (a) Si se suelta la cuenta desde la parte superior del aro, ¿cuál es su energía cinética cuando llega a la parte inferior? (b) ¿Por qué «no trabaja» la fuerza normal entre aro y cuenta? (c) Las componentes  $x$  e  $y$  de la fuerza normal, ¿son fuerzas que no trabajan? ¿Cómo puede adquirir la cuenta una componente  $x$  de la velocidad?

6-16. En la figura 6-21 se representa esquemáticamente una cuenta de masa  $m$  que desliza hacia abajo por una cuerda de un círculo vertical, exenta de rozamiento. ¿Cómo dependerá de  $\theta$  el tiempo de recorrido de  $B$  a  $A$ ?

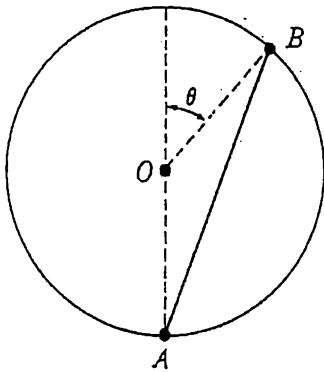


Figura 6-21

6-17. Un cohete se mueve horizontalmente bajo la acción de una fuerza  $F_x = F_0(1 + x/x_0)$  en la región entre  $x = 0$  y  $x = 5x_0$ , y de la acción de la fuerza de la gravedad  $F_y = -mg$ . Bajo la influencia de estas fuerzas, el cohete se desplaza de  $x = 0, y = 5x_0$ , hasta  $x = 4x_0, y = 2x_0$  en  $t_0$  segundos. (a) ¿Cuál es la variación de energía cinética del cohete en este intervalo? (b) ¿Cuál es la potencia media suministrada al cohete en este intervalo de tiempo?

6-18. Las componentes de una fuerza, expresadas en newtons, son  $F_x = 10(1 + x/2)$  y  $F_y = 20(1 + y)^2$ , donde  $x$  e

$y$  se miden en metros. (a) ¿Qué trabajo realiza esta fuerza cuando el cuerpo, accionado por ella, se desplaza desde  $x_1 = 0, y_1 = 1$  m, hasta  $x_2 = 4$  m,  $y_2 = 2$  m? (b) Si el cuerpo tiene una masa  $m = 0,5$  kg, ¿cuál es la velocidad del cuerpo en  $(x_2, y_2)$  si parte del reposo en  $(x_1, y_1)$ ? (c) ¿Se movería en realidad el cuerpo de  $(x_1, y_1)$  a  $(x_2, y_2)$  bajo las condiciones iniciales dadas, si no se hallara bajo la influencia de otras fuerzas?

6-19. En un acelerador de gran energía se da a un electrón una energía de  $4 \text{ MeV} = 4 \cdot 10^6 \text{ eV}$ . ¿Cuál es la velocidad final del electrón? (Masa en reposo del electrón  $= 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ,  $1 \text{ MeV} = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J}$ ). Compárese esta velocidad con la de la luz. ¿Cree usted que el cálculo realizado es válido?

6-20. Estime la potencia que es Vd. capaz de desarrollar (a) subiendo un tramo de escalera, (b) subiendo en bicicleta una pendiente de  $10^\circ$ , (c) acelerando desde el reposo hasta  $10 \text{ m/s}$  en  $1 \text{ s}$ , (d) levantándose de la posición de sentado a la de en pie.

6-21. Sobre el suelo, se hallan inicialmente en reposo una masa  $m_1$  y otra  $m_2$ . La masa  $m_1$  se lleva a una altura  $h_1$  y luego se lleva a una altura  $h_2$  la masa  $m_2$ . Calcular el trabajo  $W_1$  y  $W_2$  necesario para llevar estas masas a sus respectivas alturas. Demostrar que el resultado es el mismo que el requerido para llevar una masa  $m_1 + m_2$  hasta la altura de su centro de masa.

6-22. Un cuerpo de masa  $2 \text{ kg}$  pasa por el punto 1 ( $x_1 = 0, y_1 = 0$ ) con una celeridad de  $2 \text{ m/s}$  y pasa por el punto 2 ( $x_2 = 2, y_2 = ?$ ) con una celeridad de  $3\sqrt{3} \text{ m/s}$ . Sobre el cuerpo se ejercen dos fuerzas, una de las cuales tiene por componentes  $F_{1x} = 6x + 1, F_{1y} = 0$  y la otra  $F_{2x} = 0, F_{2y} = -2y + 6$ . (Las fuerzas se dan en newton y las distancias  $x$  e  $y$  en

metros). (a) ¿Qué trabajo total se realizó sobre el cuerpo al desplazarse del punto 1 al 2? (b) ¿Qué trabajo realizó la fuerza  $F_1$  sobre el cuerpo? (c) ¿Qué trabajo realizó sobre el cuerpo la fuerza  $F_2$  y cuál es el valor de  $y_2$ ?

6-23. Dos partículas  $A$  y  $B$ , de igual masa  $m$ , están unidas mediante un resorte de constante  $K$ . El sistema se halla inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal exenta de rozamientos y el resorte no está deformado. Se aplica a  $A$  un impulso instantáneo  $J$ , como se indica en la figura 6-22. ¿Cuál es la velocidad de  $A$  inmediatamente después del impulso, y cuál es su energía cinética? ¿Cuál es la velocidad del centro de masa?

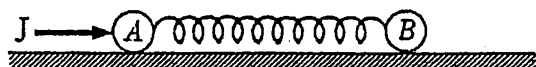


Figura 6-22

6-24. Sobre una mesa horizontal se halla en reposo un cuerpo  $A$  de masa  $m$ . Con él choca otro cuerpo  $B$  de masa  $2m$  que se mueve a lo largo de una recta horizontal de la mesa. Las velocidades del cuerpo  $B$  inmediatamente después e inmediatamente antes del choque son, respectivamente,  $v/2$  y  $v$ . El movimiento después del choque tiene lugar a lo largo de la misma recta que antes.

(a) ¿Cuál es la velocidad de  $A$  inmediatamente después del choque? (b) ¿Qué fracción de la energía cinética inicial se pierde en el choque? (c) ¿Cuál es el impulso total suministrado a  $A$  por  $B$  y a  $B$  por  $A$ ? (d) ¿Qué trabajo realiza  $B$  sobre  $A$  en el choque y cuál es el trabajo realizado por  $A$  sobre  $B$ ? (e) A causa del rozamiento de la mesa, los dos cuerpos llegarán a alcanzar el reposo. ¿Cuál es el cociente entre el impulso dado por la mesa al cuerpo  $A$  para detenerlo, y la cantidad correspondiente para el cuerpo  $B$ ?

6-25. Según se indica en la figura 6-23, un bloque de madera de masa  $m_2$  se halla en reposo sobre una superficie horizontal. El coeficiente de rozamiento es  $\mu$ . Al bloque se fija un extremo de un resorte de constante  $K$  y el otro extremo se fija a una pared. El resorte no está deformado. Una bala de masa  $m_1$  alcanza el bloque y se incrusta en él. Hallar la velocidad inicial de la bala en función de la desviación máxima  $x$  del resorte y  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $K$ ,  $\mu$ , y  $g$ .

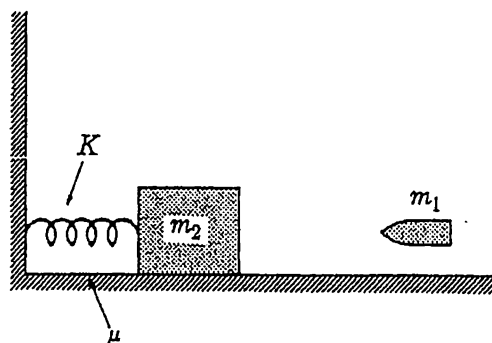


Figura 6-23

6-26. Un bloque pequeño de masa  $m = 2$  g se halla inicialmente en reposo en el punto más elevado de un hemisferio liso de radio  $R = 20$  cm (fig. 6-24). En un instante determinado se da un pequeño empuje horizontal al bloque, que empieza a deslizarse. Despreciando el rozamiento, hallar (a) la fuerza de contacto en función de la posición y (b) el ángulo (medido a partir de la vertical) al cual el bloque abandonará la superficie del hemisferio.

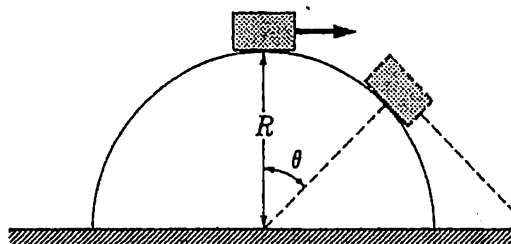


Figura 6-24

6-27. Se observa que un cuerpo de 10 g situado sobre una superficie lisa se mueve a lo largo del eje  $x$  con una energía cinética que crece 20 erg/cm. (a) ¿Cuál es la variación en unidad de tiempo de la cantidad de movimiento? (b) Sobre el cuerpo se ejercen dos fuerzas constantes  $F_a$  y  $F_b$ . La fuerza  $F_a$  es de 10 dynas y está dirigida en el sentido positivo del eje  $y$ . ¿Cuál es la magnitud de la fuerza  $F_b$ ? (c) En un punto del eje  $x$  se observa que el cuerpo tiene una velocidad de 10 cm/s. ¿Hasta dónde llegará el cuerpo durante los tres segundos siguientes? (d) ¿Qué trabajo se ha realizado sobre el cuerpo durante estos tres segundos?

6-28. Consideremos un choque entre dos carritos  $A$  y  $B$  situados sobre una pista horizontal. El carrito  $B$  se halla inicialmente en reposo. El  $A$  tiene una energía cinética que varía con la posición, en la forma indicada en la figura 6-25. Las masas de  $A$  y  $B$  son  $m_a = 2$  kg y  $m_b = 2/3$  kg. (a) Trazar una gráfica de la fuerza que se ejerce sobre  $A$  (expresada en newton) en función de la posición de  $A$ . (b) Trazar una gráfica de la energía cinética de  $B$  en función de la posición de  $B$ . (c) ¿Cuál es la velocidad de variación de la energía cinética de  $A$  en la posición  $x = 3$ ?

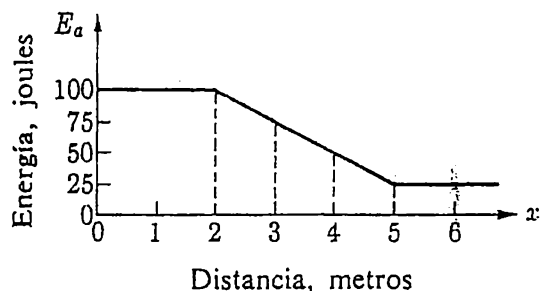


Figura 6-25

6-29. Una partícula cargada  $A$  se mueve a una gran velocidad  $v_0$  a lo largo de una recta y pasa a una distancia  $d$

de otra partícula cargada  $B$  que se halla inicialmente en reposo. Las dos partículas se repelen con una fuerza  $K/r^2$ , siendo  $r$  la separación entre  $A$  y  $B$  y  $K$  una constante (Fig. 6-26).

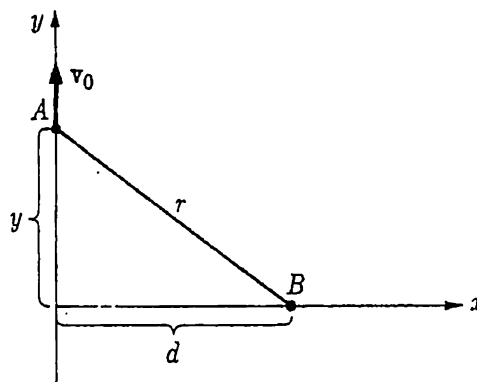


Figura 6-26

Como  $A$  va muy deprisa, su acción sobre  $B$  puede considerarse como un impulso instantáneo normal a la línea de movimiento de  $A$ ; en otras palabras, el cuerpo  $B$  no inicia su movimiento hasta haber pasado  $A$ . Determinar, con estas hipótesis, la energía cedida a  $B$ .

6-30. Un cañón situado sobre un plano inclinado ( $\theta = 30^\circ$ ) descansa sobre un apoyo en la forma indicada en la figura 6-27. Tras disparar horizontalmente un proyectil, el cañón inicia su deslizamiento hacia arriba del plano (despréciase el rozamiento).

El peso del cañón sólo es  $Mg = 8\,000$  N y el del proyectil es  $mg = 400$  N. La velocidad del proyectil al salir del cañón es  $v = 300$  m/s.

(a) ¿Cuál es la velocidad del cañón inmediatamente después del disparo? (b) ¿Hasta qué punto del plano llegará el cañón en su ascenso? (c) Si el proyectil tarda 0,01 s para salir del cañón, ¿cuál es la fuerza media normal al plano durante dicho tiempo?

6-31. Sobre un plano horizontal exento de rozamientos se empuja una

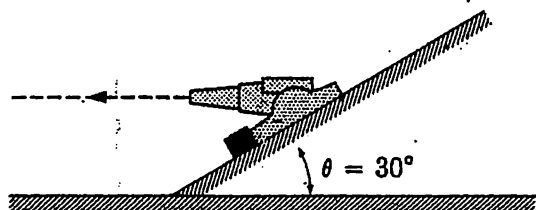


Figura 6-27

masa  $m = 1 \text{ kg}$  con una fuerza que desarrolla una potencia constante  $P = 10 \text{ W}$ .

(a) Si la velocidad del cuerpo en el instante  $t = 0$  es  $v_0 = 1 \text{ m/s}$ , ¿cuál es la fuerza en dicho instante? (b) ¿En qué instante será la velocidad igual a  $2v_0$ ?

6-32. Un cuerpo de  $10 \text{ g}$  se mueve a velocidad constante en el sentido negativo de las  $x$  sobre un plano (despréciase el rozamiento). Cuando pasa por  $x = 0$  empieza a ejercerse sobre el cuerpo una fuerza de  $100 \text{ dynas}$  dirigida en el sentido positivo de las  $x$ . El cuerpo vuelve a la posición  $x = 0$  diez segundos después de empezar a actuar la fuerza. (a) Hallar la velocidad inicial. (b) ¿Cuándo y dónde invierte la partícula su sentido de movimiento? (c) ¿Cuál es el trabajo total realizado por la fuerza durante los primeros diez segundos? (d) ¿Cuál es la potencia instantánea desarrollada por la fuerza cuando el cuerpo pasa por  $x = 0$  moviéndose en el sentido positivo de las  $x$ ?

6-33. Sobre una mesa horizontal exenta de rozamientos descansa un bloque de madera de masa  $M = 98 \text{ g}$ . En él se incrusta una bala de masa  $m = 2 \text{ g}$  que se mueve horizontalmente con una velocidad de  $300 \text{ m/s}$ . (a) ¿Cuál será la velocidad del bloque después del choque? (b) ¿Cuál es el cociente entre la energía mecánica perdida en el choque y la energía cinética incidente de la bala?

6-34. Consideremos dos cuerpos  $m_1$  y  $m_2$  que parten del reposo que sólo se ejercen interacción entre sí por medio de un resorte. La fuerza entre ellos es pro-

porcional a su separación. Si es  $d$  la separación inicial, ¿cuál es el cociente entre las energías cinéticas de los cuerpos cuando chocan?

6-35. Se suelta una pelota desde una altura  $h$  sobre el suelo; la cual rebota repetidamente. En cada rebote se pierde una fracción  $e$  de la energía cinética que tiene inmediatamente antes de él. ¿Cuánto tardará la pelota en pararse?

6-36. Un cuerpo de masa  $m$  parte del reposo, desliza por un plano inclinado  $37^\circ$  una distancia de  $3 \text{ m}$ , choca contra una pared, y rebota a lo largo del plano (fig. 6-28). Utilizando el teorema de las

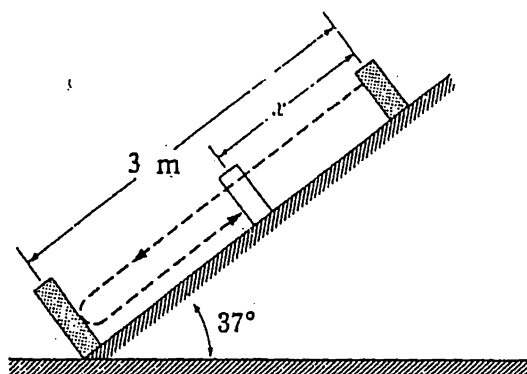


Figura 6-28

fuerzas vivas, calcular la distancia  $x$  de máxima aproximación, tras el regreso, a la posición de partida, suponiendo que no se pierde energía cinética durante el choque y que el coeficiente de rozamiento por deslizamiento es  $\mu = 1/4$ .

6-37. ¿Cuál es la posición  $x$ , en función del tiempo, de una masa que parte del reposo en  $x = 0$  y está sometida

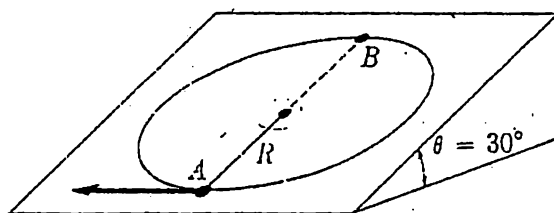


Figura 6-29

a una fuerza constante  $F$ ? ¿Y a una fuerza que desarrolla una potencia constante  $P$ ?

6-38. Un cuerpo pequeño de masa  $m$  desliza por un aro circular de radio  $R$  situado en un plano vertical. Si el cuerpo parte con una velocidad  $v_0$  del punto más bajo del aro, determinar la fuerza de contacto que se ejerce sobre el aro, en función de la posición del cuerpo. ¿Qué valor debe tener  $v_0$  para que la fuerza de contacto en el punto más alto del aro sea nula?

6-39. Se fija un cuerpo a un extremo de una cuerda de longitud  $R = 1$  m, cuyo otro extremo está fijo a un plano inclinado de la manera indicada en la figura 6-29. El ángulo de inclinación del plano es  $\theta = 30^\circ$ . La masa del cuerpo es  $m = 2$  kg. ¿Cuánta energía cinética perderá el cuerpo al recorrer el camino semicircular de  $A$  a  $B$ ? El coeficiente de rozamiento por deslizamiento entre la masa y el plano es  $\mu = 0,25$ .

## ENERGIA

*Resumen.* Cuando las fuerzas que se ejercen sobre un cuerpo son de un tipo determinado (conservativas), podemos introducir el concepto de energía potencial,  $V$ , y formular el principio de conservación de la energía mecánica total,  $H = E + V$ , donde  $E$  es la energía cinética del cuerpo. Como  $H$  es una constante del movimiento y  $V$  sólo depende de la posición, la energía cinética y la celeridad del cuerpo también dependerán solamente de la posición. El movimiento se puede describir convenientemente y en forma vívida mediante diagramas energéticos, a partir de los cuales se pueden observar las características generales del movimiento. Después de analizar estas ecuaciones del movimiento de un cuerpo sometido a la influencia de una fuerza conservativa, se estudia la extensión del concepto de energía y se realiza un examen cualitativo de las diversas formas de energía. En su forma general la energía, como la cantidad de movimiento, es una cantidad que se conserva en la Naturaleza.

El concepto de energía cinética resultaría estéril si no tuviera un significado que vaya más allá del que hemos visto hasta ahora. Vimos que cuando se conoce en función de la posición la fuerza resultante que actúa sobre un cuerpo, puede calcularse el trabajo de la fuerza, permitiendo así la predicción de la energía cinética y de la celeridad del cuerpo en función de la posición. Es esta una propiedad muy importante y útil de la energía cinética, porque en muchos casos se conoce la fuerza en función de la posición. Pero la importancia del concepto de energía se extiende mucho más allá de esta relación entre trabajo y energía. Eventualmente veremos que conduce a un principio de conservación de gran generalidad e importancia. El gran impacto de este concepto surgirá lentamente, ya que la energía se manifiesta de muy diversas formas y por tanto precisa de más de una clase de medida para poner de manifiesto su presencia. Veremos que el calor es una forma de la energía y que frecuentemente, cuando «desaparece» energía cinética no es que haya desaparecido, sino que se ha convertido en energía cinética de los átomos que se mueven con movimiento desordenado. Existe energía en las ondas luminosas, de radio y sonoras, hay energía asociada a la masa y existen energías nuclear y química. Por tanto, deberá tenerse bien pre-

sente que aún no ha aparecido explícitamente todo lo que motiva nuestro interés por el concepto de energía y veremos que este concepto se presenta de manera muy parecida a como se presentó el de la cantidad de movimiento.

**7-1 Energía potencial.** En nuestras consideraciones acerca de la cantidad de movimiento observábamos que la cantidad de movimiento total antes de un choque es siempre igual a la cantidad de movimiento total después de él. También hemos visto que la cantidad de movimiento total permanecía invariable *durante* el choque.

Imaginemos ahora un choque unidimensional perfectamente elástico en el cual se muevan dos carritos uno contra otro con celeridades iguales. Después del choque los cuerpos se separan con la misma celeridad que tenían antes y, en consecuencia, la energía cinética total después del choque es la misma que existía antes de él. (Veremos más adelante, en este capítulo, que la energía cinética total después de un choque es igual a la que tenía antes, en todos los choques perfectamente elásticos, independientemente de las condiciones iniciales.) Pero, ¿podemos formular una afirmación análoga a la formulada en relación con la cantidad de movimiento y decir que se conserva la energía cinética incluso *durante* el choque? Evidentemente no, ya que en un instante del choque los carritos se hallan instantáneamente en reposo y por tanto carecen en absoluto de energía cinética. Está claro que la energía cinética es constante antes del choque, disminuye a partir del instante en que los dos carritos entran en contacto, se hace eventualmente nula, vuelve a aumentar y recupera y mantiene, después del choque, su valor inicial.

Si la interacción entre los carritos se realiza a través de un resorte, mientras éste se comprime se realizará un trabajo sobre él. Del teorema de las fuerzas vivas se deduce que la magnitud de ese trabajo es igual a la disminución de la energía cinética de los carritos. Como éstos recuperan su energía cinética durante el período de dilatación del choque, el resorte debe realizar sobre los carritos, durante su expansión, la misma cantidad de trabajo que absorbió durante su compresión. En otras palabras, el trabajo realizado sobre el resorte durante la compresión puede considerarse almacenado en el resorte y este trabajo almacenado, según se vio en el capítulo anterior, puede expresarse en la forma  $Kx^2/2$ , donde  $K$  es la constante del resorte y  $x$  su compresión. Obsérvese que el trabajo almacenado en el resorte en un instante determinado no depende de si el resorte está comprimiéndose o dilatándose; sólo depende de la longitud del resorte en aquel instante y, en consecuencia, de la posición de cada carrito, solamente. A este trabajo almacenado le llamaremos *energía potencial* y la representaremos por  $V$ . Así, pues, aun cuando la energía cinética  $E$  no se mantenga constante durante el choque, la *suma de las energías cinética y potencial* sí se mantiene. En otras palabras, si se extiende el concepto de energía para incluir a

la energía potencial, podemos formular un principio de conservación de la energía:

$$E + V = \text{const} = H \quad (7-1)$$

La suma de las energías cinética y potencial, recibe el nombre de *energía mecánica*  $H$ , y se mantiene constante durante la interacción. Según estudiaremos pronto con mayor detalle, el concepto de energía potencial sólo es útil cuando la fuerza que se ejerce entre los cuerpos en interacción sólo depende de la distancia que los separa y no de sus celeridades relativas, por ejemplo. Existe entonces una relación única entre la energía potencial y la fuerza que se ejerce entre los cuerpos, y puede determinarse de antemano la energía potencial a partir de la fuerza conocida.

Con el fin de proseguir el estudio de la energía potencial y buscar la relación existente entre la energía potencial y la fuerza, sólo consideraremos uno de los cuerpos en interacción. Para mayor sencillez, consideremos que un extremo del resorte se mantiene en una posición fija (lo cual corresponde al caso de que uno de los cuerpos en interacción tenga una masa muy grande), según se indica en la figura 7-1. Supongamos que el cuerpo se mueve hacia el resorte con una energía cinética constante de 50 erg. El extremo libre del resorte indeformado está situado en  $x = 0$ . Cuando el cuerpo choca contra el resorte, disminuye su velocidad. Si pudiéramos medir su energía cinética en varios puntos podríamos hallar, por ejemplo, que durante el primer centímetro de compresión la pérdida de energía cinética es de 2 erg; durante el centímetro siguiente, de 6 erg; etc.; y que la energía cinética varía con la posición en la forma indicada en la figura 7-1. En

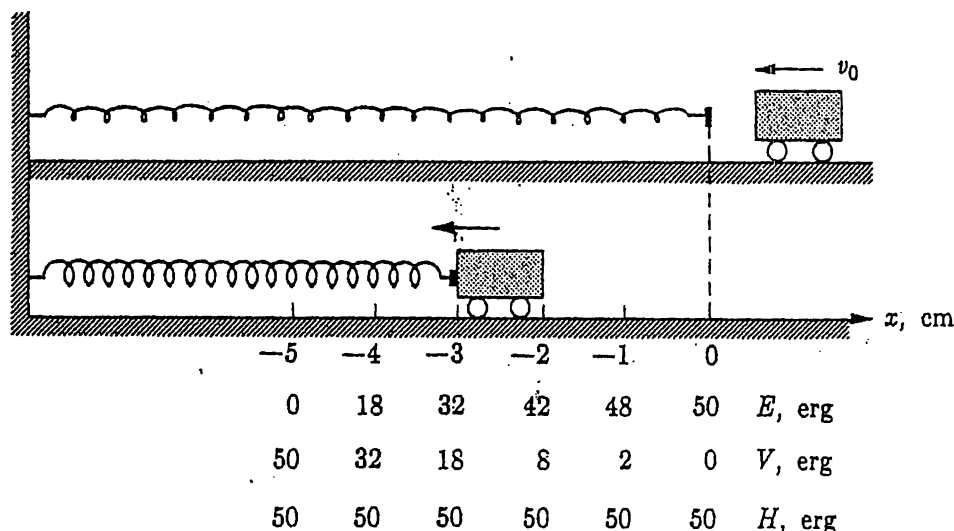


Fig. 7-1. El carrito tiene una energía cinética inicial de 50 erg. Cuando comprime al resorte, parte de su energía cinética, y eventualmente toda, se convierte en energía potencial. La energía cinética del carrito se recupera cuando se dilata el resorte y durante todo el movimiento, la energía mecánica total  $H = E + V$  permanece constante.



$x = -5$  cm, la energía cinética es nula y el cuerpo invierte su sentido de marcha. Encontramos ahora que el cuerpo gana en cada intervalo una energía cinética exactamente igual a la que perdió en dicho intervalo durante la compresión. Es decir, cuando el cuerpo pasa, por ejemplo, por  $x = -2$  cm, tiene exactamente la misma energía cinética, 42 erg, que tenía cuando pasó por dicho punto durante la compresión. Es esta propiedad de la fuerza del resorte la que garantiza que la energía cinética perdida durante la compresión se recupere en la dilatación, y es esta propiedad de la fuerza del resorte la que nos permite definir y utilizar la energía potencial. Si un resorte no tuviera esta propiedad, es decir, si un cuerpo perdiera una energía cinética  $\Delta E$  al comprimir un resorte desde  $x_1$  a  $x_2$  pero recupera menos de  $\Delta E$  al dilatarse el resorte de  $x_2$  a  $x_1$ , el concepto de energía potencial carecería de utilidad, ya que ¿qué significaría energía cinética acumulada en  $x_1$  o en  $x_2$ ? Un cuerpo que partiera de  $x_1$ , fuera a  $x_2$  y volviera luego a  $x_1$  tendría menos energía que un cuerpo que permaneciera en reposo en  $x_1$ .

En términos más generales, para asociar una energía potencial a una fuerza  $F$ , esta fuerza  $F$  debe ser tal que si un cuerpo gana una energía  $\Delta E$  al desplazarse  $\Delta x$  en un sentido, pierda una energía exactamente igual al realizar *ese mismo* desplazamiento  $\Delta x$  en sentido contrario. Ello significa que la fuerza  $F$  no debe depender de la celeridad o del sentido de movimiento del cuerpo, sino que debe depender como máximo de la posición  $x$  del cuerpo. Según esto, no podremos asociar una energía potencial a una fuerza de rozamiento por deslizamiento, ya que estas fuerzas siempre están dirigidas en sentido contrario al del movimiento y, en consecuencia, no sólo dependen de la posición del cuerpo sino también de la dirección y sentido de su movimiento. El cuerpo pierde energía cinética tanto si se desplaza una distancia  $\Delta x$  hacia la derecha como hacia la izquierda. Se puede asociar una energía potencial a fuerzas constantes (deben ser constantes magnitud, dirección y sentido) o a fuerzas que dependan solamente de  $x$ , ya que entonces la fuerza que se ejerce sobre el cuerpo es totalmente independiente de en qué forma o cuán deprisa se mueve el cuerpo y las variaciones de energía cinética a lo largo de  $\Delta x$  y de  $-\Delta x$  serán iguales y opuestas. Las fuerzas a las que puede asociarse una energía potencial reciben el nombre de *conservativas* (se conserva la energía mecánica total). Las fuerzas a las que no puede asociarse una energía potencial se llaman *no conservativas*.

Si es  $\Delta E$  la variación de energía cinética cuando el cuerpo va de  $x$  a  $x + \Delta x$ , la variación correspondiente de energía potencial será

$$\Delta V = -\Delta E \quad (7-2)$$

y la energía mecánica total  $H = E + V$  deberá mantenerse constante. Está claro que la energía potencial del cuerpo está relacionada con la fuerza que sobre él se ejerce y obtendremos directamente esta relación si recordamos que la fuerza

ejercida sobre un cuerpo puede expresarse en la forma  $F = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta E / \Delta x)$ . Entonces, teniendo en cuenta que  $\Delta E = -\Delta V$ , se deduce que

$$F = - \frac{dV}{dx} \quad (7-3)$$

o sea

$$V = - \int F(x) dx + \text{const.} \quad (7-4)$$

En otras palabras, cuando la fuerza sólo depende de la posición del cuerpo, la energía potencial se puede calcular de una vez por todas a partir de la ecuación (7-4). La constante de integración no tiene demasiada importancia, ya que en todos los cálculos en que intervenga la energía potencial sólo nos interesa, en última instancia, la diferencia entre las energías potenciales en dos puntos. Por tanto, en cada caso particular, se toma la constante de manera que haga lo más sencilla posible la expresión de la energía potencial. En lo que sigue podrá verse bien esto.

Del estudio anterior se deduce ahora que, para una energía mecánica total dada, la energía cinética, así como la potencial, sólo dependen de la posición del cuerpo. Podemos, pues, preparar un diagrama de la energía potencial y de la energía cinética del cuerpo a partir de un conocimiento de la fuerza y de la energía mecánica total. Ésta puede determinarse como suma de las energías cinética y potencial del cuerpo en un punto arbitrario cualquiera. Si, en un punto determinado, es nula la energía potencial, la energía mecánica total no es más que la energía cinética en dicho punto. Inversamente, si es nula la energía cinética en un punto determinado, la energía mecánica total será igual a la energía potencial en dicho punto. Aun cuando en el estudio que sigue se ha tomado una fuerza del tipo de las de resorte, estas consideraciones son aplicables a cualquier fuerza conservativa, tal como la fuerza gravitatoria y la fuerza electrostática.

Si además de fuerzas conservativas debemos considerar fuerzas de rozamiento, podemos ver que la energía mecánica total no se mantendrá constante sino que disminuirá continuamente a causa del trabajo negativo de las fuerzas de rozamiento que actúan sobre el cuerpo en movimiento. En los problemas de este tipo en los que intervienen fuerzas no conservativas, suele ser más conveniente aplicar el teorema de las fuerzas vivas al cálculo de la energía cinética del cuerpo.

El concepto de energía potencial no introduce, claro está, nada que nos sea fundamentalmente nuevo. Todo lo que pueda hacerse con este concepto puede hacerse con el teorema de las fuerzas vivas. No obstante, encontramos que ofrece un nuevo punto de vista y, lo más importante, que sirve para introducir el principio general de conservación de la energía que estudiaremos más adelante en este capítulo y de nuevo en relación con la Termodinámica.

**7-2 Ejemplos. Diagramas energéticos.** Con el fin de establecer mejor la idea de energía potencial, la aplicaremos al movimiento en el campo gravitatorio local y luego estudiaremos con mayor detalle el movimiento de un cuerpo bajo la acción de una fuerza del tipo de las de resorte. Presentaremos gráficamente la relación existente entre las energías potencial, cinética y mecánica total, mediante los llamados diagramas energéticos. Aunque no pudiera expresarse matemáticamente el movimiento en forma explícita, podemos obtener siempre directamente una idea cualitativa del movimiento a partir de un diagrama energético.

Consideremos el movimiento en el campo gravitatorio local. Se lanza hacia arriba un cuerpo de masa  $m$  con una velocidad inicial  $v_y = v_0$  desde una altura  $y = y_0$  sobre la superficie terrestre. ¿Cuáles serán la energía cinética y la celeridad  $v$  del cuerpo cuando alcanza una altura  $y$ ? En primer lugar resolveremos el problema con ayuda del teorema de las fuerzas vivas. El sentido positivo de la coordenada  $y$  de posición es hacia arriba, por lo que la fuerza que se ejerce sobre el cuerpo será  $F_y = -mg$ ; el trabajo realizado sobre el cuerpo al desplazarse de  $y_0$  a  $y$  es  $F_y(y - y_0) = -mg(y - y_0)$ . Este trabajo es igual a la variación de energía cinética  $(mv^2/2) - (mv_0^2/2)$ ; es decir,

$$-mg(y - y_0) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2.$$

La celeridad  $v$  puede obtenerse directamente a partir de esta ecuación en función de  $y, y_0$  y  $v_0$ . Podemos escribir la expresión anterior en la forma siguiente:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgy_0 \quad (7-5)$$

La cantidad del primer miembro se refiere al cuerpo en la posición  $y$ , mientras que la del segundo es la misma cantidad evaluada para  $y = y_0$ . Esta cantidad, pues, es una constante del movimiento que representa la energía mecánica total del cuerpo y la energía  $mgy$  es evidentemente la energía potencial que, sumada a la cinética, hace constante la suma.

Con el fin de comprender mejor el estudio formal de la energía potencial del apartado anterior, resolveremos ahora el problema utilizando desde el principio el concepto de energía potencial. Se da la fuerza que, en este caso particular, es constante:  $F_y = -mg$ . A partir de la fuerza dada determinamos la energía potencial por medio de la relación (7-4):

$$V = -\int F_y dy + \text{const} = mgy + \text{const.} \quad (7-6)$$

Según indicamos anteriormente, la elección de la constante de integración depende del punto en que queramos establecer la energía potencial igual a cero. En este caso particular es conveniente elegir el punto cero al nivel del suelo, es decir, a  $y = 0$ . Esto significa que la constante de (7-6) es nula. Habiendo hallado la

expresión de la energía potencial, podemos utilizar el principio de conservación de la energía mecánica total para obtener

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = H$$

La constante  $H$  puede evaluarse como suma de las energías cinética y potencial en un punto cualquiera. En el punto de partida  $y = y_0$ , conocemos las energías cinética y potencial, es decir,  $H = (mv_0^2/2) + mgy_0$ . Así, obtenemos

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgy_0 \quad (7-7)$$

que es el mismo resultado de la ecuación (7-5). Obsérvese que se habría obtenido esta misma relación independientemente de la elección de constante de integración en la ecuación (7-6), ya que dicha constante habría aparecido en los dos miembros de la ecuación (7-7). Si queremos calcular la celeridad del cuerpo cuando choca contra el suelo, no haremos mas que  $y = 0$  en la relación anterior y obtenemos  $v^2 = v_0^2 + 2gy_0$ .

Resulta muy ilustrativo presentar en un diagrama la relación entre las energías potencial, cinética y mecánica, en el cual se representa gráficamente la energía potencial (conocida de antemano a partir de la fuerza conocida) en función de la coordenada de posición del cuerpo. En el ejemplo actual tenemos  $V = mgy$ , que es una recta en el diagrama de la figura 7-2. La energía mecánica total  $H$  puede representarse por una recta horizontal en el diagrama, y la energía cinética  $E = H - V$  vendrá representada simplemente por la distancia vertical entre la recta  $H$  y la gráfica de la energía potencial, según se indica.

Cuando el cuerpo alcanza su altura máxima  $y_m$ , la energía cinética es nula y la energía potencial de dicho punto  $mgy_m$  es igual a la energía mecánica total del cuerpo. Cuando cae éste, se convierte continuamente energía potencial en cinética, de manera que se mantenga constante la suma  $E + V = H$ . En  $y = 0$

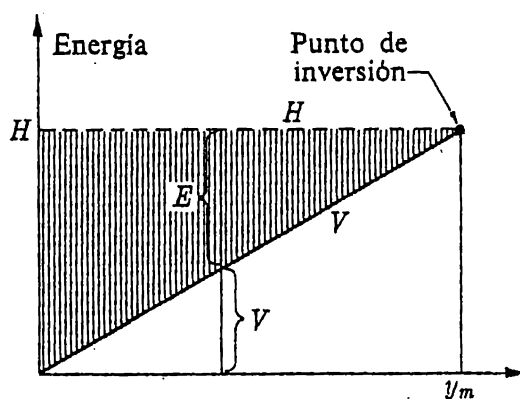


Fig. 7-2. Diagrama energético para un cuerpo situado en el campo gravitatorio local.

toda la energía es cinética. Como la energía potencial  $V$  nunca puede superar a la energía mecánica total  $H$ , sólo será posible el movimiento en las regiones de  $y$  en que la curva  $H$  esté por encima de la curva  $V$  en el diagrama energético. El punto de intersección de las dos gráficas representa un punto de inversión del sentido de movimiento, y en dicho punto es nula la energía cinética.

Reconsideremos ahora el movimiento de un cuerpo sometido a la influencia de una fuerza del tipo de la de un resorte, y determinemos la celeridad del cuerpo en función de su posición cuando se conocen las condiciones iniciales. Con el fin de ilustrar el concepto de energía potencial, volveremos a resolver, en primer lugar, el problema, utilizando el teorema de las fuerzas vivas, y luego utilizando la energía potencial y el principio de conservación de la energía mecánica total. Las ecuaciones que se obtengan en ambos casos pueden llevarse, evidentemente, a la misma forma; a pesar de todo, convendrá realizar su deducción con todo detalle.

Supongamos que el cuerpo está unido al extremo de un resorte comprimido que soltamos después, como se indica en la figura 7-3. Sobre el cuerpo se ejerce la fuerza  $F_x = -Kx$ , y si el cuerpo inicia su movimiento en  $x = -x_0$ , el trabajo realizado por la fuerza cuando el cuerpo alcanza  $x$  es  $W = \int_{-x_0}^x F_x dx = \int_{-x_0}^x (-Kx) dx = (Kx_0^2/2) - (Kx^2/2)$ . La energía cinética en  $x$  viene dada, pues, por

$$\frac{1}{2}mv^2 = \int_{-x_0}^x F_x dx = \frac{1}{2}Kx_0^2 - \frac{1}{2}Kx^2 \quad (7-8)$$

Para resolver ahora el mismo problema utilizando los conceptos de energía potencial y conservación de la energía mecánica total, procederemos de la manera

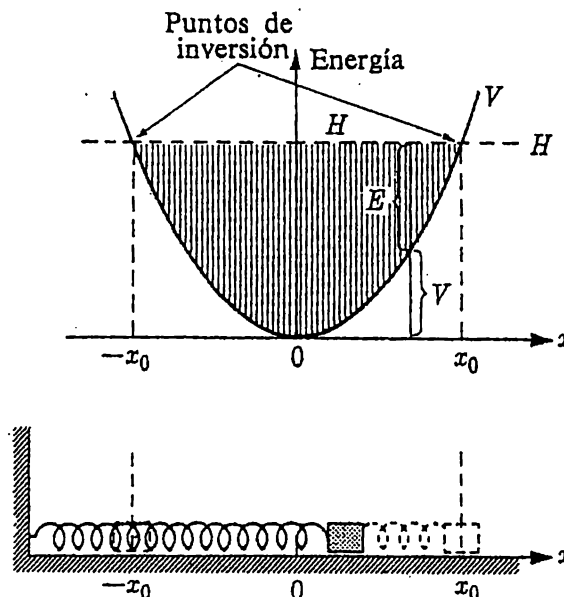


Fig. 7-3. Diagrama energético para un cuerpo unido a un extremo de un resorte. El otro extremo se mantiene fijo.

siguiente. Determinaremos la energía potencial que corresponde a la fuerza dada, a partir de la relación (7-4),  $V = -\int F_x dx + C$ , que, en el caso actual, es  $V = Kx^2/2 + C$ . Si tomamos  $V = 0$  cuando  $x = 0$ , obtenemos  $C = 0$  y  $V = Kx^2/2$ . Por la conservación de la energía,  $V + E = H = \text{constante}$ , obtenemos

$$\frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{const} = H$$

La constante  $H$  de la energía puede valorarse a partir de las condiciones conocidas en un punto. En particular, tenemos  $v = 0$  en  $x = -x_0$ . Aquí, la energía es enteramente potencial y tenemos  $H = Kx_0^2/2$ . Así, pues, tenemos

$$\frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}Kx_0^2$$

que es igual que la ecuación (7-8).

En la figura 7-3 puede verse el diagrama energético para el cuerpo situado al extremo del resorte. La energía potencial  $V = Kx^2/2$  viene representada por una parábola. La energía potencial inicial es  $Kx_0^2/2$ , que es también la energía mecánica total, pues  $E = 0$  inicialmente. La energía potencial no puede nunca superar a  $H$  y en consecuencia, la magnitud del desplazamiento del cuerpo a partir de la posición de equilibrio no puede superar a  $x_0$ ; el movimiento queda limitado a la región  $-x_0 < x < x_0$ . Los puntos de inversión del movimiento están definidos por la intersección de la gráfica de la energía total  $H = \text{const}$ , con la gráfica de la energía potencial. La energía cinética es máxima en  $x = 0$ , en cuyo punto toda la energía es cinética.

*Celeridad y tiempo de tránsito en el movimiento unidimensional.* Vamos a resumir en términos generales las observaciones hechas en el apartado anterior referentes al movimiento unidimensional de un cuerpo sometido a la acción de una fuerza conservativa.

Si es  $V = V(x)$  la energía potencial de la fuerza y  $E$  la energía cinética del cuerpo, tenemos  $E + V = H = \text{const.}$  y la celeridad del cuerpo vendrá dada por

$$v = \sqrt{\frac{2(H - V)}{m}} \quad (7-9)$$

Como  $H$  es constante y  $V$  es función exclusiva de  $x$ , se deduce que la celeridad también es función exclusiva de la posición. Tenemos  $v = dx/dt$  y el tiempo de tránsito del cuerpo entre las posiciones  $x_0$  y  $x$  puede expresarse en la forma:

$$t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{v} = \int_{x_0}^x \sqrt{\frac{m}{2[H - V(x)]}} dx \quad (7-10)$$

que es válida si la velocidad no invierte su sentido en la región comprendida entre  $x_0$  y  $x$ .

Como ejemplo del empleo de estos resultados generales, consideremos el movimiento vertical en el campo gravitatorio local. Supongamos que se lanza un cuerpo hacia arriba desde el suelo, con una velocidad tal que alcance una altura máxima  $y_m$ . La energía mecánica total es entonces  $H = mgy_m$ . El tiempo de tránsito desde el suelo hasta la altura máxima, según la fórmula general (7-10), es

$$t = \int_0^{y_m} \sqrt{\frac{m}{2mg(y_m - y)}} dy = \sqrt{\frac{2y_m}{g}} \quad (7-11)$$

resultado conocido desde el Capítulo 3.

Análogamente, en el ejemplo del movimiento del cuerpo fijo al extremo de un resorte, obtenemos para el tiempo de tránsito entre  $x = -x_0$ , y  $x = x_0$ :

$$t = \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{\frac{m}{2(Kx_0^2/2 - Kx^2/2)}} dx = \pi \sqrt{\frac{m}{K}} \quad (7-12)$$

En el Capítulo 8 se obtendrá este resultado de manera diferente y se estudiará más a fondo.

**7-3 Energía potencial-movimiento en un plano y en el espacio.** La extensión del concepto de energía potencial para incluir el movimiento en un plano y en el espacio, resulta directamente de nuestras consideraciones acerca del movimiento a lo largo de una línea. En tal caso, hemos visto que el cuerpo puede tener una energía cinética latente o potencialmente disponible, especificada por la posición del cuerpo a lo largo de la línea. Para que sea útil la idea de energía potencial en el análisis del movimiento de un cuerpo en el espacio, deberemos poder especificar una energía cinética latente o potencialmente disponible de acuerdo con una posición del cuerpo en el espacio. Veamos cómo puede aplicarse esta idea a dos ejemplos conocidos.

Consideremos, en primer lugar, la fuerza gravitatoria local, pero dejemos que el cuerpo se mueva libremente en las direcciones  $x$  y  $z$  tanto como en la  $y$ . Por el teorema de las fuerzas vivas, tenemos

$$\Delta E = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z$$

Pero no hay fuerza en las direcciones  $x$  o  $z$  y la energía cinética sólo variará a consecuencia del movimiento en la dirección  $y$ . Por tanto, la energía potencial será, como antes,  $mgy$ , pero ahora, en vez de tener la energía potencial valores fijos a lo largo de una recta vertical, podemos considerarla como teniendo valores fijos sobre planos paralelos horizontales. Siempre que un cuerpo pase de un plano definido por  $y_1$  a otro definido por  $y_2$ , su energía potencial varía de  $mgy_1$  a  $mgy_2$ , por lo que la variación de energía cinética será  $\Delta E = -\Delta V = -mg(y_2 - y_1)$ .

**EJEMPLO.** Consideremos un péndulo simple constituido por una masa puntual  $m$  suspendida del extremo de una varilla ligera de longitud  $l$ . Sobre la masa se ejercen dos fuerzas: su peso  $mg$  y la tensión  $T$  de la varilla. Esta fuerza no trabaja, ya que al moverse  $m$  en uno y otro sentido su velocidad es siempre perpendicular a  $T$ . Por tanto, la energía potencial está determinada por  $y$ , distancia sobre la posición más baja a la que se halla la masa. Si tomamos nula la energía potencial del punto más bajo, tenemos

$$V = mgy = mgl(1 - \cos \theta)$$

En la figura 7-4 vemos que para ángulos que no se aparten mucho de  $\theta = 0$ , la curva de la energía potencial tiene forma parecida a la de la energía potencial de una masa unida a un resorte. Si la lenteja de un péndulo tiene una energía mecánica total  $H_1$ , la energía total sólo es mayor que  $V$  en una región limitada de  $\theta$ , según se indica, y el péndulo oscilará entre  $\theta_m$  y  $-\theta_m$ . Por otra parte, si la energía mecánica total es mayor que  $H_2 = 2mgl$ , la lenteja girará por completo alrededor del otro extremo y  $H$  será mayor que  $V$  en todos los puntos. En la parte más alta de la oscilación, donde  $\theta = \pi$ , la energía potencial es máxima y la energía cinética tendrá su valor mínimo.

Consideremos a continuación las fuerzas del tipo de las de resorte, pero imaginemos ahora que el extremo fijo del resorte está dispuesto de tal modo que el resorte y el cuerpo a él unido puedan moverse libremente en torno a un punto fijo, sobre un plano horizontal exento de rozamientos (fig. 7-5). La variación de energía cinética que el resorte comunica al cuerpo y la variación correspondiente de energía potencial, sólo dependen de la compresión o dilatación del resorte y ésta está determinada por la distancia radial  $r$  del punto fijo al extremo del resorte al cual se une el cuerpo. Esto se deduce del hecho de que la fuerza del resorte está dirigida a lo largo de él y sólo los desplazamientos en dicha dirección producirán trabajo y variarán la energía potencial. En el caso unidimensional encon-

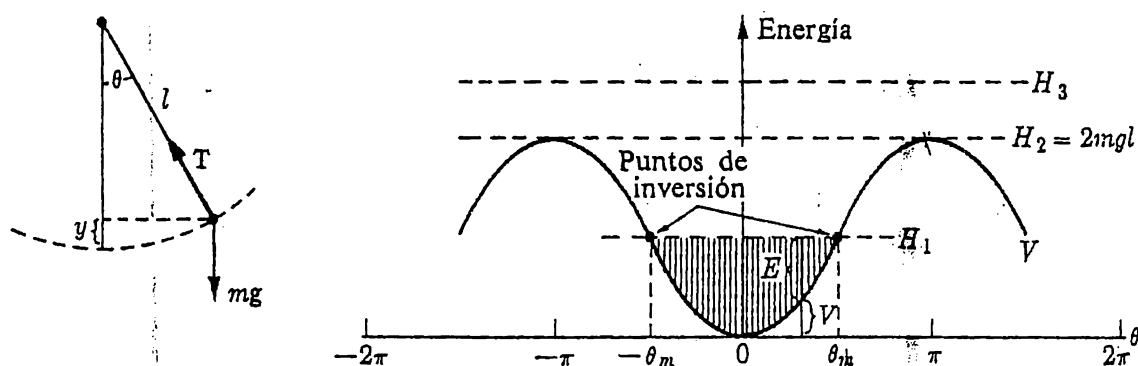


Fig. 7-4. Diagrama energético para un péndulo simple. Si la energía mecánica total es menor que  $H_2 = 2mgl$ , tenemos  $H$  mayor que  $V$  sólo en una región limitada de  $\theta$  y el péndulo oscila entre los puntos de inversión  $\theta_m$  y  $-\theta_m$ . Por otra parte, si  $H > 2mgl$ , siempre será  $H$  mayor que  $V$  y el movimiento será posible para todos los ángulos, es decir, la lenteja recorrerá una circunferencia entera.



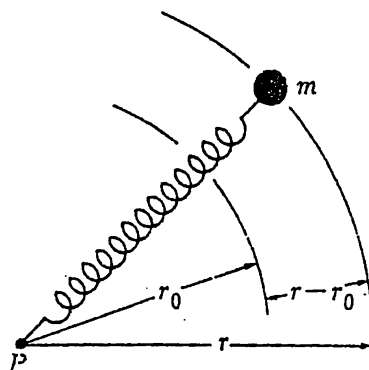


Fig. 7-5. El resorte puede girar libremente alrededor del punto  $P$ . La energía potencial es  $V = \frac{1}{2}K(r - r_0)^2$  y las superficies equipotenciales son esferas centradas en  $P$ .

trábamos que la energía potencial tenía valores fijados por la posición del cuerpo a lo largo de una línea. En cambio, ahora la energía potencial está determinada por la distancia del cuerpo al punto fijo, y todas las posiciones de una circunferencia de radio dado tienen la misma energía potencial. Si el cuerpo unido al resorte se moviera por el espacio alrededor del punto fijo y no hubieran fuerzas gravitatorias, todos los puntos de una superficie esférica de radio dado tendrían energías potenciales iguales.

Las superficies sobre las que puede moverse un cuerpo sin que varíe su energía potencial reciben el nombre de *superficies equipotenciales*. En el ejemplo anterior, las superficies equipotenciales son superficies esféricas centradas en el punto fijo del resorte. En el caso gravitatorio mencionado anteriormente, las superficies equipotenciales eran planos paralelos horizontales. (En realidad, esos planos paralelos horizontales son pequeñas porciones de superficies esféricas concéntricas con la Tierra, en todo análogas a las superficies esféricas del caso del resorte).

La fuerza del resorte que acabamos de estudiar, es un caso particular de una clase de fuerzas muy importantes, cuales son las que dependen como máximo de la distancia y están dirigidas según la recta que une dos cuerpos en interacción. El concepto de energía potencial, tal como lo veremos a continuación, es válido para *todas* las fuerzas de esta clase. Entonces, si se fija en el espacio uno de los cuerpos en interacción (a lo que corresponde el punto fijo en el caso del resorte, o el Sol en el caso del movimiento planetario), y si se toma este punto fijo como origen de un sistema de coordenadas, la fuerza que se ejerce sobre el cuerpo móvil estará siempre dirigida radialmente (hacia el centro o en sentido opuesto). A las fuerzas de este tipo se les da el nombre de fuerzas *centrales*. Si, además, la magnitud de la fuerza sólo depende del radio  $r$ , la fuerza sólo realizará trabajo cuando se mueva en la dirección radial. Si es  $F(r)$  la fuerza, tomada positiva cuando está

dirigida en el sentido de alejamiento del centro, la expresión de la energía potencial es análoga a la de la ecuación (7-4). Tenemos

$$V(r) = -\int F(r) dr + \text{const} \quad (7-13)$$

Las fuerzas electrostáticas y gravitatorias son fuerzas centrales que sólo dependen de  $r$  y por tanto sus energías potenciales se podrán obtener de (7-13).

Aun cuando las fuerzas centrales de esta clase son las más importantes, es interesante preguntarnos si puede introducirse una energía potencial para otros tipos de fuerzas que intervengan en el movimiento en un plano o en el espacio. Podríamos estar tentados de decir que la introducción de una energía potencial es posible si la fuerza sólo depende de la posición del cuerpo. Sin embargo, a poco que pensemos, nos daremos cuenta de que este requisito que es suficiente en el caso unidimensional y para fuerzas centrales, no lo es en general. Debemos exigir, además, que sea nulo el trabajo realizado por la fuerza cuando el cuerpo recorra un camino cerrado arbitrario. Si no fuera nulo este trabajo, el cuerpo podría ganar una cantidad cualquiera de energía cinética sin más que recorrer el mismo camino cerrado una y otra vez. No podríamos, ciertamente, especificar en tal caso una energía latente o potencialmente disponible sin más que conocer la posición del cuerpo, ya que a un mismo punto del espacio corresponderían muchos valores, que dependerían de la historia previa del movimiento.

Es importante darse cuenta de que las consideraciones energéticas nos dan información acerca de la energía cinética y de la celeridad del cuerpo, pero nada nos dicen acerca de la dirección y sentido del movimiento. Por ejemplo, en el caso de consideraciones unidimensionales, el conocimiento de la energía cinética no nos dice si el cuerpo se está moviendo hacia la derecha o hacia la izquierda, y cuando un cuerpo puede moverse en el espacio puede tener componentes de la velocidad según las tres direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Mediante consideraciones energéticas solamente, únicamente podremos hallar el valor de  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ .

*Relación energética en un campo de fuerzas inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia.* Como ejemplo del empleo de los conceptos de energía potencial y de energía mecánica total, estudiaremos brevemente el movimiento de un cuerpo cuando se halla sometido a una fuerza cuya magnitud es de la forma  $K/r^2$ . Las fuerzas gravitatorias y electrostáticas son de ese tipo. Las fuerzas gravitatorias son siempre atractivas y tenemos  $F = -K/r^2$ , si es  $K$  constante y positiva. Los planetas, la Luna, los satélites, meteoros y cometas se mueven bajo la influencia de fuerzas gravitatorias. Las fuerzas electrostáticas pueden ser atractivas o repulsivas y tenemos  $F = \pm K/r^2$ , y esto depende de si las cargas de am-

bos cuerpos son de igual signo (en cuyo caso vale el signo +), o de signo contrario (en cuyo caso vale el —). Los electrones atómicos se mueven bajo la influencia de fuerzas electrostáticas. En ambos casos, electrostático y gravitatorio, la fuerza está dirigida según la recta que une los dos cuerpos en interacción. La fuerza es nula solamente cuando  $r$  se hace infinitamente grande y conviene tomar la energía potencial nula también para  $r = \infty$ . Entonces, la constante de la ecuación (7-13) es cero y para una fuerza repulsiva tenemos

$$V(r) = - \int \frac{K}{r^2} dr = \frac{K}{r} \quad (7-14)$$

Aquí, cuando crece  $r$ , disminuye la energía potencial y, por tanto, aumenta la energía cinética.

Supongamos que un cuerpo de masa  $m$  se halla sometido a una fuerza del tipo  $(K/r^2)$  y que a una distancia  $r_0$  del centro de fuerzas, la energía cinética es  $E_0$ . La energía total  $E + V$  debe ser constante y en  $r = r_0$  sabemos que su valor es  $H = E_0 + K/r_0$ . La energía cinética para un valor de  $r$  arbitrario se obtendrá pues, de

$$E + \frac{K}{r} = E_0 + \frac{K}{r_0} \quad (7-15)$$

(La dirección del movimiento no puede determinarse a partir, solamente, de consideraciones energéticas). Obsérvese que la energía cinética se anula para el radio  $r_1$  dado por  $K/r_1 = E_0 + K/r_0$ , y el cuerpo no podrá acercarse hasta una distancia del centro de fuerzas inferior a  $r_1$ . Al moverse el cuerpo hacia el infinito, su energía cinética tiende al valor de la energía total  $E_0 + K/r_0$ . Según se indicó anteriormente, el movimiento queda restringido a la región del espacio en donde  $H$  es mayor que  $V$ , es decir, donde la gráfica de  $H$  se halla por encima de la de  $V$  en el diagrama energético de la figura 7-6. Las gráficas se cortan en  $r = r_1$  y el movimiento queda confinado a la región  $r > r_1$ .

En cambio, si la fuerza es atractiva, con lo que  $V = -K/r$ , y la energía cinética es  $E_0$  en  $r = r_0$ , la energía cinética correspondiente a un valor arbitrario de  $r$  viene dada por

$$E - \frac{K}{r} = E_0 - \frac{K}{r_0} \quad (7-16)$$

Ahora, el cuerpo gana energía cinética al acercarse al centro de fuerzas y la pierde al alejarse. La energía cinética se anula en  $r = r_2$  donde  $K/r_2 = K/r_0 - E_0$ , y el cuerpo ya no puede alejarse más. Tan sólo en la región  $r < r_2$  es  $H$  mayor que  $V$ , según puede verse en la figura 7-6. El cuerpo se halla atrapado en dicha región.

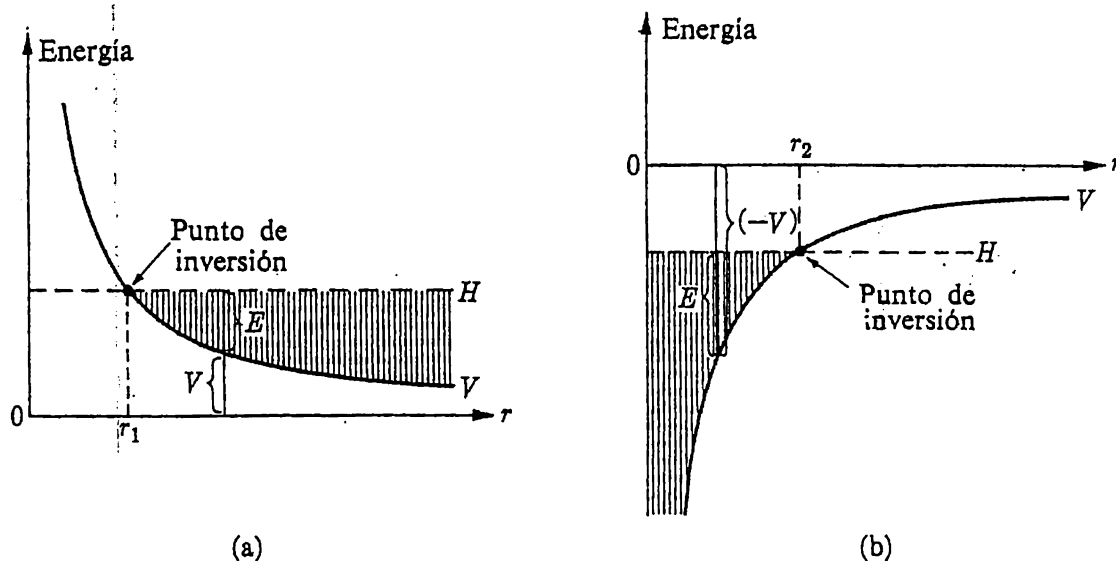


Fig. 7-6. Diagrama energético para fuerzas del tipo  $(K/r^2)$ : (a) fuerza repulsiva  $+K/r^2$ , y (b) fuerza atractiva  $-K/r^2$ . Si, en el caso de atracción, la energía total es positiva, todos los valores de  $r$  son accesibles. Si la energía total es negativa, el cuerpo queda atrapado. Los planetas, por ejemplo, están atrapados por la fuerza gravitatoria del Sol.

La energía mecánica total en el caso de fuerza atractiva es

$$H = E - \frac{K}{r} \quad (7-17)$$

Si es  $H$  positiva, también lo será la energía cinética aunque  $r$  se haga infinita. Si  $H$  es negativa, la energía cinética será nula para un cierto valor finito de  $r_1$  y, según se mencionó anteriormente, el cuerpo se halla atrapado. Si  $H$  es exactamente igual a cero, la energía cinética tiende a cero al tender el cuerpo al infinito. La energía mecánica total de todos los planetas del sistema solar es negativa. Están atrapados en el campo de fuerzas gravitatorio del Sol. Análogamente, todos los cometas están aparentemente atrapados y así tienen una energía mecánica total negativa. En cambio, algunos meteoritos tienen energías positivas y podrían, si no chocaran contra la Tierra u otro obstáculo, o si no se inflamaran, escapar de nuevo a los espacios estelares de donde vinieron,

**7-4 Superposición de energías potenciales.** En el capítulo 4 observábamos que cuando se ejercen varias fuerzas sobre un cuerpo, pueden representarse por su suma *vectorial*. Esta es una propiedad fundamental e importante que justifica la introducción del concepto de fuerza. En el cálculo de la energía cinética de un cuerpo sometido a la influencia de varias fuerzas es particularmente útil el concepto de energía potencial, pues las energías potenciales debidas a varias

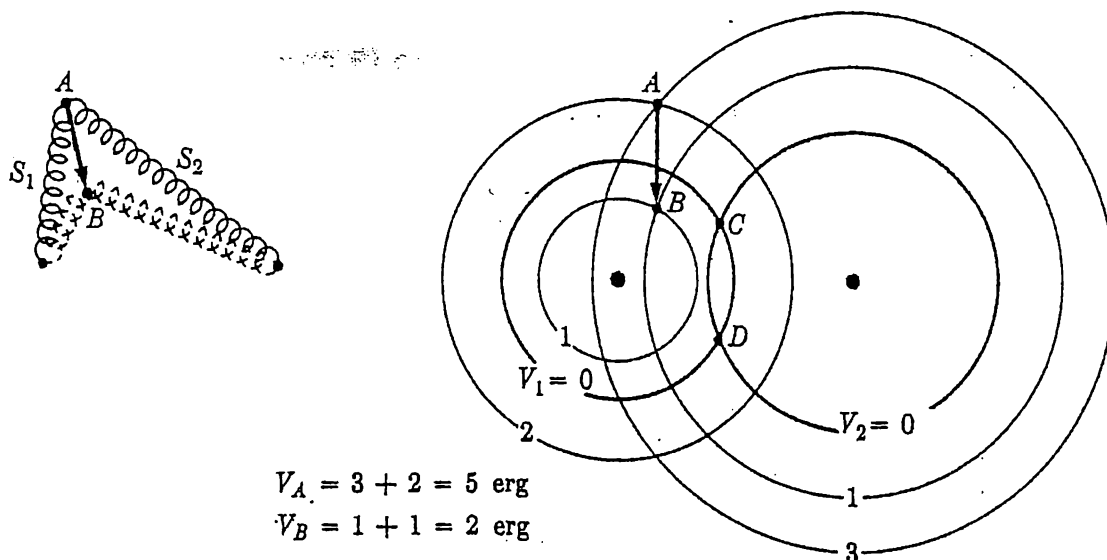


Fig. 7-7. Un cuerpo se mueve de *A* a *B* bajo la influencia de dos resortes. La variación de su energía potencial es la suma de las variaciones de energía potencial debidas a cada uno de los dos resortes. En el tránsito de *A* a *B*, por tanto, un cuerpo ganaría 3 erg de energía cinética.

fuerzas que se ejercen sobre un cuerpo se pueden sumar *algebraicamente*, según se ha estudiado anteriormente. Desde luego si, por ejemplo, deseamos información detallada acerca de la dependencia del tiempo del movimiento, deberemos considerar las fuerzas en detalle y su suma vectorial. No obstante, la energía potencial nos permite hallar la energía cinética en función de la posición, lo cual es, al mismo tiempo, valioso y de fácil obtención.

Consideremos en primer lugar la fuerza del tipo resorte. Imaginemos un cuerpo unido a dos resortes, cada uno de los cuales puede girar alrededor de un extremo fijo (fig. 7-7). Si arreglamos las cosas de manera que partamos de una posición en la cual ambos resortes se hallen indeformados y luego tiramos del cuerpo de manera que se estiren ambos resortes, el trabajo realizado sobre el cuerpo por los resortes es la suma de las contribuciones al trabajo de la fuerza de cada resorte, según vimos en el capítulo 6. Es decir, la energía potencial del cuerpo es igual ahora a la suma algebraica de las energías potenciales que surgen de cada uno de los resortes.

Más generalmente, cuando un cuerpo se halla sometido a la influencia de varias fuerzas, todas ellas conservativas (es decir, del tipo al cual pueda asociarse una energía potencial), sufrirá una variación de energía cinética  $\Delta E = F \cdot \Delta r$  al desplazarlo  $\Delta r$ . Aquí,  $F$  es la suma vectorial de todas las fuerzas conservativas  $F_1 + F_2 + F_3 + \dots$ . La variación de energía cinética será, pues,

$$\Delta E = F_1 \cdot \Delta r + F_2 \cdot \Delta r + F_3 \cdot \Delta r + \dots \quad (7-18)$$

o sea, la suma *algebraica* de los trabajos (cantidades escalares) realizados por cada fuerza por separado. Cada uno de los términos del trabajo, cuando se integra, es igual y de signo contrario a la variación de energía potencial asociada únicamente a la fuerza correspondiente, y así la variación de energía cinética es simplemente  $\Delta E = -\Delta V$ , donde  $V$  es la energía potencial total (suma algebraica):

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots \quad (7-19)$$

**EJEMPLO 1.** Un resorte vertical de longitud  $2L$  y constante  $K$  se suspende por un extremo. Al otro se une un cuerpo de masa  $m$ . Se comprime el resorte hasta la mitad de su longitud y se suelta. Determinar la energía cinética del cuerpo y su valor máximo en el movimiento subsiguiente.

El cuerpo se halla sometido a dos fuerzas conservativas, la del resorte y la de la gravedad. Si se mide la posición del cuerpo a partir de la posición del resorte *indeformado* con la coordenada  $y$  (positiva hacia arriba) y si se hace igual a cero la energía potencial correspondiente a  $y = 0$ , las energías potenciales correspondientes a las dos fuerzas son  $Ky^2/2$  y  $mgy$ , respectivamente. La energía potencial total es entonces

$$V = \frac{1}{2}Ky^2 + mgy$$

El principio de conservación de la energía,  $E + V = H = \text{const.}$  da entonces la siguiente expresión para el cálculo de la energía cinética  $E$ :

$$E + \frac{1}{2}Ky^2 + mgy = \text{const} = H \quad (7-20)$$

El valor constante de  $H$  se determina a partir del hecho de que  $E = 0$  cuando  $y = L$  (condiciones iniciales). Por tanto, obtenemos  $H = KL^2/2 + mgL$ , y de (7-20) hallamos que la energía cinética es entonces

$$E = \frac{K}{2} (L^2 - y^2) + mg(L - y)$$

La energía cinética tendrá un valor máximo y la potencial un mínimo donde  $dE/dy = 0$  o  $dV/dy = 0$ , es decir, en el punto  $y_0$  dado por  $Ky_0 = -mg$  o sea

$$y_0 = -\frac{mg}{K}$$

Este es el punto de equilibrio estático del cuerpo. La energía cinética máxima es, pues,

$$\begin{aligned} E_{\max} &= \frac{K}{2} (L^2 - y_0^2) + mg(L - y_0) \\ &= \frac{K}{2} (L^2 - y_0^2) - Ky_0(L - y_0) = \frac{K}{2} (L - y_0)^2 \end{aligned}$$

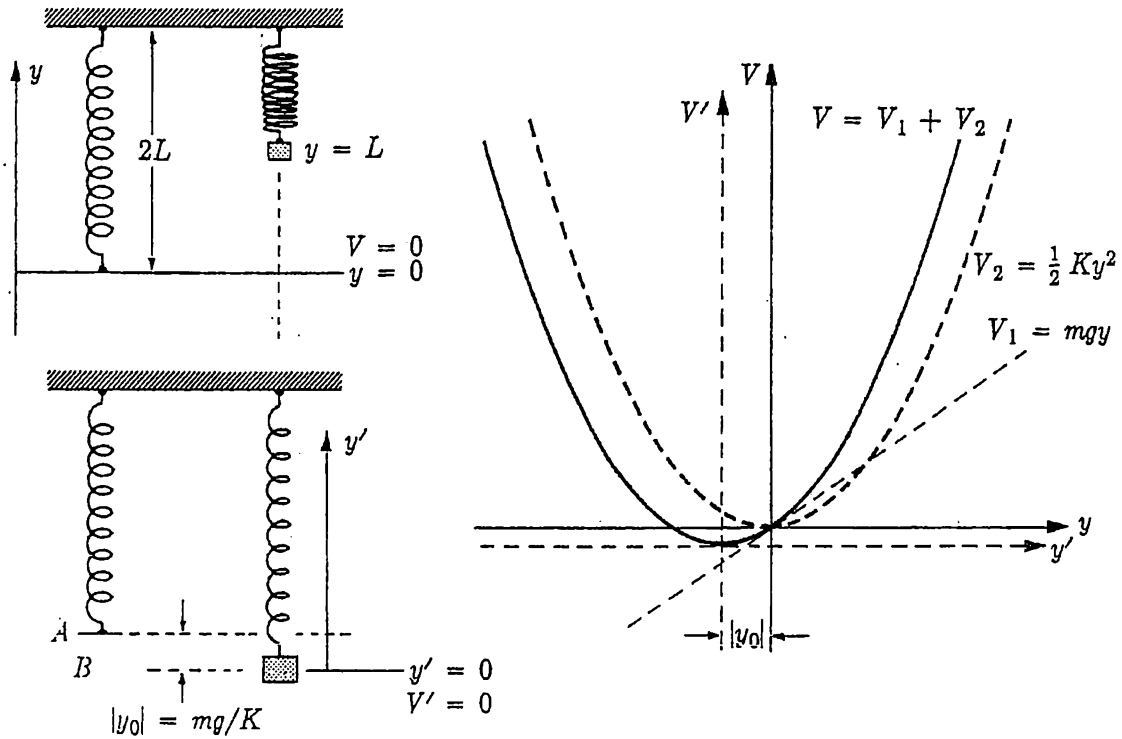


Fig. 7-8. Ejemplo de movimiento bajo la influencia de dos fuerzas conservativas. Obsérvese que se simplifica la resolución de este problema si se miden la posición y la energía potencial a partir de la posición de equilibrio  $B$ , en vez de a partir de la posición  $A$  correspondiente al resorte no deformado.

y el valor mínimo correspondiente de la energía potencial es

$$V_{\min} = -\frac{1}{2}Ky_0^2$$

Es interesante examinar el diagrama energético que representa este movimiento. La curva de energía potencial de la figura 7-8 es la suma de la función  $Ky^2/2$  representada por una parábola, más la función  $mgy$ , representada por una recta. La energía potencial total es otra parábola de valor mínimo  $V_{\min} = -Ky_0^2/2$  en el punto  $y = y_0$ . La energía potencial puede expresarse entonces en la forma

$$V - V_{\min} = \frac{K}{2} (y - y_0)^2$$

En otras palabras, si medimos la posición del cuerpo a partir de la posición de equilibrio, en lugar de la posición de resorte indeformado, y si tomamos nula la energía potencial en dicho punto, la expresión de la energía potencial queda simplificada en la forma

$$V' = \frac{K}{2} y'^2$$

donde  $V' = V - V_{\min}$  e  $y' = y - y_0$ .

El problema se reduce entonces a la determinación del movimiento de un cuerpo sometido solamente a la influencia de sólo una fuerza de resorte. Esta última elección de coordenadas y el punto cero de energía potencial es particularmente recomendable en los estudios de movimiento de un cuerpo bajo la influencia de una fuerza de resorte y una fuerza constante (tal como la de la gravedad), ya que entonces no es preciso incluir la energía potencial correspondiente a la fuerza constante. Su efecto sólo interviene en la determinación de la posición de equilibrio.

► EJEMPLO 2. Se une un cuerpo de 0,5 kg a tres resortes iguales cuya longitud indeformados es de 1 m. La constante para cada uno de los resortes es  $K = 2 \text{ N/m}$ , y en su estado indeformado están unidos a los tres vértices de un triángulo equilátero, según se indica en la figura 7-9. Se desplaza la masa  $m$  al punto  $A$  y se suelta. ¿Cuál será la energía cinética de  $m$  si vuelve al punto  $B$ ?

Cuando  $m$  está en  $A$ , los resortes  $a$  y  $c$  tienen una longitud de 0,87 m y por tanto están comprimidos 0,13 m. En cambio, el resorte  $b$  está dilatado 0,5 m. La energía potencial total en  $A$  es la suma de las energías potenciales asociadas a cada uno de los resortes y por tanto es

$$V_A = \frac{1}{2}Kx_a^2 + \frac{1}{2}Kx_b^2 + \frac{1}{2}Kx_c^2 \simeq 0,017 + 0,017 + 0,25 \simeq 0,28 \text{ joule}$$

Cuando la masa  $m$  está en  $B$ , su energía potencial es nula y, por tanto, su ganancia de energía cinética debe ser  $E = 0,28 \text{ J}$ , y su celeridad será  $v \simeq 1 \text{ m/s}$ .

Cuando se mueve un cuerpo bajo la influencia exclusiva del rozamiento o de otras fuerzas no conservativas, el concepto de energía potencial carece de utilidad, ya que no puede asociarse una energía potencial a fuerzas de ese tipo. Cuando un cajón resbala sobre el suelo y se detiene, su energía cinética inicial se ha convertido en energía calorífica y podemos ver que el cajón no tiene ninguna energía potencial o cinética latente que pueda volverse a convertir en energía cinética.

En la Naturaleza existen muchos casos en los que coexisten fuerzas conservativas y no conservativas. Un coche que descienda por una pendiente se halla sometido a la resistencia del viento y al rozamiento (no conservativas) y a la gravedad (conservativa). Si resulta útil al concepto de energía en estos casos, y frecuentemente así es, siempre se podrá utilizar el teorema de las fuerzas vivas. Basta igualar el trabajo total realizado por *todas* las fuerzas, conservativas y no conservativas, a la variación de energía cinética, e ignorar por completo la energía potencial. O bien, puede incluirse, como de costumbre, el trabajo realizado por las fuerzas conservativas en la energía potencial. Entonces habrá que calcular por separado, el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas. Llamaremos  $W_{nc}$  al trabajo realizado por las fuerzas no conservativas y del teorema de las fuerzas vivas y la definición de energía potencial, tenemos inmediatamente

$$W_{nc} = \Delta E + \Delta V \quad (7-21)$$



Como la energía mecánica total es  $H = E + V$ , podemos decir que el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas se emplea en variar la energía mecánica total. En el caso de las fuerzas de rozamiento, como  $W_{nc}$  es siempre una cantidad negativa, sirve para hacer disminuir la energía mecánica total.

EJEMPLO. Un cuerpo de masa  $m$  tiene una velocidad inicial  $v_0$  dirigida hacia la parte alta de un plano inclinado un ángulo  $\theta$  respecto a la horizontal. El coeficiente de rozamiento por deslizamiento entre la masa y el plano es  $\mu$ . ¿Qué distancia  $d$  deslizará el cuerpo plano arriba, antes de quedar en reposo? (Véase fig. 7-10.)

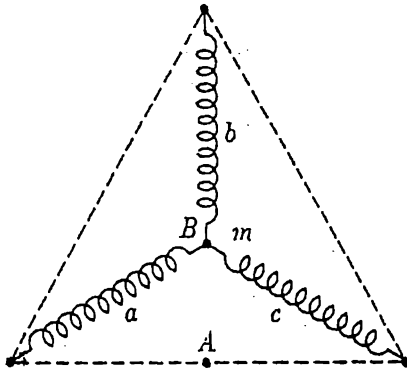


Figura 7-9

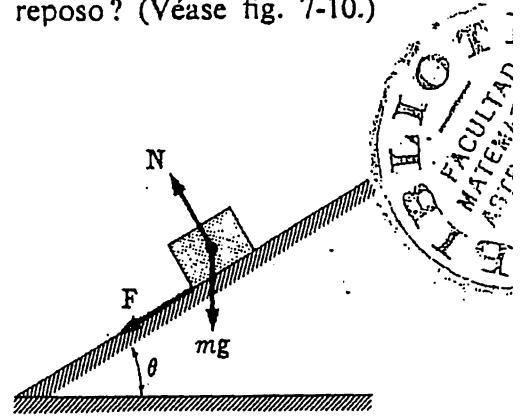


Figura 7-10

Sobre el cuerpo se ejercen dos fuerzas, su peso y la fuerza del plano. La fuerza del plano tiene dos componentes,  $N$  normal al plano, y  $f$  dirigida hacia la parte inferior del plano. La fuerza  $N$  no trabaja (es perpendicular al movimiento), su magnitud es  $mg \cos \theta$  y, por tanto, la fuerza de rozamiento es  $f = \mu mg \cos \theta$ .

Si aplicamos el teorema de las fuerzas vivas, tenemos que el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento es  $-fd$  y el realizado por el peso es  $-mg d \sin \theta$  pues la componente del peso en la dirección y sentido del desplazamiento es  $-mg \sin \theta$ . El trabajo total es, pues,  $-\mu mg d \cos \theta - mg d \sin \theta$  y debe ser igual a  $\Delta E = -mv_0^2/2$ . Tenemos, pues,

$$d = \frac{v_0^2}{2g(\mu \cos \theta + \sin \theta)}$$

La fuerza de rozamiento no es conservativa y el trabajo realizado por ella sola es  $W_{nc} = -\mu mg d \cos \theta$ . La fuerza gravitatoria es, desde luego, conservativa y si se toma nula la energía potencial correspondiente a la posición inicial, en  $d$  valdrá  $mg d \sin \theta$ . La variación de energía potencial es  $\Delta V = mg d \sin \theta$  y la variación de energía cinética es  $\Delta E = -mv_0^2/2$ . Tenemos

$$W_{nc} = \Delta E + \Delta V = -\frac{mv_0^2}{2} + mg d \sin \theta$$

$$-\mu mg d \cos \theta = -\frac{mv_0^2}{2} + mg d \sin \theta$$

igual que antes.

*Superficies equipotenciales.* Ya hemos mencionado las superficies equipotenciales (por ejemplo, los planos paralelos horizontales y las esferas concéntricas) asociadas a la fuerza gravitatoria local y a fuerzas dependientes de la distancia. Sobre esas superficies se puede mover un cuerpo sin que varíe su energía potencial, y, por tanto, si sólo hay fuerzas conservativas, tampoco variará su energía cinética. Por ejemplo, un satélite que se mueva siguiendo una órbita circular alrededor de la Tierra, tiene una energía cinética constante sobre una superficie esférica equipotencial.

Cuando sobre el cuerpo se ejerce más de una fuerza conservativa, existen superficies equipotenciales análogas, pero más complicadas. Por ejemplo, en la figura 7-11 pueden verse las secciones de las superficies equipotenciales para un cuerpo sometido a la influencia de dos fuerzas, electrostáticas o bien gravitatorias, una originada por  $B$  y la otra por  $C$ . Siempre que un cuerpo pase de una superficie equipotencial a otra, su energía cinética variará en la cantidad suficiente para mantener constante la energía mecánica total.

Desde luego, la familia de superficies equipotenciales está íntimamente relacionada con la fuerza resultante que se ejerce sobre el cuerpo. Supongamos unas superficies equipotenciales como las representadas en la figura 7-12. Cuando un cuerpo se mueve de la superficie  $V_1$  a la  $V_2$  ganará energía cinética si  $V_1$  es mayor que  $V_2$  y la perderá en el caso contrario. Sobre el cuerpo deberá ejercerse una fuerza, pues si no la energía cinética no podría variar y la fuerza estará dirigida hacia las energías potenciales decrecientes (cinéticas crecientes). La energía cinética variará más rápidamente con la distancia cuando el cuerpo se mueva en la dirección de la fuerza. Por tanto, la fuerza, en un lugar dado de la superficie  $V_1$  deberá estar dirigida según la distancia mínima a la superficie  $V_2$  y

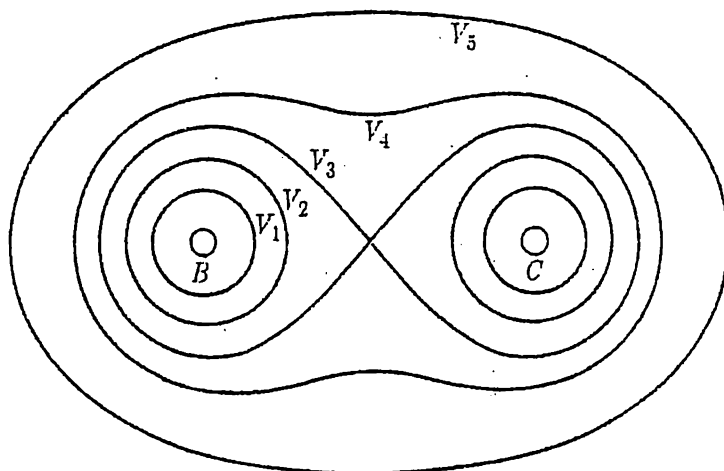


Fig. 7-11. Superficies equipotenciales (en sección) para dos fuerzas electrostáticas o gravitatorias, generadas una en  $B$  y otra en  $C$ . (Imagínense las superficies que se generan al hacer girar la figura alrededor de  $BC$ ).

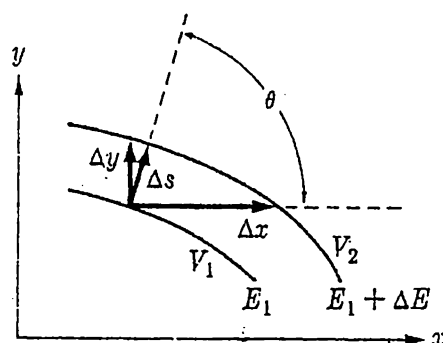


Fig. 7-12. Un cuerpo que vaya de la línea  $V_1$  a la  $V_2$  sufre una variación de energía cinética  $\Delta E = -\Delta V$ . La magnitud de la fuerza total es  $\bar{F} = -\Delta V/\Delta s$  y su dirección es normal a las superficies equipotenciales. La componente de la fuerza en la dirección  $x$  es  $\bar{F}_x = \bar{F} \cos \theta = -\Delta V/\Delta x$ .

esta dirección es la normal a la superficie  $V_1$  si las dos superficies son suficientemente próximas, es decir, si  $V_1$  y  $V_2$  difieren una cantidad suficientemente pequeña.

La magnitud de la fuerza viene dada por la variación de energía cinética por unidad de longitud. Si es  $\Delta s$  (fig. 7-12) la distancia más corta entre las superficies  $V_1$  y  $V_2$  y la energía cinética en  $V_2$  supera a la energía cinética en  $V_1$  en la cantidad  $\Delta E$ , la fuerza media en el tramo  $\Delta s$  es  $\bar{F} = \Delta E/\Delta s = -\Delta V/\Delta s$ , donde  $\Delta V$  es la variación correspondiente de energía potencial. Para alcanzar la superficie  $V_2$  en cualquier otra dirección hay que realizar un recorrido mayor que  $\Delta s$  y la componente correspondiente de la fuerza en dicha dirección será menor que  $\bar{F}$ . En particular, si el ángulo que forma  $\Delta s$  con el eje  $x$  es  $\theta$ , la componente de la fuerza en la dirección  $x$  es  $\bar{F}_x = \bar{F} \cos \theta = (-\Delta V/\Delta s) \cos \theta = -\Delta V/\Delta x$ , donde  $\Delta x = \Delta s/\cos \theta$ . Obsérvese que el desplazamiento  $\Delta x$  no es la proyección de  $\Delta s$  sobre el eje  $x$ , sino que es la distancia requerida para producir una variación  $\Delta V$  del potencial a lo largo del eje  $x$ . En el desplazamiento  $\Delta s$  varían  $x$  e  $y$ , pero en el desplazamiento a lo largo del eje  $x$ , se mantiene constante  $y$ . La derivada de  $V$  respecto a  $x$  representa la variación unitaria de  $V$  cuando se mantiene constante  $y$ . A esta derivada se le llama *derivada parcial de  $V$  respecto a  $x$*  y se representa por  $\partial V/\partial x$ . Las componentes de la fuerza según las direcciones  $x$  e  $y$  se podrán, pues, expresar en función del potencial  $V$ , en la forma siguiente:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad (7-22)$$

**7-5 La energía cinética en los choques.** *Cambios de energía cinética.* Hemos visto que, independientemente de la naturaleza del choque, se mantiene siempre constante la cantidad de movimiento total de los cuerpos en colisión.

Hemos clasificado fenomenológicamente los choques como totalmente inelásticos (la velocidad relativa disminuye hasta anularse), inelásticos (disminuye la velocidad relativa), perfectamente elásticos (la velocidad relativa permanece invariable en magnitud) y explosivos (la velocidad relativa aumenta). ¿A qué relaciones para los cambios de energía cinética de los cuerpos en colisión, nos llevarán estos distintos tipos de choque? La energía cinética es una cantidad mucho más significativa que la velocidad relativa.

Examinemos la energía cinética total de dos cuerpos que choquen y comparemos los valores antes y después del choque (véase fig. 7-13). Los puntos importantes de nuestro estudio destacarán más y la complicación algebraica será mínima si nos limitamos a considerar choques en los que los cuerpos que chocan son dos cuerpos que se aproximan animados de cantidades de movimiento iguales y opuestas. Evidentemente, después del choque las cantidades de movimiento seguirán siendo iguales y opuestas. El centro de masa estará en reposo, si bien más adelante extenderemos nuestros resultados al caso más general en que el centro de masa se halle en movimiento.

Consideremos un choque totalmente inelástico entre dos cuerpos iguales  $A$  y  $B$ , que se aproximen uno a otro con celeridades iguales  $v_a = v_b$ . Tienen una energía cinética total  $m_a v_a^2/2 + m_b v_b^2/2$ . Después del choque, los dos cuerpos ten-

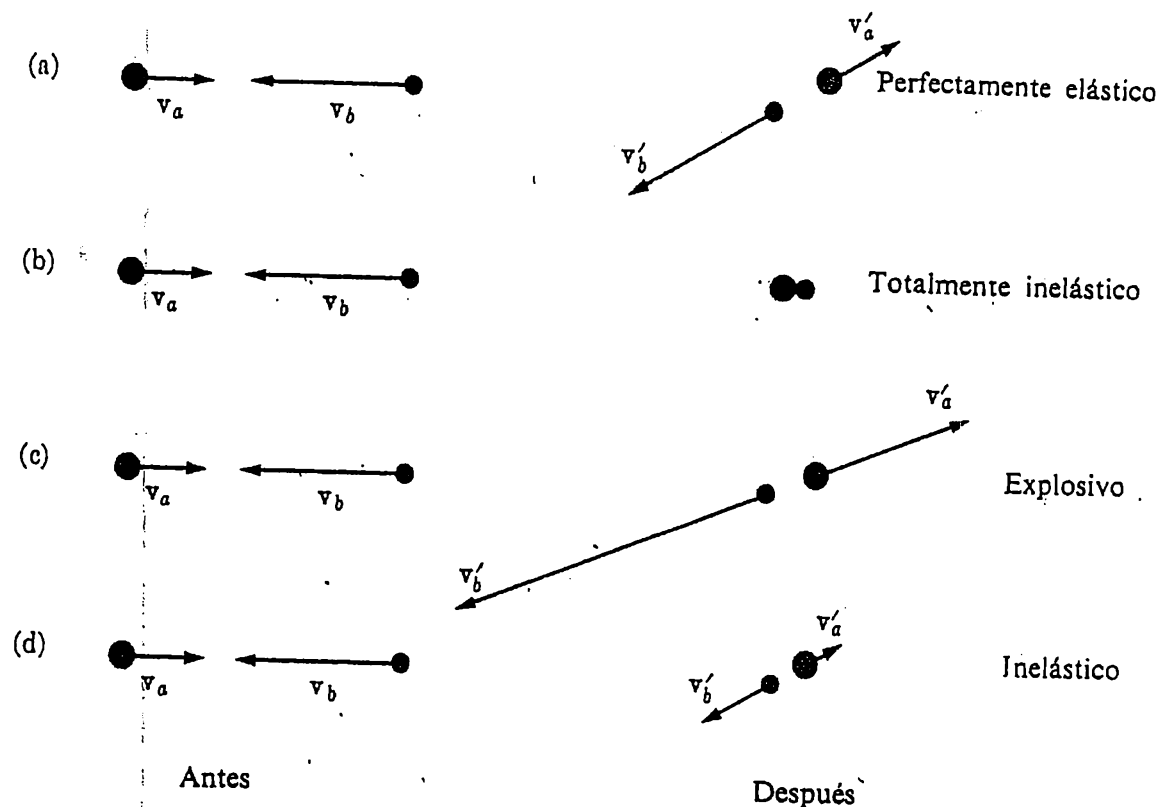


Fig. 7-13. Los cuerpos  $A$  y  $B$  tienen cantidades de movimiento iguales y opuestas, la masa de  $A$  es doble que la de  $B$ , y la cantidad de movimiento total es nula.

drán velocidad nula porque la cantidad de movimiento total antes del choque era nula, y la velocidad relativa después del choque es nula. En este caso, ha desaparecido toda la energía cinética de los cuerpos en colisión.

Consideremos ahora un choque perfectamente elástico. En este tipo de choque deberá permanecer invariable la magnitud de las velocidades de  $A$  y  $B$ . Esto es cierto porque si la magnitud de la velocidad de  $A$  variara en una cierta fracción, la velocidad de  $B$  tendría que variar en la misma fracción a fin de conservar nula la cantidad de movimiento total. Pero si ambas velocidades varían en un mismo factor, también variará la magnitud de la velocidad relativa y no es este el caso de los choques perfectamente elásticos. Ni  $A$  ni  $B$  han alterado las magnitudes de sus velocidades y, por tanto, el choque perfectamente elástico no altera la energía cinética. (Véase también el cap. 11.)

Análogamente, cuando estudiamos un choque inelástico hallamos que la velocidad relativa disminuye y que también lo hace la energía cinética total. En un choque de tipo explosivo, la velocidad relativa aumenta y también aumenta la energía cinética total.

Desde luego, cada uno de estos tipos de choque tiene características propias especiales, pero los choques perfectamente elásticos se hallan, en un sentido muy importante, en una clase aparte. Cuando los cuerpos chocan con choque perfectamente elástico, su estado físico no varía, mientras que en los choques inelásticos o explosivos siempre sufren algún cambio físico definido. Si chocan inelásticamente dos carritos, puede abollarse el metal de la superficie de choque o aplastarse la masilla que amortigua la colisión. Si se separan explosivamente los dos carritos, el resorte que estaba comprimido toma su longitud natural del estado de deformación nula, o el explosivo que tenía una composición química se convierte en un compuesto químico totalmente diferente.

Estos cambios físicos (o la ausencia de cambios físicos en el caso de choque perfectamente elástico) son importantes porque, según se dijo anteriormente, en la Naturaleza *se conserva* la energía. La energía cinética no es más que un tipo de energía y cuando en un experimento observamos que la energía cinética parece haberse «creado» o «destruido» encontramos que, en realidad, la energía no ha hecho sino transformarse de una clase en otra. Los cambios físicos que hemos mencionado son simplemente manifestaciones de estas transformaciones de la energía. Desde luego, estas observaciones cualitativas no demuestran que se conserve la energía, y deberemos estudiar, uno por uno, los cambios físicos que tienen lugar cuando aparentemente se cree o destruya energía cinética.

*Cesión de energía en los choques perfectamente elásticos unidimensionales.* Cuando un cuerpo en movimiento choca contra un cuerpo en reposo, le cede energía cinética. Vamos a estudiar brevemente algunas propiedades de esta cesión de energía, como p. e., cómo varía esta energía cedida al variar las masas de los cuerpos en colisión. El problema está estrechamente relacionado con im-

portantes problemas de Física aplicada y de ingeniería. Vamos a considerar el movimiento unidimensional.

El cuerpo  $A$  de masa  $m_a$  se mueve con velocidad  $v_a$  hacia el cuerpo  $B$  de masa  $m_b$ , que está en reposo. Por nuestros experimentos anteriores, sabemos que si  $A$  y  $B$  tienen masas iguales, después del choque queda  $A$  en reposo y  $B$  sale con la velocidad que tenía  $A$ . Toda la energía cinética de  $A$  ha pasado a  $B$ . En cambio, si la masa de  $A$  es mucho menor que la de  $B$ , como ocurre por ejemplo en el choque de una pelota de tenis con un camión,  $A$  cederá muy poca energía a  $B$ . Si, por el contrario, la masa de  $A$  es mucho mayor que la de  $B$  (un camión en movimiento choca contra una pelota de tenis en reposo), se cede muy poca energía de  $A$  a  $B$ . Nuestros resultados analíticos deben confirmar estas observaciones.

Queremos hallar la fracción de la energía cinética de  $A$  cedida a  $B$ , es decir,  $E'_b/E_a = m_b v'_b{}^2 / m_a v_a^2$ . Comenzaremos con dos relaciones fundamentales. La primera,

$$m_a v_a = m_b v'_b + m_a v'_a \quad (7-23)$$

expresa la conservación de la cantidad de movimiento, y la segunda,

$$v_a = -(v'_a - v'_b) \quad \text{o sea} \quad v'_a = v'_b - v_a \quad (7-24)$$

expresa el hecho de que el choque es perfectamente elástico. Sustituyendo la  $v'_a$  de (7-24) en la ecuación (7-23), se obtiene  $2m_a v_a = v'_b(m_a + m_b)$ , y de aquí se deduce que

$$\frac{E'_b}{E_a} = \frac{4(m_b/m_a)}{(1 + m_b/m_a)^2} \quad (7-25)$$

Cuando  $m_b$  es mucho mayor que  $m_a$  (una pelota de tenis móvil choca contra un vagón de ferrocarril en reposo), la cesión de energía cinética es muy pequeña, según ya señalábamos. Análogamente, la fracción cedida de la energía cinética es pequeña cuando  $m_a$  es mucho mayor que  $m_b$  (un vagón de ferrocarril en movimiento choca con una pelota de tenis en reposo). Pero cuando las masas  $m_a$  y  $m_b$  son iguales,  $E'_b/E_a$  es igual a la unidad y toda la energía cinética de  $A$  pasa a  $B$ . En la figura 7-14 puede verse una gráfica de  $E'_b/E_a$  en función de  $m_b/m_a$ .

Surge ahora una pregunta interesante relacionada con el problema que acabamos de estudiar: Si  $A$  y  $B$  tienen masas desiguales, ¿puede aumentarse la fracción de la energía cedida a  $B$ , interponiendo entre  $A$  y  $B$  un tercer cuerpo  $C$ , de manera que primeramente choque  $A$  con  $C$  y luego  $C$  con  $B$ ? Una extensión sencilla de nuestro método nos indica que la respuesta es afirmativa y que la masa óptima del tercer cuerpo es la media geométrica de  $m_a$  y  $m_b$ ,  $m_c = \sqrt{m_a m_b}$ . Aún puede incrementarse más la energía cinética de  $B$  si se interpone entre  $A$  y  $C$  un cuerpo de masa  $\sqrt{m_a m_c}$  y entre  $C$  y  $B$  otro de masa  $\sqrt{m_b m_c}$ . Puede continuarse

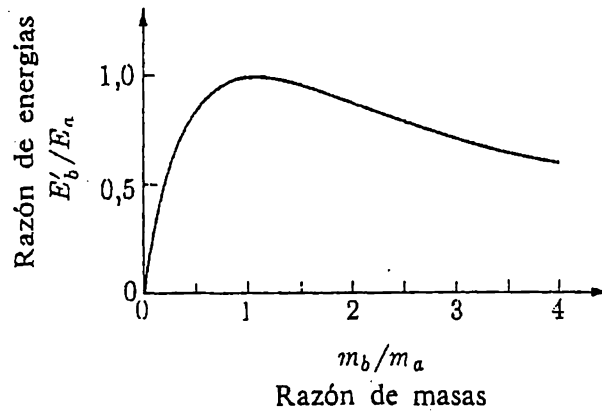


Fig. 7-14. Choque perfectamente elástico del cuerpo  $A$  con el cuerpo  $B$  que inicialmente estaba en reposo. Cuando  $A$  y  $B$  son de igual masa,  $A$  cede a  $B$  toda su energía cinética.

este proceso indefinidamente y, en el límite, cuando se hayan intercalado un número de masas infinitamente grande, podrá transmitirse a  $B$  toda la energía de  $A$ . (A pesar de lo que pueda parecer a primera vista, esto no representa ninguna violación del principio de conservación de la cantidad de movimiento. ¿Por qué?)

Cuando no está en reposo el centro de masa de dos cuerpos en colisión, se complican los detalles de determinación de la energía cinética. Pueden resolverse con cierta facilidad algunos casos particulares que se dan como problemas al final del capítulo.

La determinación de la cesión de energía cinética entre los cuerpos se estudia mejor desde el punto de vista de un observador que se mueve con la velocidad del centro de masa de los cuerpos que chocan. Para él, todos los choques son del tipo en que el centro de masa está en reposo. En un capítulo posterior, se dará un método para relacionar la energía cinética total  $E^*$  de dos cuerpos en colisión medida por un observador que se mueve con la velocidad del centro de masa, con la energía cinética total  $E$  medida por un observador en reposo. Dicho método da  $E = MV^2/2 + E^*$ , donde  $M$  es la masa total de los dos cuerpos y  $V$  la velocidad del centro de masa. Téngase en cuenta que cuando dos cuerpos hayan realizado un choque totalmente inelástico, cada uno lleva la velocidad del centro de masa del conjunto. Entonces, la energía cinética  $E^*$  medida por el observador móvil es nula, ya que para él los dos cuerpos están en reposo. (Véase cap. 11.)

**7-6 Formas no mecánicas de la energía.** En los capítulos anteriores nos hemos ocupado del movimiento global de los cuerpos y es natural, por tanto, que hayamos concentrado nuestra atención en las formas mecánicas de la energía: cinética y potencial. Según ya se hizo resaltar, las energías cinética y potencial difícilmente serían algo más que conveniencias matemáticas para resolver

problemas si no fuera por el hecho de que siempre que varía la energía mecánica total, en algún lugar próximo se produce una variación energética compensadora bien definida.

Un arma de fuego dispara una bala que, bruscamente, adquiere energía cinética. En este caso se ha convertido energía química en energía cinética. Análogamente, cuando una persona lanza una pelota, la energía química del alimento que come es el origen de la energía cinética de la pelota.

Un bloque desliza sobre una mesa y acaba deteniéndose. La energía cinética del movimiento global del bloque ha desaparecido, para reaparecer en forma de calor, o sea de energía cinética del movimiento desordenado de las moléculas del bloque, de la mesa y del aire.

Una locomotora de vapor parte del reposo. Energía química se convierte en calor por combustión del carbón. El calor sirve para hacer hervir el agua y crear vapor a presión. Éste lleva asociada una energía y el vapor realiza un trabajo mecánico sobre el émbolo. Este trabajo, a su vez, se convierte en energía cinética del tren.

Un ascensor parte del suelo y nos eleva. El ascensor está accionado por un motor eléctrico. La energía eléctrica puede haberse obtenido de la energía mecánica del agua o de la combustión de carbón o petróleo en una máquina de vapor, o incluso en un reactor nuclear. En este último caso, la energía nuclear es el origen de nuestro aumento de energía potencial.

Una roca cae de un montículo a un lago. Parte de la energía de la roca se invierte en calentar el agua y la roca, pero parte se la lleva el movimiento ondulatorio que se propaga por el agua. Una rama que flote a cierta distancia podrá adquirir energía mecánica al pasar las ondas. Hay energía en las ondas.

La energía en cada una de estas formas —mecánica, química, nuclear, calorífica, ondas sonoras, ondas líquidas, ondas en los sólidos, ondas electromagnéticas— constituye un tema que requiere por sí mismo un estudio intensivo. Todas estas formas de la energía cumplen una ley general, el *principio de conservación de la energía*, o más formalmente, el *primer principio de la Termodinámica* (véase cap. 17). Las máquinas de movimiento perpetuo de primera especie, es decir, las máquinas que generan más energía de una clase, por ejemplo, mecánica, que la que consumen de otra, por ejemplo calor o energía química, son contrarias al primer principio de la Termodinámica. Esto no prueba que sean imposibles las máquinas de movimiento perpetuo de primera especie, ya que la conservación de la energía es una ley experimental de la Naturaleza. No obstante, este principio de conservación se ha sometido a tantas comprobaciones, en campos tan diferentes y durante tantos años, que todo el mundo se inclina hoy a aceptar la imposibilidad de las máquinas de movimiento perpetuo de primera especie en vista del primer principio de la Termodinámica. Esto equivale a decir que las máquinas de movimiento perpetuo de primera especie son imposibles



porque nadie ha construido nunca ninguna. (Esta es, probablemente, una postura muy segura, pero no una necesidad lógica).

En capítulos posteriores estudiaremos el calor y algunas formas ondulatorias de la energía. Ahora sólo estudiaremos brevemente las formas de la energía química, nuclear y másica.

*Energía química.* Una granada que explota, un pedazo de carbón ardiendo, un muchacho que corre hacia arriba de una pendiente, son ejemplos de conversión de energía química en otro tipo de energía. Puede obtenerse un entendimiento cualitativo de las características fundamentales de la energía química si consideramos el diagrama energético de una molécula (véase fig. 7-15). En la figura se representa la energía como función de la distancia entre, por ejemplo, el átomo de carbono y la molécula de oxígeno que, al combinarse, forman una molécula de dióxido de carbono. Cuando el átomo de carbono y la molécula de oxígeno están muy separados, no se ejerce fuerza alguna entre ellos y su energía potencial mutua es nula. El carbono y el oxígeno no se combinan fácilmente, salvo a temperaturas elevadas a las que tienen una energía cinética relativamente grande. La razón de esto es que en la región I, la energía potencial es positiva; a la derecha de I la fuerza entre los átomos es repulsiva. Pero si la energía cinética es suficientemente grande, mayor que la energía de activación  $V_a$ , podrán pasar sobre la cumbre de I y penetrar en la región II de separación pequeña, donde la energía potencial es negativa. Si se mantuviera constante la energía total, la energía cinética sería muy grande en esta región y no habría nada que evitara que la molécula recién formada volviera a disociarse. Sin embargo, en el tránsito de la región I a la región II, puede perderse energía que pasara a las regiones próximas. Puede emitirse luz, ordinariamente infrarroja, y así se disminuiría la energía mecánica total. O, más corrientemente, se disociará la molécula de oxígeno, quedando un átomo de oxígeno con el de carbono para formar monóxido de carbono y saliendo el otro con energía cinética. En uno y otro caso, la energía total de la

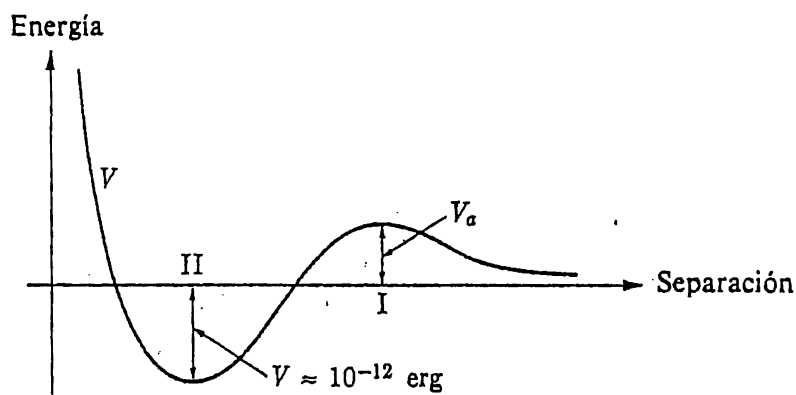


Fig. 7-15. Diagrama cualitativo de la energía potencial de una molécula que, al formarse, libera energía.

nueva molécula será menor que antes porque se ha cedido energía a la región circundante. Las ondas luminosas emitidas o el átomo de oxígeno que sale disparado, chocarán rápidamente con la materia próxima, aumentando así la temperatura de dicha materia.

En la vida vegetal, tiene lugar el proceso inverso. Las plantas toman dióxido de carbono del aire y, por fotosíntesis, se disocia este dióxido de carbono en sus componentes carbono y oxígeno. Este proceso requiere energía y ésta la proporciona la luz solar.

La reacción  $C + O_2 \rightarrow CO_2$  es exotérmica, ya que se libera energía (calor). La reacción  $2C + H_2 \rightarrow H_2C_2$ , que forma el acetileno, es endotérmica. Esto significa que el acetileno, si se descompusiera en carbono e hidrógeno, desprendería energía. En la figura 7-16 se presenta esquemáticamente el diagrama energético del acetileno.

La energía liberada en las reacciones químicas es, típicamente,  $10^{-12}$  erg, por molécula.

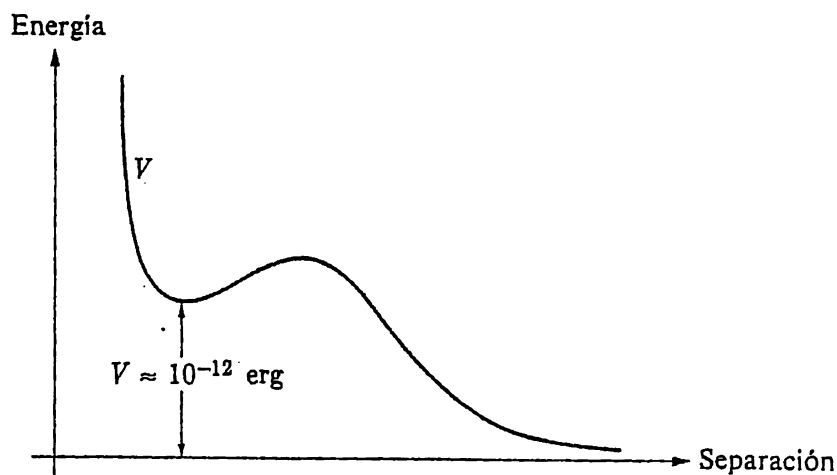


Fig. 7-16. Diagrama cualitativo para la energía potencial de una molécula que libera energía por disociación.

**Energía nuclear.** Conceptualmente, la energía nuclear se debe a fenómenos totalmente análogos a los de la energía química. Cuando se acercan cada vez más los núcleos de dos átomos ligeros, por ejemplo protones (núcleos de hidrógeno), o dos partículas alfa (núcleos de helio), la forma de la curva de energía potencial es la indicada en la figura 7-17. Para provocar una reacción química pueden ser necesarias energías de activación correspondientes a temperaturas del orden de miles de grados, pero las temperaturas correspondientes a la fusión nuclear son del orden de millones de grados. Por otra parte, en una reacción nuclear se libera una energía un millón de veces mayor cuando los dos núcleos

llegan a la región II. La fusión es el origen de la energía de nuestro Sol, de las estrellas y de la bomba H. La reacción es violentamente exotérmica.

En cambio, la fisión nuclear tiene su analogía en el ejemplo químico del acetileno. Los núcleos de ciertos átomos, por ejemplo los de bario y kriptón, tienen una curva de energía potencial mutua de la forma indicada en la figura 7-18. Cuando los dos núcleos están en la región II, forman un núcleo de uranio. Un núcleo existente de uranio, si se le puede dividir en núcleos de kriptón y de bario, libera la energía señalada en la figura  $V \approx 10^{-4}$  erg. El acetileno líquido se dividirá en sus constituyentes, carbono e hidrógeno, si se le da una sacudida brusca u otra perturbación relativamente débil; el uranio, a causa de lo elevado de la cumbre que existe en su curva de energía potencial, es muy estable si bien puede ser inducido a dividirse al absorber un neutrón. Los núcleos que se dividen emiten neutrones y esto hace posible las reacciones en cadena o automantenidas en las pilas y en las bombas.

*Masa-energía.* Hemos mencionado anteriormente que, según la teoría restringida de la relatividad de Einstein, la masa y la energía están íntimamente

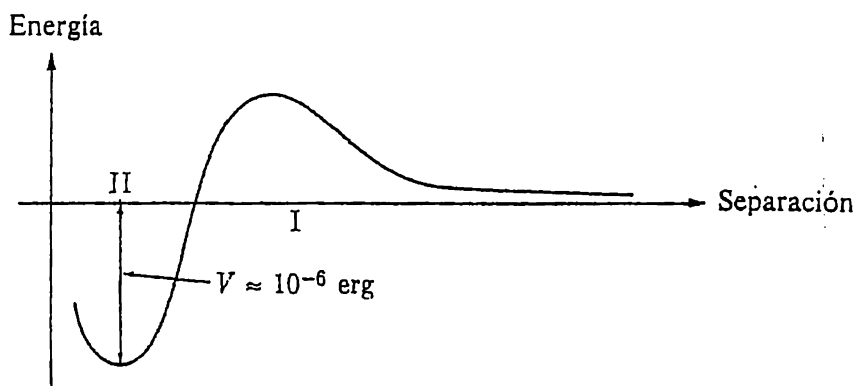


Fig. 7-17. Curva cualitativa de la energía potencial para la fusión nuclear.

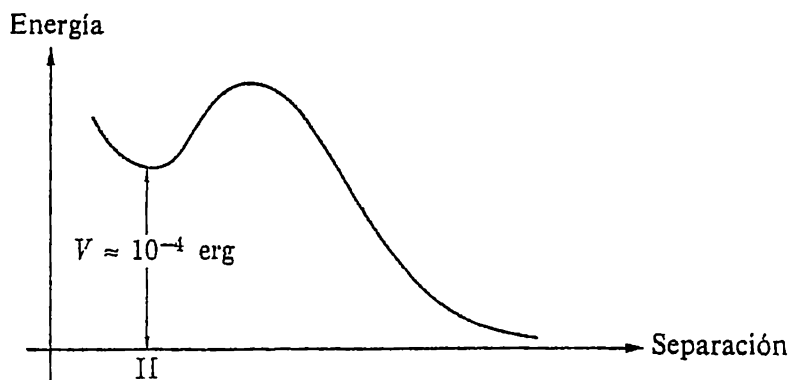


Fig. 7-18. Curva cualitativa de la energía potencial para la fisión nuclear.

relacionadas. Es decir, una masa que se mueve a una velocidad  $v$ , tiene asociada una energía dada por

$$U = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad (7-26)$$

donde  $m_0$  es la masa medida cuando está en reposo, o cuando se mueve a velocidades mucho menores que la velocidad de la luz en el vacío  $c$ . Desde luego, la Mecánica de Newton proporciona una descripción correcta de los cuerpos que se mueven a velocidades mucho menores que  $c$ , y si es correcta la expresión anterior, debe concordar con los resultados de la Mecánica newtoniana en este caso límite. Cuando  $v$  es nula, tenemos  $U = m_0 c^2$ ; en cambio, cuando  $v$  es pequeña pero finita, tenemos

$$U = m_0 c^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right) \quad (7-27)$$

en donde se ha desarrollado el radical en serie de potencias. (Obsérvese que para  $v^2/c^2 = 0,02$  tenemos  $1/\sqrt{1 - (v^2/c^2)} = 1/\sqrt{0,98} \simeq 1,01$ , según el desarrollo utilizado.) Efectuando el producto indicado en (7-27), obtenemos

$$U = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots = m_0 c^2 + E + \dots$$

donde  $E$  es la energía cinética según la mecánica newtoniana. En otras palabras, la teoría de la Relatividad restringida asocia a una masa  $m_0$  tanto una llamada energía en reposo  $m_0 c^2$  como una energía cinética. La energía en reposo asociada a una masa de 1 g es, evidentemente,  $m_0 c^2 = 1 \cdot (3 \cdot 10^{10})^2 = 9 \cdot 10^{20}$  erg, o sea  $9 \cdot 10^{13}$  J, energía enormemente grande, si tenemos presente que una masa de 1 g debe moverse a 45 m/s para tener una energía cinética de 1 J.

Tan sólo en los fenómenos nucleares se han podido medir variaciones de la masa asociadas al desprendimiento o absorción de energía. Por ejemplo, cuando se forma un núcleo de deuterio, isotopo pesado del hidrógeno, a partir de un neutrón libre y un protón libre, la masa del núcleo de deuterio es aproximadamente un 0,1 % menor que la suma de las masas del neutrón y del protón que lo constituyeron. La masa sobrante se emitió en forma de radiación electromagnética, un rayo  $\gamma$ .

Existen casos en los que las partículas se aniquilan totalmente. Un positrón, partícula análoga al electrón, pero con carga positiva en vez de negativa, puede aniquilar a un electrón. Desaparecen ambas partículas y se emiten dos rayos  $\gamma$  —dos ondas electromagnéticas que se propagan en sentidos opuestos. Estas ondas electromagnéticas tienen energía, y asociada a esta energía hay una masa igual a la suma de las masas del electrón y del positrón. Análogamente, los anti-

protones y antineutrones recientemente descubiertos pueden aniquilar a los protones y neutrones ordinarios. Inversamente, las partículas de gran energía (protones, neutrones, etc.) y los rayos  $\gamma$  de gran energía pueden, perdiendo su propia energía cinética, producir otras partículas que tengan masa.

*Reversibilidad.* Aunque hayamos afirmado que la energía se conserva al transformarse de una forma en otra, no queremos decir con ello que dichas transformaciones puedan realizarse fácilmente ni de una manera total. Encontramos muy fácil apretar el gatillo de una pistola y convertir así energía química en energía mecánica y calorífica. No obstante, el proceso inverso (colección de los gases, el calor y la bala móvil y nueva formación del estado químico de la bala) sería prácticamente imposible. Análogamente, es facilísimo convertir la energía mecánica en calor. Solamente debemos introducir algunas fuerzas de rozamiento. En cambio el proceso inverso es mucho más difícil. En el capítulo 19 trataremos estas cuestiones en forma más completa, al estudiar el segundo principio de la Termodinámica.

### PROBLEMAS

7-1. Un cuerpo de 0,5 kg desliza sobre una superficie horizontal exenta de rozamientos y choca contra el extremo de un resorte cuyo otro extremo está fijo. El cuerpo invierte entonces el sentido del movimiento. (a) Si la velocidad inicial del cuerpo era de 2 m/s y el resorte ha sufrido una compresión máxima de 10 cm, ¿cuál era la constante  $K$  del resorte? (b) Trazar un diagrama energético e incluir las energías potencial, cinética y mecánica total. (c) ¿Qué impulso recibirá el cuerpo a consecuencia del choque con el resorte?

7-2. Un cuerpo de masa  $m$  se mantiene a una altura  $y_0$  por encima de la superficie de la Tierra y se deja caer. Trazar un diagrama energético suponiendo nula la energía potencial en  $y = 0$ . Inclúyase en el diagrama la posibilidad de que  $m$  caiga en un agujero practicado en el suelo.

7-3. Los cuerpos sumergidos en un líquido están sometidos a una fuerza de empuje igual al peso del líquido desalo-

jado. Determinar, en función de la posición vertical y la energía potencial de un cubo de densidad  $\rho$  e incluir regiones por encima y por debajo de la superficie del agua. Considérense los casos en que el cubo tenga por densidad  $\rho = 10, 1$ , y  $0,5 \text{ g/cm}^3$ . La densidad del agua es  $1 \text{ g/cm}^3$ .

7-4. Las características de fuerza de un resorte, dependen de cómo se haya devanado. Imaginemos un resorte para el cual  $F_x = -Kx$  para desplazamientos hacia la derecha de la posición de deformación nula, y  $F_x = -Cx^3$  para desplazamientos hacia la izquierda de dicha posición. Hallar la energía potencial en función del desplazamiento  $x$ .

7-5. Una partícula de masa 4 g penetra en una región en la cual su energía potencial es la indicada en la figura 7-19. Proviene de la derecha y para valores grandes de  $x$ , a los cuales es nula su energía potencial, tiene una energía cinética de 16 erg. (a) ¿Cuál es su energía cinética en los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ ? (b) Estando en el punto  $A$ , la partícula pierde brusca-

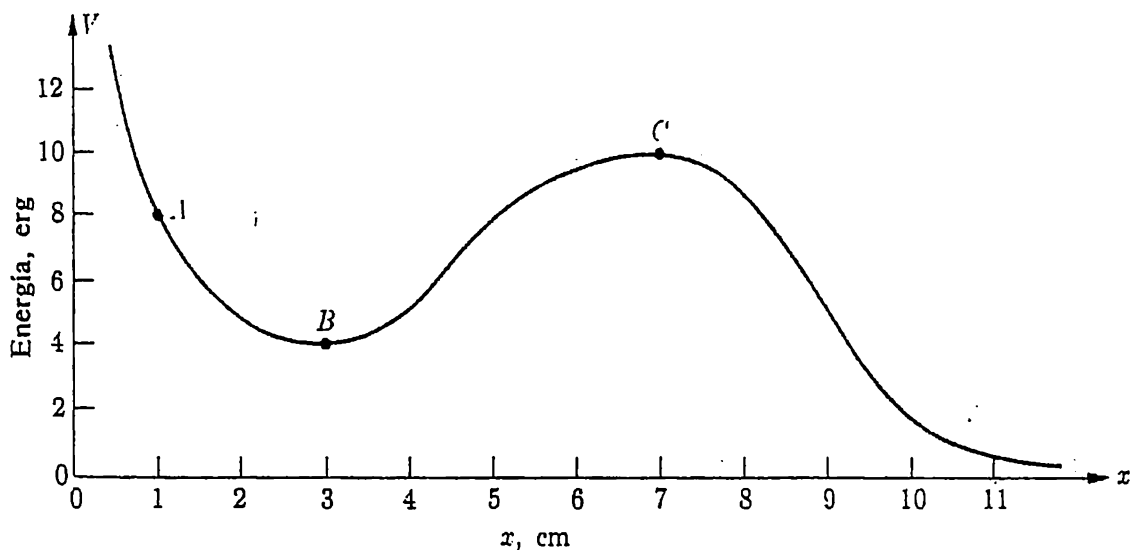


Figura 7-19

mente la mitad de su *energía total*. (La gráfica de la energía potencial no queda afectada). Describese cualitativamente el movimiento subsiguiente, dando el dominio de valores de  $x$  en el cual puede moverse la partícula.

7-6. Sobre una mesa horizontal exenta de rozamientos se mueve un cuerpo en uno y otro sentido chocando alternativamente con resortes existentes en uno y otro extremo de la mesa. El resorte de la izquierda tiene una constante  $K = 150$  N/m y el de la derecha tiene una constante  $K = 300$  N/m. Cuando se inicia el movimiento, el cuerpo tiene una energía cinética de 3 J y se halla en contacto con el resorte de la izquierda que está comprimido 15 cm. (a) ¿Cuáles serán las compresiones máximas de los dos resortes? (b) Trazar un diagrama energético.

7-7. Haciendo referencia a la figura 7-4 y al estudio de la energía de un péndulo simple. ¿Cómo variará la tensión del hilo con el ángulo  $\theta$ ? Existe algún valor de  $\theta$  para el cual sea nula la tensión?

7-8. Haciendo referencia a la figura 7-7. Si la distancia entre los extremos fijos de los dos resortes es 2,4 cm, ¿cuáles

son las constantes  $K_1$  y  $K_2$  de los dos resortes? Considérese el movimiento de un cuerpo que se mueve a lo largo de una recta que pasa por C y D. Esbócese la curva de energía potencial en función de la distancia a lo largo de dicha recta y pónganse de manifiesto las energías cinética y total de un cuerpo que tenga una energía cinética de 2 erg cuando está en C.

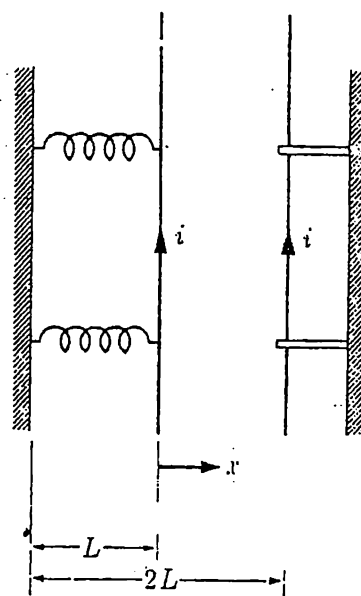


Figura 7-20

7-9. Cuando dos alambres paralelos transportan corrientes eléctricas del mismo sentido, los alambres se atraen con una fuerza inversamente proporcional a la distancia  $r$  que separa los alambres:  $F_1 = C/r$ , donde  $C$  es una constante. En la figura 7-20 pueden verse dos alambres paralelos  $A$  y  $B$  recorridos por corrientes del mismo sentido. El alambre  $B$  se mantiene fijo a una distancia  $2L$  de una pared y el alambre  $A$  está unido a dos resortes exactamente iguales de longitud  $L$  cuando no están deformados y de constante  $K/2$ . Los otros extremos de los resortes están fijos a la pared. Si la constante  $C$  es  $C = 5KL^2/36$ , determinar (a) la fuerza que se ejerce sobre el alambre  $A$  en función del desplazamiento  $x$  contado a partir de la posición de deformación nula del resorte y (b) la energía potencial del alambre  $A$  en función de  $x$ , haciendo  $V = 0$  en la posición en que los resortes no están deformados. Trazar un diagrama energético. (c) ¿Dónde está la posición de equilibrio del alambre? (d) Determinar la energía mecánica total  $H$  por debajo de la cual el movimiento del alambre  $A$  es oscilante. Estudiar cualitativamente el movimiento de  $A$  para valores de  $H$  mayores. Indicar, en el diagrama, los puntos de inversión del movimiento y las regiones en que es posible el movimiento para diferentes valores de  $H$ .

7-10. La fuerza de la gravedad terrestre que se ejerce sobre una masa de 1 kg viene dada por  $GM_t/r_t^2$ , donde  $r_t$  es la distancia al centro de la Tierra. Análogamente, la fuerza de la gravedad lunar que se ejerce sobre una masa de 1 kg viene dada por  $GM_l/r_l^2$ , donde  $r_l$  es la distancia al centro de la Luna. (a) ¿En qué punto de la recta Tierra-Luna será nula la fuerza gravitatoria resultante? (b) Si se toma nula la energía potencial del infi-

nito, ¿será nula la energía potencial en algún otro punto de la recta Tierra-Luna?

7-11. Hacemos referencia al problema anterior. Supongamos que se suelta una masa  $m$  desde el punto situado entre la Tierra y la Luna en el cual es nula la fuerza gravitatoria resultante. Se da a la masa una pequeña velocidad inicial hacia la Tierra. (a) ¿Cuál será la energía cinética de la masa cuando llegue a la superficie terrestre? (b) Supóngase, que se suelta la masa desde un punto situado a la misma distancia de la Tierra, sobre la recta Tierra-Luna, pero al lado opuesto al de la Luna. ¿Cuál será entonces la energía cinética en la superficie terrestre?

7-12. ¿Qué velocidad mínima deberá tener un cuerpo en la superficie de la Tierra, para que sea capaz de alcanzar la Luna? En qué fracción habrá que incrementar esta velocidad si ha de poder escapar el cuerpo del campo gravitatorio terrestre?

7-13. La Luna da una vuelta alrededor de la Tierra en 27,3 días y se halla a una distancia aproximada del centro de la Tierra de  $3,84 \cdot 10^8$  m. ¿Cuál es la velocidad de la Luna? Si pudiera variarse la velocidad de la Luna de manera que pudiera moverse alejándose, en vez de alrededor, de la Tierra, ¿podría escapar? Si no, ¿hasta qué distancia podría llegar?

7-14. La fuerza que se ejercen dos partículas cargadas es  $F = kq_1q_2/r^2$ , donde  $q_1$  y  $q_2$  son las cargas de las dos partículas medidas en coulomb,  $k$  es igual a  $9 \cdot 10^9$  N·m<sup>2</sup>/C<sup>2</sup>, y  $r$  es la distancia entre las partículas medida en metros. La carga elemental es la carga del electrón,  $1,6 \cdot 10^{-19}$  C. ¿Cuál es la energía potencial de un electrón en un átomo de hidrógeno, en el cual la distancia protón-electrón es de unos  $5 \cdot 10^{-11}$  m o sea 0,5 ångström? ( $1 \text{ Å} = 10^{-8}$  cm). El protón tiene una

carga del mismo valor que la del electrón, pero como la carga del electrón es negativa, la fuerza es atractiva.

7-15. Un coche de 1000 kg parte del reposo y empieza a descender una pendiente de  $30^\circ$ . En la parte inferior de la pendiente, que tiene 120 m de longitud, la velocidad del coche es de 90 km/h. (a) ¿Qué energía habrán consumido las fuerzas disipativas o no conservativas? (b) ¿Qué masa (en kg) tendría una energía potencial en la parte superior, igual a la energía disipada por el coche?

7-16. Un cuerpo de 8 kg parte del reposo y es empujado hacia arriba de un plano inclinado  $45^\circ$  de 1 m de longitud, por la mano de un hombre. El coeficiente de rozamiento por deslizamiento entre el bloque y el plano es 0,2. En la parte superior del plano, el bloque tiene una velocidad de 3 m/s. (a) ¿Cuánto trabajo ha realizado la mano del hombre? (b) ¿Con qué fuerza constante empujó el hombre? (c) ¿Qué tiempo ha transcurrido antes de alcanzar el cuerpo la parte superior del plano?

7-17. Un barril vacío de 15 kg cae desde una altura de 15 m y alcanza el suelo en 2 s. Supóngase constante la fuerza de resistencia del aire. (a) ¿Cuál era la magnitud de la fuerza de resistencia? (b) ¿Cuánta energía mecánica se ha perdido? (c) ¿Cuál era la velocidad del barril inmediatamente antes de chocar contra el suelo?

7-18. Un cuerpo de masa  $m$ , en reposo sobre un resorte de constante  $K$ , comprime el resorte una distancia  $y_0$  a partir de la posición de deformación nula. ¿Desde qué altura debe dejarse caer  $m$  para que el resorte se comprima una longitud  $3 y_0$  contada a partir de la posición de deformación nula?

7-19. Una partícula se mueve a lo largo del eje  $x$  bajo la influencia de una

fuerza tal que la energía potencial es  $V(x) = 6x^2 - 3x^3$  joule ( $x$  en metros). (a) ¿Cuál es la fuerza que se ejerce sobre la partícula? (b) ¿Cuál es el valor máximo de la energía mecánica total al cual es posible el movimiento oscilatorio? (c) Obtener una expresión para el tiempo de tránsito entre  $x = 0$  y  $x = x_1$ .

7-20. El péndulo balístico proporciona un método sencillo para la determinación de velocidades de balas. De un hilo largo y ligero se suspende un bloque de madera suficientemente espeso para detener la bala. Antes de penetrar la bala en el bloque, éste está en reposo y empieza a moverse cuando la bala ya está incrustada en él. Poner de manifiesto cómo puede obtenerse la velocidad de la bala observando el ángulo de desviación máximo del péndulo balístico. Una bala corriente puede tener una masa de 10 g y una velocidad de 300 m/s.

7-21. Un carrito de masa  $m$  puede moverse libremente sin rozamiento por la parte exterior de una pista circular vertical de radio  $R$ . El carrito se mueve bajo la influencia de la pista (fuerza que no trabaja), de la gravedad, y de un resorte que tiene un extremo sujeto a un punto fijo situado a una distancia  $R/2$  sobre el centro de la pista. El resorte, de constante  $K$ , se halla indeformado cuando

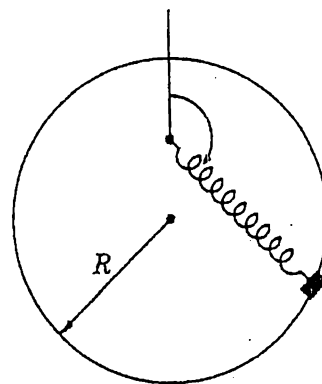


Figura 7-21



el carrito se halla en la parte superior del círculo. Este es un ejemplo difícil de resolver en detalle, si bien se pueden obtener fácilmente muchas características del movimiento mediante consideraciones energéticas. (a) Hallar la energía potencial del carrito en función de la posición angular del carrito respecto al centro del círculo y trazar un diagrama de la energía potencial  $V$  en función de  $\theta$ . (b) ¿Qué energía cinética mínima debe tener el carrito en la posición superior para que pueda dar toda la vuelta a la pista? (c) Si el carrito tiene la energía cinética de (b), ¿qué fuerza ejerce la pista sobre el carrito en la parte superior y en la inferior de la pista?

7-22. Demostrar la relación (7-11).

7-23. Demostrar la relación (7-12).

7-24. Un cuerpo de masa  $m$  sufre un choque perfectamente elástico con otro cuerpo que se halla inicialmente en reposo. ¿Cuál debe ser la masa del segundo cuerpo, para que adquiera la mitad de la energía cinética del cuerpo incidente? Supóngase un choque unidimensional.

7-25. Un cuerpo  $A$  de masa  $m_a$  tiene una velocidad  $v_a$  y un cuerpo  $B$  de masa  $m_b$  tiene una velocidad  $v_b$ . El movimiento tiene siempre lugar a lo largo de una recta. Demostrar que si  $v'_b - v'_a = -(v_b - v_a)$ , la energía cinética total no varía a consecuencia del choque.

7-26. En la teoría cinética de los gases, la presión del gas resulta del choque de las moléculas gaseosas con las paredes del recipiente. Vamos a ocuparnos de los choques de las moléculas de un gas con una pared móvil (émbolo). Consideremos un choque perfectamente elástico entre una partícula muy ligera de masa  $m$  y velocidad  $v$ , y un cuerpo muy pesado de masa  $M$  y velocidad  $V$ . Supóngase que  $v$  y  $V$  tienen inicialmente la misma dirección y sentido. En el límite de  $m/M = 0$ ,

¿cuál es la velocidad de la partícula después del choque? ¿Cuál es la pérdida de energía cinética de la partícula en el mismo límite? Demostrar que esta pérdida de energía es aproximadamente proporcional a la velocidad del cuerpo grande cuando  $v/V \gg 1$ .

7-27. Una partícula  $A$  de masa  $m_a$  realiza un choque perfectamente elástico con una partícula  $B$  de masa  $m_b$  inicialmente en reposo. (a) ¿En qué condiciones puede ceder  $A$  toda su energía cinética a  $B$ ? (b) ¿En qué condiciones seguirá  $A$ , después del choque, en la misma dirección y sentido que antes? (c) ¿En qué condiciones seguirá  $A$ , después del choque, en la misma dirección pero sentido contrario al de antes? (d) ¿Puede alguna vez  $B$  moverse en sentido opuesto al del movimiento de  $A$  antes del choque?

7-28. En un choque totalmente inelástico unidimensional, un cuerpo  $A$  de masa  $m_a$  choca con otro  $B$  de masa  $m_b$  inicialmente en reposo. ¿Qué valor debe tener el cociente  $m_a/m_b$  para que  $B$  adquiera la mayor energía cinética posible? ¿Cuál debe ser el valor de  $m_a/m_b$  para que  $A$  pierda la menor cantidad de energía cinética posible?

7-29. Dos cuerpos de 1 g cada uno realizan un choque totalmente inelástico y después del choque la energía cinética resulta ser 100 erg. Los cuerpos se mueven a lo largo de una misma recta. (a) ¿Cuál era la velocidad  $V$  del centro de masa antes del choque? (b) ¿Cuál era la cantidad de movimiento total antes del choque? ¿y después? (c) Cuando los mismos cuerpos, con el mismo movimiento inicial de antes realizan un choque *perfectamente elástico*, la energía cinética total después del choque resulta ser 200 erg. ¿Cuáles eran las velocidades de los cuerpos antes del choque?

7-30. Una masa de 1 g y otra de

100 g se aproximan a lo largo de una recta, llevando cada una de ellas una cantidad de movimiento de 1000 g.cm/s.

(a) ¿Cuál es su velocidad relativa? (b) ¿Cuál es su energía cinética total? (c) Después de chocar las dos masas, la masa de 1 g sale del centro de choque con una velocidad de 200 cm/s y una desviación de  $30^\circ$  respecto a su trayectoria original. ¿Cuál es la velocidad de la masa de 100 g? (d) ¿Cuál es la energía cinética total después del choque? ¿Qué masa ha perdido mayor fracción de su energía cinética inicial?

7-31. Un cuerpo de 10 g se mueve a 20 cm/s y realiza un choque directo con un cuerpo de 20 g que se mueve a 15 cm/s. El vector velocidad del cuerpo de 10 g gira  $60^\circ$  a consecuencia del choque, manteniéndose invariable su magnitud. ¿Cuál

era la variación total de energía cinética resultante del choque?

7-32. Un disco de masa  $m$  choca elásticamente con otro también de masa  $m$  que se halla inicialmente en reposo. En el choque se conserva la energía cinética. Demostrar que el ángulo entre las trayectorias de los dos discos después del choque es de  $90^\circ$ .

7-33. En un choque unidimensional perfectamente elástico, choca un cuerpo  $A$  de masa  $m_a$  con otro  $B$  de masa  $m_b$  inicialmente en reposo. En el apartado 7-5 se indicó que, a menos que  $m_a = m_b$ , sólo se cede a  $B$  una fracción de la energía cinética de  $A$ . Demostrar que puede cederse a  $B$  una energía cinética mayor si se interpone entre  $A$  y  $B$  un tercer cuerpo  $C$ . Demostrar también que la masa óptima de  $C$  es  $m_c = \sqrt{m_a m_b}$ .

## CAPÍTULO 8

### EJEMPLOS DE FUERZAS Y MOVIMIENTO — II

*Resumen.* En este capítulo comenzaremos con un estudio de las condiciones que conducen a un movimiento oscilatorio y se analizará un ejemplo sencillo: el oscilador «pozo cuadrado» o «partícula en una caja». Se considera después, con cierto detalle, el oscilador lineal (armónico). El estudio cuantitativo de otros osciladores que no sean el lineal es difícil, pero del diagrama de energía potencial se deducirán directamente algunas características cualitativas del movimiento. Se estudian, como ejemplos, el péndulo simple y las vibraciones moleculares. Se trata el efecto del amortiguamiento de un oscilador lineal «libre» y se analiza el movimiento forzado del oscilador lineal. Por último, se da una breve inspección del espectro de frecuencias mecánico.

En el capítulo 5 se trataron con cierto detalle algunos ejemplos especiales de fuerzas y movimiento. Ahora, habiéndonos extendido sobre los principios fundamentales del movimiento en función de los conceptos del teorema de las fuerzas vivas, energía potencial y de la energía mecánica total y su conservación, nos detendremos a estudiar algunos problemas específicos en los cuales resultan particularmente útiles estos nuevos conceptos. Los problemas que hemos seleccionado para su análisis se refieren a oscilaciones, en particular las referentes al llamado *oscilador armónico* o *lineal*, que juega un papel importante en todos los aspectos de la Física. Siempre que tratemos con vibraciones, ya sean de moléculas o de puentes, será esencial estar familiarizado con las propiedades del oscilador lineal.

**8-1 Oscilaciones.** Consideraremos un cuerpo en equilibrio y estudiaremos lo que pasa cuando se le desplaza de su posición de equilibrio y se suelta después, o cuando se le da una velocidad inicial separándolo de su posición de equilibrio. En la figura 8-1 se ilustran esquemáticamente varios casos en los que se halla en reposo una bola sobre diferentes tipos de superficie. En dicha figura, las superficies representan también curvas de energía potencial de la partícula. En (a), la superficie no es más que un plano horizontal. Cuando se desplaza la bola de su posición inicial y se suelta, volverá a estar en equilibrio, y si se le da una velocidad inicial, se mantendrá en movimiento con celeridad constante.

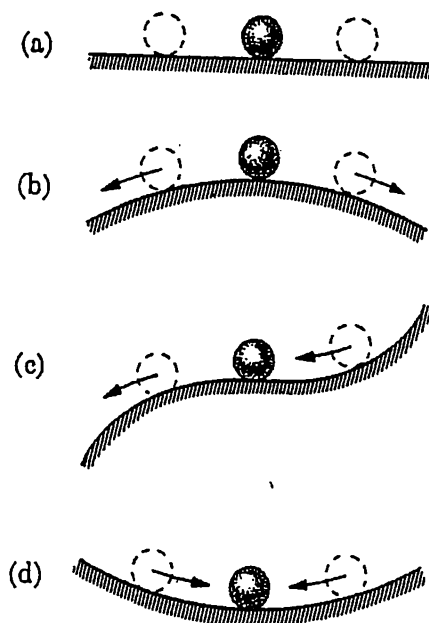


Fig. 8-1. Ejemplos de equilibrio. En (d) se tendrá movimiento oscilatorio cuando se desplace el cuerpo de su posición de equilibrio (estable).

La posición sobre el plano horizontal no tiene influencia alguna sobre el equilibrio. En la figura 8-1(b), la bola se halla en reposo en lo alto de una superficie curvada, y es evidente que cuando se desplaza la bola en una dirección cualquiera y se suelta, continuará alejándose de la posición de equilibrio. Se dice entonces que el cuerpo está en equilibrio inestable. En la figura 8-1(c) se ilustra otro caso de equilibrio inestable.

De mayor interés es el caso ilustrado en la figura 8-1(d), en el que la bola se halla en equilibrio en el punto más bajo de una superficie curvada. La fuerza que se ejerce sobre la bola tiende a volverla a su posición de equilibrio, independientemente de cuál sea el sentido del desplazamiento inicial. En estas condiciones, se dice que el equilibrio es estable. Al desplazarla de su posición de equilibrio y soltarla, la bola se acelerará hacia la posición de equilibrio. Durante el tiempo en que la bola alcanza la posición de equilibrio, adquiere cantidad de movimiento y la sobrepasa. Se invierte el sentido de la fuerza que actúa sobre la bola en la dirección del movimiento, con lo que la frena y vuelve a invertir el sentido de su movimiento. Vuelve a la posición de equilibrio, la sobrepasa de nuevo, y sigue oscilando hacia adelante y hacia atrás en torno a la posición de equilibrio. Desde luego, las fuerzas de rozamiento acabarían llevando la bola al estado de reposo. En otras palabras, siempre que se separa un cuerpo de su posición de equilibrio estable y se suelta luego, realizará un movimiento oscilatorio. En la Naturaleza existen innumerables ejemplos de este tipo de movimiento. Las moléculas, los péndulos, las cuerdas de violín, las estructuras, etc., tienen movimien-

tos oscilatorios análogos al de una masa sujeta a un resorte, y en todos esos casos se mueven los cuerpos bajo la acción de fuerzas *conservativas* (despreciando el rozamiento) que siempre tienen la misma dirección pero sentido contrario que los desplazamientos. En todos los casos la energía potencial presenta un mínimo en la posición de equilibrio.

La fuerza tipo resorte  $F = -Kx$ , que se estudió en el capítulo 3, tiene energía potencial mínima en  $x = 0$ . La magnitud de la fuerza crece linealmente con el desplazamiento  $x$  medido a partir de la posición de equilibrio. Un oscilador que presenta una fuerza de este tipo recibe el nombre de oscilador *lineal* o *armónico*.

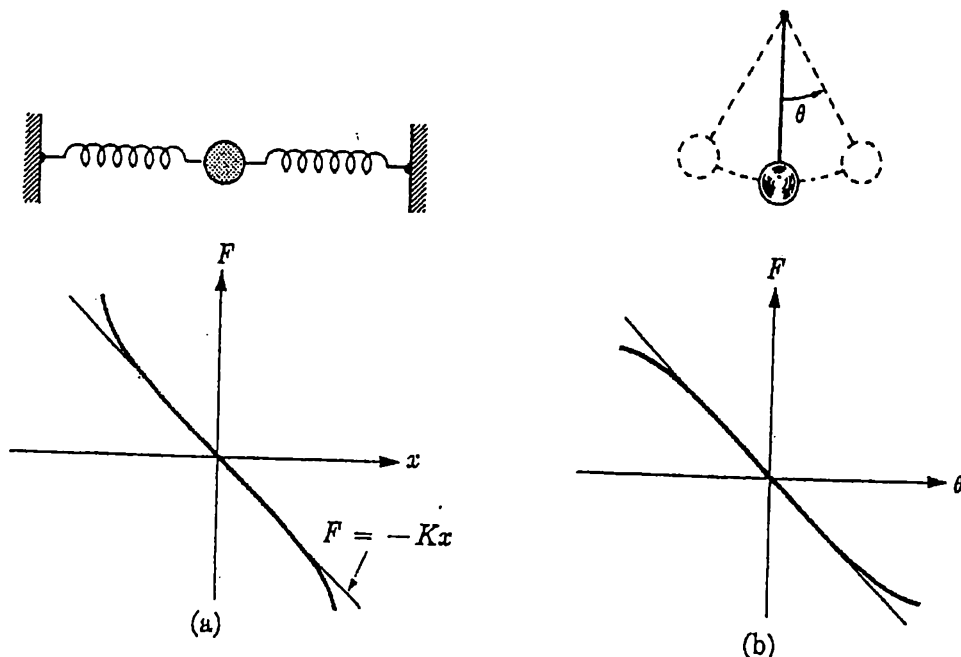


Fig. 8-2. La fuerza restauradora en un oscilador es lineal ( $F = -Kx$ ) para amplitudes de oscilación suficientemente pequeñas.

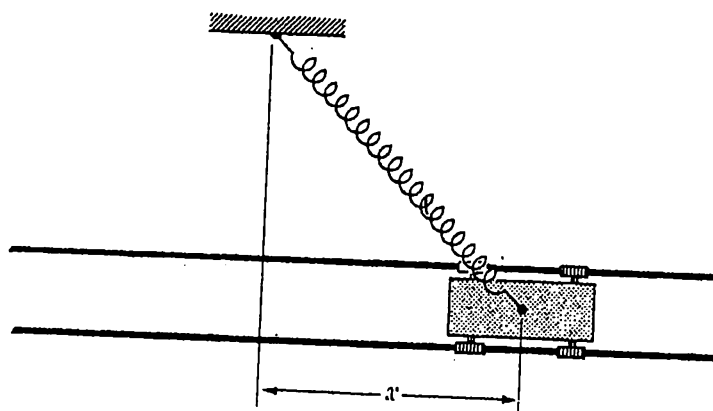


Fig. 8-3. Ejemplo de un oscilador que no es lineal ni para amplitudes de oscilación pequeñas.

y la oscilación correspondiente se llama *movimiento armónico*. Si la fuerza dependiera de  $x$  de otra manera diferente, el oscilador sería *no lineal*. Aun cuando muchos osciladores son no lineales, encontramos que para amplitudes suficientemente pequeñas de las oscilaciones la mayoría son lineales o aproximadamente lineales. Por ejemplo, la fuerza ejercida por un resorte ordinario viene dada por  $F = -Kx$ , para valores suficientemente pequeños de  $x$ , según se mencionó en el capítulo 3. Al aumentar  $x$ , el resorte se vuelve «más duro» y la fuerza aumenta con  $x$  de manera más rápida que en la región lineal. En cambio, en el caso del péndulo ocurre lo contrario, según puede verse en la figura 8-2 en la que se comparan los comportamientos de las fuerzas en el oscilador masa-resorte y en el péndulo.

Existen osciladores que no son lineales ni para amplitudes pequeñas y en la figura 8-3 puede verse un ejemplo sencillo. Se deja como ejercicio demostrar que la magnitud de la fuerza restauradora que se ejerce sobre el carrito a lo largo de la vía no es proporcional al desplazamiento  $x$  respecto a la posición de equilibrio, sino a  $x^3$  para valores de  $x$  pequeños (prob. 8-1).

**8-2 Oscilador «pozo cuadrado» o «partícula en caja».** Como introducción, vamos a ver un ejemplo muy sencillo de oscilación, cual es el del movimiento de un cuerpo, por ejemplo un carrito, que se mueve en uno y otro sentido a lo largo de una vía horizontal entre dos puntos fijos, como se indica en la figura 8-4. Estos puntos de inversión del movimiento  $P_1$  y  $P_2$ , pueden ser paredes paralelas rígidas entre las cuales oscila el carrito tras realizar choques perfectamente elásticos con las paredes. Entre las paredes la fuerza es nula, pero crece instantáneamente hasta un valor muy grande (infinito) en las paredes. La curva correspondiente de energía potencial forma entonces un «pozo» cuadrado con lados verticales, como se indica en la figura 8-4.

Las dos paredes están situadas en  $x = x_0$  y  $x = -x_0$ . Si medimos el tiempo a partir del instante en que el carrito choca contra la pared de la derecha, tenemos  $x = x_0$  y  $v = 0$  cuando  $t = 0$ . Cuando el carrito se aleja de la pared, su velocidad es  $v = -v_0$ , y su coordenada de posición disminuye hasta que choca contra la otra pared. En la figura 8-5 pueden verse las gráficas correspondientes de  $x$  en función de  $t$  y de  $v$  en función de  $t$ . Esta elección del origen de tiempos es, desde luego, arbitraria. Por ejemplo, si preferimos poner en marcha el cronómetro cuando pasa el carrito por el punto equidistante de las paredes, tenemos  $x = 0$  cuando  $t = 0$ . Entonces, si se mueve el carrito hacia la derecha, tenemos  $v = v_0$  cuando  $t = 0$ . Las gráficas correspondientes de  $x$  en función de  $t$  y de  $v$  en función de  $t$  se obtendrán entonces de la figura 8-5 midiendo  $t$  a partir del origen  $O_1$ .

A la excursión máxima  $x_0$  del carrito a partir de  $x = 0$  se le da el nombre de amplitud de la oscilación. El carrito completa el recorrido total  $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_1$

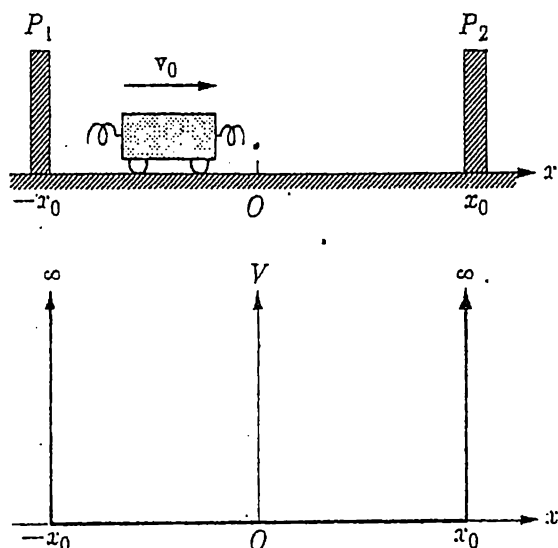


Fig. 8-4. Oscilador con curva de energía potencial de «pozo cuadrado».

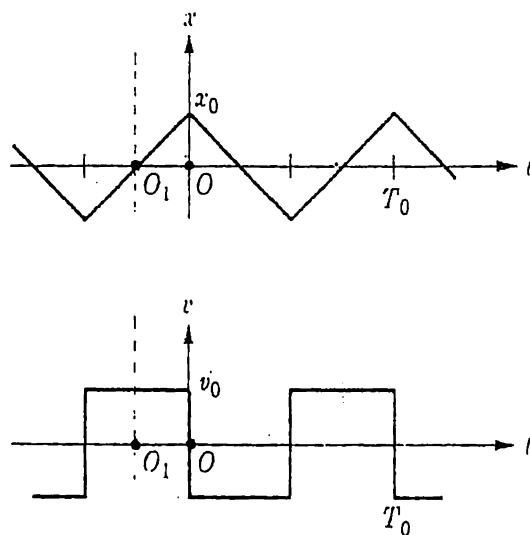


Fig. 8-5. Cómo dependen del tiempo el desplazamiento y la velocidad del carrito en la oscilación de «pozo cuadrado» de la figura 8-4.

en el tiempo  $T_0 = 4x_0/v_0$ , llamado *período* de oscilación. Al número de oscilaciones completas por segundo se le da el nombre de frecuencia de oscilación  $f_0 = 1/T_0$ .

**8-3 Oscilador lineal.** Consideremos nuevamente el carrito sobre la vía horizontal representado en la figura 8-4. Sujetamos ahora el carrito a un extremo de un resorte cuyo otro extremo se mantiene fijo. Entonces, al desplazar el carrito una distancia  $x$  a partir de la posición de deformación nula del resorte, la fuerza que éste ejerce sobre el carrito es

$$F = -Kx \quad (8-1)$$

La energía potencial correspondiente es

$$V = \frac{Kx^2}{2}$$

según se indica en la figura 8-6. Cuando se suelta el carrito a partir de una posición  $x = x_0$ , adquiere un movimiento oscilatorio. Si se pone en marcha el cronómetro en el instante en que se suelta el carrito, tendremos  $x = x_0$  en  $t = 0$ . Desde luego, la celeridad del carrito no será constante como en el caso del oscilador de «pozo cuadrado», sino que crecerá gradualmente hasta pasar por un máximo  $v_0$  en la posición de equilibrio  $x = 0$ . El hecho de que se conserve la energía mecánica total  $mv^2/2 + Kx^2/2 = H$ , exige que la energía cinética máxima  $mv_0^2/2$

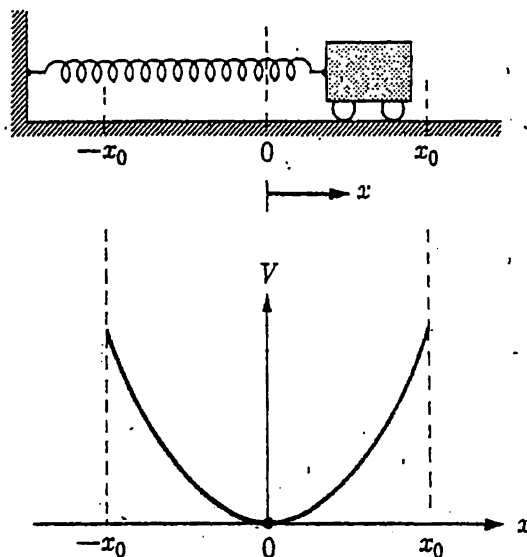


Fig. 8-6. Energía potencial  $V = Kx^2/2$  de un oscilador lineal.

del carrito sea igual a la energía potencial máxima  $Kx_0^2/2$ . La celeridad máxima del carrito, es decir, la celeridad en  $x = 0$  será, pues,

$$v_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} x_0 \quad (8-2)$$

Después de pasar por la posición de equilibrio  $x = 0$ , el carrito recorrerá una distancia igual en sentido contrario, luego invierte su sentido de movimiento, vuelve a  $x = x_0$  y así sucesivamente. Como la celeridad del carrito no cambia bruscamente, las gráficas representativas de la posición  $x$  y la celeridad  $v$  en función del tiempo, ya no son una sucesión de segmentos rectilíneos que formen líneas quebradas, como en el caso del oscilador de «pozo cuadrado», sino curvas sin angulosidades, como se indica en la figura 8-7. (En esta figura se han representado en líneas punteadas, a fines de comparación, las gráficas del oscilador de «pozo cuadrado» correspondiente.) Si tomamos  $t = 0$  cuando  $x = x_0$ , como mencionamos anteriormente, vemos que las curvas de la figura 8-7 para  $x$  función de  $t$  y  $v$  función de  $t$  son análogas a una función coseno y a una función seno (cambiada de signo), respectivamente. Si se mide el tiempo a partir del instante en que el carrito pasa por su posición de equilibrio con una velocidad  $v = +v_0$ , el origen de tiempos en la figura 8-7 será  $O_1$ , en vez de  $O$ . La curva de  $x$  función de  $t$  será semejante a una curva seno, en vez de a una curva coseno.

Después de estas observaciones dadas a título de introducción, pasaremos a demostrar que el desplazamiento y la velocidad del carrito en este oscilador lineal corresponden, efectivamente, a funciones coseno y seno. En primer lugar, podemos probarlo experimentalmente comparando el desplazamiento de carrito con



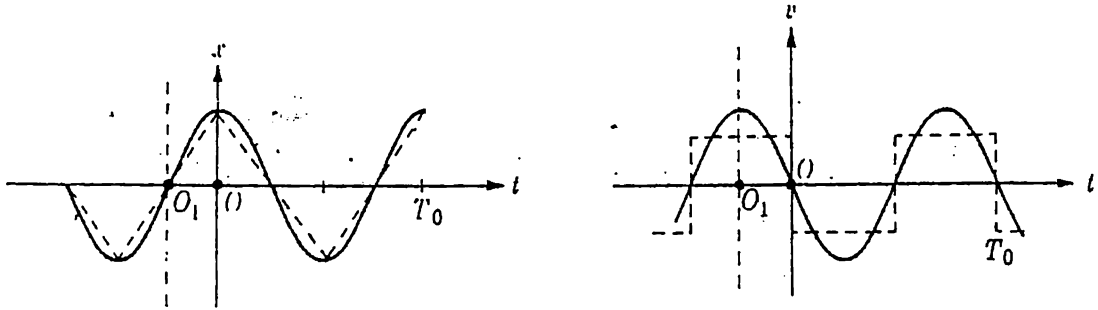


Fig. 8-7. Desplazamiento y velocidad en función del tiempo, para el oscilador de la figura 8-6. El tiempo se mide a partir del instante en que  $x = x_0$ . A fines de comparación, se representan las curvas correspondientes (líneas de trazos) del oscilador de «pozo cuadrado» de la figura 8-4.

la coordenada  $x$  de un cuerpo que recorra una circunferencia con velocidad angular constante. El cuerpo puede fijarse a una barra que gire por la acción de un motor eléctrico. Sabemos de antemano que la coordenada  $x$  es  $x_0 \cos \omega t$ , donde  $\omega$  es la velocidad angular del movimiento circular y  $x_0$  es el radio del círculo (véase el cap. 5). La comparación de este movimiento con el del carrito puede realizarse fácilmente proyectando la sombra sobre una pantalla, de manera que la coordenada  $x$  del movimiento circular aparezca yuxtapuesta a la proyección correspondiente del carrito. Ajustando los períodos del movimiento circular y del oscilador lineal de manera que sean iguales, hallamos que el movimiento del carrito es exactamente igual que el movimiento de la sombra del cuerpo en movimiento circular. Desde luego, se supone que se han ajustado a un mismo valor las amplitudes de los dos movimientos.

En el estudio matemático del movimiento, partimos de la expresión (8-1) de la fuerza que se ejerce sobre el carrito y así obtenemos para la aceleración

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = - \frac{K}{m} \bar{x} \quad (8-3)$$

donde  $m$  es la masa del carrito. La aceleración es proporcional al desplazamiento y de sentido contrario. El problema matemático consiste en obtener una solución, es decir, una función  $x(t)$  que satisfaga a esta ecuación y al mismo tiempo corresponda a la elección particular de origen de tiempos en relación con el desplazamiento  $x$ . No es difícil hallar una función que reúna el requisito de que la segunda derivada (la aceleración) sea proporcional al valor de la función cambiada de signo. El experimento descrito anteriormente indica sin lugar a dudas que el carrito oscilante realiza el mismo movimiento que la coordenada  $x = x_0 \cos \omega t$ , de un cuerpo que recorra una circunferencia de radio  $x_0$ , si se ajusta la velocidad angular (velocidad del motor en el experimento) al valor adecuado. Vamos a ver

que  $x = x_0 \cos \omega t$  satisface la ecuación del movimiento del carrito, con tal que  $\omega^2 = K/m$ .

Así, partiendo del movimiento armónico  $x = x_0 \cos \omega t$ , obtenemos para la velocidad  $v = dx/dt = -\omega x_0 \sin \omega t$ , y para la aceleración  $dv/dt = d^2x/dt^2 = -\omega^2 x_0 \cos \omega t = -\omega^2 x$ . Como era de esperar, la función  $x = x_0 \cos \omega t$  satisface a los requisitos de la ecuación (8-3) en el sentido de que el valor de la aceleración es proporcional al valor del desplazamiento cambiado de signo. En la ecuación (8-3) la constante de proporcionalidad es  $K/m$  y en el movimiento armónico es  $\omega^2$ . Por tanto, el movimiento armónico  $x = x_0 \cos \omega t$  satisface a la ecuación del movimiento para el oscilador que tenga una constante de resorte  $K$  y una masa  $m$ , si la velocidad angular es

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (8-4)$$

El argumento  $\omega_0 t$  que aparece en  $x = x_0 \cos \omega_0 t$  es el desplazamiento angular del movimiento circular, indicado en el capítulo 5 y en la figura 8-8. Una oscilación completa corresponde a un desplazamiento angular  $2\pi$ . El tiempo  $T_0$  requerido para este desplazamiento angular es, pues,

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} \quad (8-5)$$

Es el llamado *período* del oscilador. La *frecuencia* correspondiente, es decir, el número de períodos por segundo, es

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (8-6)$$

llamada frecuentemente *frecuencia característica* o *frecuencia propia* del oscilador.

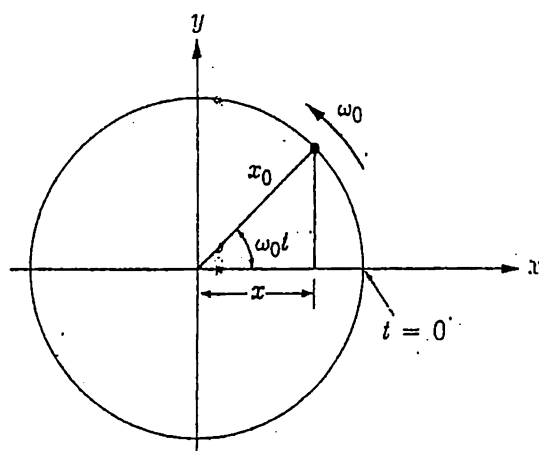


Fig. 8-8. La coordenada  $x$  de un punto que se mueve con velocidad angular  $\omega_0$  constante sobre una circunferencia de radio  $x_0$  sigue el movimiento armónico  $x = x_0 \cos \omega_0 t$ . Una oscilación completa corresponde al desplazamiento angular  $\omega_0 T = 2\pi$ .

Es importante observar que el período del oscilador lineal es *independiente de la amplitud*  $x_0$  de la oscilación. Depende *solamente* de  $m$  y  $K$  que son las constantes características del oscilador. La explicación de este resultado es que la celeridad máxima  $v_0$  es proporcional a la amplitud  $x_0$ ; es decir,  $v_0 = \omega_0 x_0$ . La celeridad media  $\bar{v}$  del carrito en un período es proporcional a  $v_0$ ; en efecto,  $\bar{v} = (2/\pi)v_0$  (véase prob. 8-13). La distancia recorrida por el carrito en un período es  $4x_0$ , y el período puede expresarse en la forma  $T = 4x_0/\bar{v}$ . Como la velocidad media  $\bar{v}$  es proporcional a  $x_0$ , se deduce que  $T$  debe ser independiente de  $x_0$ .

Si el resorte fuera no lineal, ya no seguiría siendo independiente el período de la amplitud. Por ejemplo, la no linealidad del resorte presentada en la figura 8-2(a) conduce a un período que disminuye al crecer la amplitud, mientras que en el caso de la no linealidad del péndulo de la figura 8-2(b) ocurre lo contrario.

*Consideraciones energéticas.* La energía mecánica total  $H = E + V$  del oscilador es igual a la energía potencial máxima  $V_m = Kx_0^2/2$ , o a la energía cinética máxima  $E_m = mv_0^2/2 = m\omega_0^2 x_0^2/2$ . Debe observarse que los valores medios respecto al tiempo  $\bar{E}$  y  $\bar{V}$  de las energías cinética y potencial son  $\bar{E} = E_m/2$  y  $\bar{V} = V_m/2$ . Evidentemente, tenemos  $\bar{E} = \bar{V} = H/2$ .

**EJEMPLO.** Consideremos el oscilador masa-resorte de la figura 8-6. La masa del carrito es 4 kg. Si se suspende el carrito del extremo de un resorte vertical, la longitud de equilibrio del resorte es  $d = 7,5$  cm mayor que la longitud correspondiente a deformación nula. ¿Cuál será el período de oscilación del carrito cuando se mueva a lo largo de la vía en la forma indicada en la figura 8-6?

La constante  $K$  del resorte puede determinarse a partir del valor observado de  $d$ ; es decir  $Kd = mg$  o sea  $K = mg/d$ . El período de oscilación es, pues,  $T_0 = 2\pi\sqrt{m/K} = 2\pi\sqrt{md/mg} = 2\pi\sqrt{d/g} = 2\pi\sqrt{7,5/981} \simeq 0,53$  s.

Con una amplitud  $x_0 = 15$  cm de esta oscilación, ¿cuál es su energía total? ¿Cuáles son la celeridad máxima y media del carrito? La energía total puede expresarse o como energía potencial máxima, o como energía cinética máxima,  $H = Kx_0^2/2 = mv_0^2/2$ . Con  $K = mg/d = 523,2$  N/m obtenemos  $H = 523,2 \cdot 0,15^2/2 = 5,9$  J. La celeridad máxima es  $v_0 = \sqrt{K/m} x_0$ , que, siendo  $m = 4$  kg, nos da  $v_0 = \sqrt{523,2/4} \cdot 0,15 = 1,7$  m/s. La celeridad media correspondiente es  $\bar{v} = (2/\pi)v_0 = 4x_0/T_0 \simeq 1,1$  m/s.

*Fase.* En el estudio del oscilador lineal hemos tomado, hasta ahora, el instante en que  $x = x_0$  como origen de tiempos. Supongamos ahora que tomamos  $t = 0$  en otro instante, por ejemplo, cuando  $x = x_0 \cos \phi$ . El desplazamiento en un instante posterior  $t$  vendrá dado por

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t + \phi) = x_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0} + \phi\right) \quad (8-7)$$

según se indica en la figura 8-9. La expresión encerrada entre paréntesis es el llamado *ángulo de fase* del oscilador, y la cantidad  $\phi$  recibe el nombre de *fase inicial* o constante de fase. Por ejemplo, si  $\phi = \pi/2$  tenemos

$$x = x_0 \cos \left( \omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right) = -x_0 \sin \omega_0 t$$

o bien, si  $\phi = -\pi/2$  tenemos

$$x = x_0 \cos \left( \omega_0 t - \frac{\pi}{2} \right) = x_0 \sin \omega_0 t$$

**EJEMPLO 1.** El movimiento armónico de un cuerpo de período  $T_0 = 2$  s está descrito por  $x = x_0 \cos \omega_0 t = x_0 \cos (2\pi t/T_0)$ . Cuando el cuerpo alcanza la posición  $x = -x_0$  es capturado y retenido durante un tiempo  $\tau = 0,5$  s, al cabo del cual vuelve a quedar suelto. Si se mide el tiempo a partir del mismo origen que antes, ¿cuál será la expresión del movimiento armónico subsiguiente?

El cuerpo alcanza la posición  $x = -x_0$  en el instante  $t_1 = T_0/2$  y en dicho instante tenemos  $\omega_0 t_1 = \omega_0 T_0/2 = \pi$ . Cuando se suelta el cuerpo en el instante  $T_0/2 + \tau$ , el argumento de la función coseno debe seguir siendo  $\pi$ . Por tanto, si suponemos que

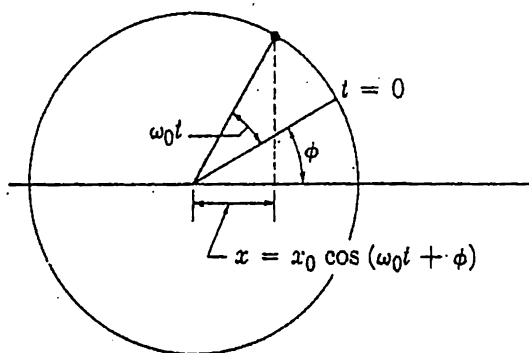


Fig. 8-9. Cuando se mide  $t$  a partir del instante en que  $x = x_0 \cos \phi$ , el desplazamiento en un instante posterior  $t$  es  $x = x_0 \cos (\omega t + \phi)$ . El ángulo  $\phi$  es la constante de fase del oscilador.

la constante de fase del nuevo movimiento es  $\phi$ , obtenemos  $\omega_0(T_0/2 + \tau) + \phi = \pi$  o sea  $\phi = -\pi/2$ . Por tanto, el movimiento subsiguiente vendrá dado por

$$x = x_0 \cos \left( \omega_0 t - \frac{\pi}{2} \right) = x_0 \sin \omega_0 t$$

**EJEMPLO 2.** El movimiento de un cuerpo situado en el extremo de un resorte tiene un desplazamiento  $x = x_0 \cos \omega_0 t$ . Cuando el cuerpo se halla en  $x = -x_0$ , es decir, cuando  $t = T/2$ , el cuerpo recibe un impulso  $J$  en la dirección y sentido positivo de las  $x$ . Determinar la amplitud y la fase de la oscilación después del impulso. El tiempo se mide a partir del mismo origen que antes.

En el punto  $x = -x_0$  la velocidad del oscilador antes del impulso es nula, y después del impulso es  $v' = J/m$ , donde  $m$  es la masa del cuerpo. La energía mecánica total del oscilador después del impulso es, pues,  $H' = Kx_0^2/2 + mv'^2/2 = Kx_0^2/2 + J^2/2m$ . La nueva amplitud de oscilación  $x'_0$  viene dada entonces por  $H' = Kx_0'^2/2$ ; es decir,  $x'_0 = \sqrt{x_0^2 + (J^2/Km)}$ . La constante de fase  $\phi$  de la nueva oscilación debe ser tal que el desplazamiento en  $t = T/2$  siga siendo  $-x_0$ , o tal que la velocidad en  $T/2$  sea  $J/m$ . Así, tenemos  $-x_0 = x'_0 \cos(\omega_0 T/2 + \phi) = -x'_0 \cos \phi$ , o sea,  $\cos \phi = x/x'_0$ .

**8-4 Oscilaciones pequeñas de un péndulo simple.** Como nuevo ejemplo de oscilador lineal, estudiaremos las oscilaciones pequeñas de un péndulo. El péndulo, representado en la figura 8-10, se supone tener toda su masa  $m$  concentrada en un punto a una distancia  $l$  del punto fijo de suspensión. Desde luego, esta concentración de la masa es una idealización y a un péndulo de este tipo se le llama matemático o simple, para distinguirlo del péndulo físico que tiene su masa distribuida. Podemos lograr aproximadamente un péndulo matemático con una bola pequeña y pesada sujeta al extremo de un hilo ligero.

Se hace oscilar el péndulo en un plano vertical y se mide la desviación del péndulo por el ángulo  $\theta$  que forma con la posición de equilibrio, como se indica en la figura. Como de costumbre,  $\theta$  se mide positivo en el sentido opuesto al de las agujas del reloj. En lugar de  $\theta$  podemos utilizar la longitud  $s$  del desplazamiento a lo largo de la trayectoria circular de la lenteja del péndulo. Tenemos

$$s = l\theta \quad (8-8)$$

Si es  $m$  la masa de la lenteja, la ecuación del movimiento es

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = F_s \quad (8-9)$$

donde  $F_s$  es la suma de las componentes en la dirección  $s$  de todas las fuerzas que se ejercen sobre la lenteja del péndulo. Éstas son la tensión del hilo y el peso

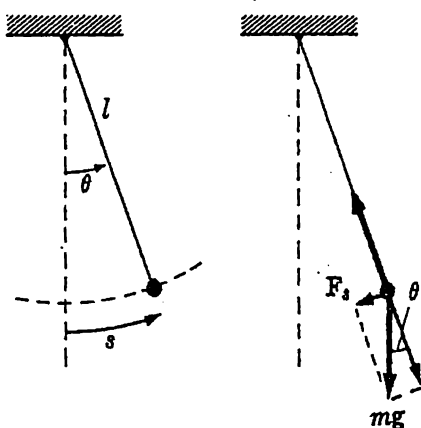


Fig. 8-10. Péndulo simple.

$p = mg$ . Sólo ésta última fuerza tiene una componente  $F_s = -p \sin \theta$  en la dirección  $s$ , según se indica en la figura 8-10. Para ángulos suficientemente pequeños, por ejemplo  $\theta < \pi/6$ , la aproximación  $\sin \theta \simeq \theta = s/l$  es buena, y la componente de la fuerza en la dirección  $s$  puede escribirse en la forma  $F_s = -(p/l)s$ . La ecuación (8-9) del movimiento se reduce entonces a

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{p/l}{m} s \quad (8-10)$$

Esta ecuación es análoga en todo a la ecuación  $d^2x/dt^2 = -(K/m)x$ , obtenida para el oscilador masa-resorte y vemos, por comparación que, en el péndulo, a la constante del resorte  $K$  corresponde la cantidad  $p/l$ . En el oscilador masa-resorte, la constante del resorte es independiente de la masa y por tanto la frecuencia característica  $f_0 = (1/2\pi)\sqrt{K/m}$  es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la masa. En cambio, en el péndulo la fuerza restauradora está creada por la gravedad y la constante correspondiente es proporcional a la masa de la lenteja,  $p/l = mg/l$ . En consecuencia, la frecuencia característica y el período del péndulo son *independientes de la masa*:

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T_0 = \frac{1}{f_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (8-11)$$

Como  $g$  varía con la posición, también lo hará el período del péndulo; si el péndulo estuviera en la Luna, su período sería mayor que si estuviera en la Tierra. El período del oscilador masa-resorte, en cambio, es independiente de la posición. Que el período de un péndulo sea independiente de la masa se deduce del hecho de que el peso  $p$  y por tanto la masa pesante, son proporcionales a la masa inerte (véase el cap. 2).

**EJEMPLO.** ¿Cuál sería la longitud de un péndulo simple que tenga un período de 1 s? ¿Cuál es la energía mecánica total del péndulo si el ángulo de excursión máximo es  $\theta_m = \pi/8$ ?

Siendo  $g = 981 \text{ cm/s}^2$  y  $T_0 = 1 \text{ s}$ , obtenemos  $l = 981(2\pi)^2 \simeq 25 \text{ cm}$ . La energía mecánica total del péndulo es igual a la energía potencial máxima, que puede expresarse en la forma  $V_m = K's^2/2$ , donde  $K'$  es la constante del resorte equivalente  $K' = p/l = mg/l$ . Con  $s = l\theta$ , la energía potencial máxima resulta ser  $V_m = mgl(\theta^2/2)$ . Con  $m = 1 \text{ g}$ , obtenemos  $V_m \simeq 1900 \text{ erg}$ . Para un ángulo de excursión arbitrario, la energía potencial máxima se determinará a partir de  $mgl(1 - \cos \theta)$ , según se vio en el capítulo 7. Para valores pequeños del ángulo  $\theta$ , tenemos  $\cos \theta \simeq 1 - (\theta^2/2)$  y la expresión general se reduce al resultado obtenido anteriormente.

**8-5 Oscilador de dos cuerpos. Masa reducida.** En el estudio de las vibraciones de una molécula diatómica, por ejemplo, nos hallamos ante las oscila-

ciones de dos cuerpos en interacción, como las representadas en la figura 8-11. En ella, dos cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$  están unidos por un resorte de constante  $K$ . Si se comprime el resorte y se suelta después, los cuerpos oscilarán con frecuencias iguales. En algunos casos, el centro de masa se halla en reposo pero, en general, las oscilaciones tendrán superpuesto un movimiento de traslación. En todos los casos, el movimiento oscilatorio es el movimiento de los cuerpos respecto a su centro de masa. Queremos determinar la frecuencia característica de la oscilación y la razón entre las amplitudes de oscilación y entre las energías de los dos cuerpos.

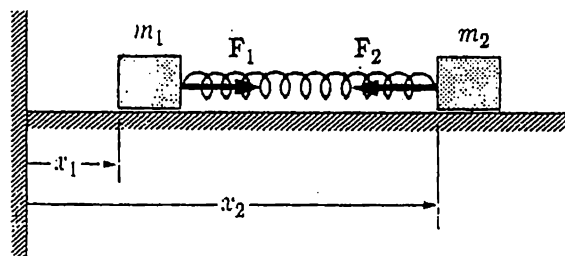


Fig. 8-11. Oscilador de dos cuerpos.

Si son  $x_1$  y  $x_2$  las coordenadas de posición de los dos cuerpos respecto a un sistema fijo de coordenadas, como el indicado en la figura 8-11, la longitud del resorte será  $x_2 - x_1$ , y si su longitud para deformación nula es  $d$ , el alargamiento del resorte es  $x = x_2 - x_1 - d$ . La fuerza que se ejerce sobre  $m_2$  es, pues,  $F_2 = -Kx$  y la que se ejerce sobre  $m_1$  es  $F_1 = Kx$ . Así pues, las ecuaciones del movimiento de los dos cuerpos son

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -Kx \quad (8-12)$$

y

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = Kx \quad (8-13)$$

Multiplicando la ecuación (8-12) por  $m_1$ , la ecuación (8-13) por  $m_2$ , y restando, obtenemos

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2 x}{dt^2} = -Kx \quad (8-14)$$

donde  $x = x_2 - x_1 - d$ . En otras palabras, el alargamiento  $x$  del resorte satisface a una ecuación formalmente igual a la del oscilador de una sola masa que tuviera fijo un extremo del resorte y el otro unido a la masa

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (8-15)$$

A la cantidad  $\mu$  se le da el nombre de *masa reducida* del oscilador.

La pulsación característica de la oscilación, que es la misma para  $m_1$  y para  $m_2$ , es, pues,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{\mu}} \quad (8-16)$$

La energía de oscilación puede expresarse o como la energía potencial máxima  $V_m = Kx_m^2/2$ , donde  $x_m$  es el alargamiento máximo del resorte, o como suma de las energías cinéticas máximas de los dos cuerpos en el instante en que el resorte no está deformado. Estas energías cinéticas pueden expresarse en la forma  $E_1 = p_1^2/2m_1$  y  $E_2 = p_2^2/2m_2$ , donde  $p_1$  y  $p_2$  son las cantidades de movimiento de los cuerpos *medidas respecto al centro de masa*. Así tenemos  $p_1 = p_2 = p$ , y la energía mecánica total de oscilación es

$$H = \frac{1}{2} Kx_m^2 = \frac{1}{2} p_m^2 \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{p_m^2}{\mu}$$

Evidentemente, la razón entre las energías de oscilación de los dos cuerpos es

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

Si son  $X_1$  y  $X_2$  las magnitudes de las amplitudes de los dos cuerpos, tenemos  $X_1/X_2 = m_2/m_1$  y  $x_m = X_1 + X_2$ . A partir de estas relaciones podemos determinar  $X_1$  y  $X_2$ , en función de  $x_m$ .

Si el centro de masa no estuviera en reposo, sino que tuviera una velocidad  $V$ , la energía total del sistema (masa  $M = m_1 + m_2$ ) es la suma de la energía del centro de masa  $MV^2/2$  y de la energía de oscilación, según se estudiará con mayor detalle en el capítulo 11. Así, pues, restando la energía  $MV^2/2$  del centro de masa de la energía total (que suele conocerse), obtenemos la *energía mecánica de oscilación*, a partir de la cual pueden hallarse las propiedades del movimiento oscilatorio, según se ha visto anteriormente.

**EJEMPLO.** Dos cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$  pueden moverse libremente a lo largo de una vía horizontal recta. Están unidos por un resorte de constante  $K$ . El sistema se halla inicialmente en reposo. Se da a  $m_1$  un impulso instantáneo  $J$  de la dirección de la vía. Determinar el movimiento del sistema después del impulso. En particular, determinar la energía de oscilación de los cuerpos.

Después del impulso, el centro de masa del sistema se mueve con una velocidad  $V = J/M$ , donde  $M = m_1 + m_2$  y la energía de traslación correspondiente es  $E_t = MV^2/2 = J^2/2M$ . Si consideramos el movimiento de  $m_1$  solo, observamos que la cantidad de movimiento adquirida por  $m_1$  inmediatamente después del impulso es  $p_1 = J$ , y la energía cinética de  $m_1$  correspondiente es  $p_1^2/2m_1 = J^2/2m_1$ . Como en ese momento



el resorte no está deformado, esta cantidad será la energía total del sistema. Si restamos de esta cantidad la energía del centro de masa, obtenemos la energía de oscilación:

$$H_0 = \frac{J^2}{2} \left( \frac{1}{m_1} - \frac{1}{M} \right) = \left( \frac{J^2}{2m_1} \right) \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

En otras palabras, al movimiento oscilatorio va la fracción  $m_2/(m_1 + m_2)$  de la energía total suministrada al sistema. La compresión máxima del resorte se podrá obtener de  $Kx_m^2/2 = H_0$ .

**8-6 Vibraciones moleculares.** En el oscilador lineal, la relación entre la fuerza y el desplazamiento es particularmente sencilla y, según hemos visto, los detalles del movimiento pueden describirse cuantitativamente mediante fórmulas matemáticas sencillas. Según se indicó anteriormente, la aproximación al oscilador lineal sólo se aplica ordinariamente cuando la amplitud de la oscilación es suficientemente pequeña. A amplitudes mayores, la descripción cuantitativa suele ser mucho más complicada.

No obstante, aunque la descripción cuantitativa detallada sea complicada, las características cualitativas fundamentales del movimiento se pueden comprender fácilmente a partir de la curva de energía potencial del oscilador. Como ejemplo, consideremos una curva de energía potencial del tipo representado en la figura 8-12. Esta curva tiene una forma muy corriente entre muchos ejemplos de movimiento. Por ejemplo, es aplicable a un átomo en interacción con otro. La coordenada  $x$  representa entonces la separación de los átomos. Desde luego, cuando los átomos o moléculas están muy separados, la fuerza que se ejercen es casi nula. Al acercarse un átomo a otro, la fuerza inicial puede ser repulsiva y la energía potencial aumenta. Para distancias pequeñas, menores que  $x_b$  en la figura 8-12, disminuye la energía potencial y la fuerza se hace atractiva. No obstante, la fuerza no permanece atractiva (negativa) indefinidamente al disminuir la separación, sino que la fuerza vuelve a hacerse repulsiva y la curva de energía potencial presenta un mínimo que corresponde a un equilibrio estable en la separación de los átomos.

Por ser conveniente en el presente estudio, mediremos la energía potencial  $V$  a partir del punto mínimo, en el cual haremos  $V = 0$ . Aun cuando tengamos un punto de equilibrio estable en  $x_0$ , los átomos o moléculas no están nunca en reposo relativo uno respecto a otro sino que siempre tienen alguna energía, según veremos en el capítulo 16. El carácter del movimiento relativo entre los átomos depende en gran manera de la magnitud de esta energía. Por ejemplo, en la figura 8-12 puede verse que para una energía  $H_1$ , sólo es posible el movimiento en el valle de la curva de energía potencial entre los puntos  $A_1$  y  $B_1$ . Los átomos tienen entonces movimiento oscilatorio, en el cual hay una conversión continua de energía cinética en potencial, como en el caso del oscilador lineal. Los átomos

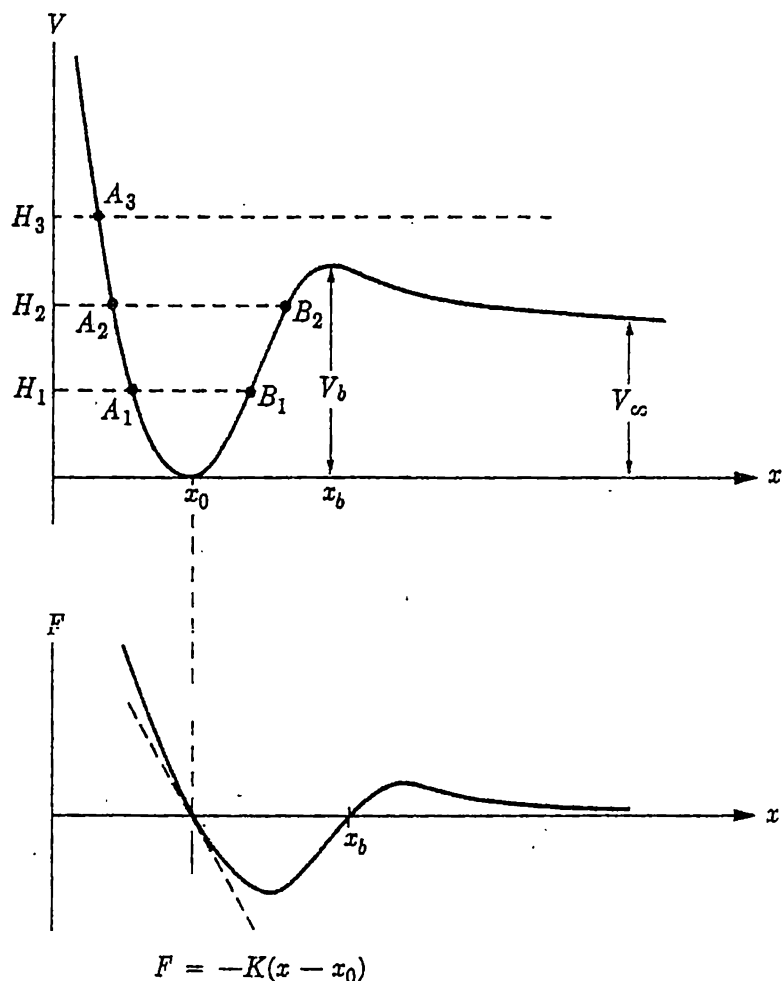


Fig. 8-12. Diagrama energético para la interacción entre dos átomos.

se hallan entonces «ligados», manteniendo una separación media igual a  $x_0$ . Si es suficientemente pequeño  $H_1$  la gráfica de la fuerza  $F$  en función de  $x$  es aproximadamente una recta  $F = -K(x - x_0)$ , según se indica en la figura y la energía potencial correspondiente es  $K(x - x_0)^2/2$ . (¿Qué ocurriría si la energía potencial fuera proporcional a  $x^4$  para valores pequeños de  $x$ ? Véase el problema 8-11.) Incidentalmente, a la escala atómica o molecular, la relación lineal entre  $F$  y  $x$ , para valores pequeños de  $x$ , es la que hace que exista una relación análoga entre fuerzas y deformaciones de una cantidad macroscópica de materia como, por ejemplo, en el caso de un resorte.

Al aumentar la energía hasta un valor tal como el  $H_2$  de la figura 8-12, la oscilación tiene una amplitud suficientemente grande para superar el dominio de linealidad de la fuerza. Según se indica en la figura, la fuerza restauradora crece entonces más lentamente con el desplazamiento para  $x > x_0$ , que para  $x < x_0$ . En consecuencia, el átomo llega más lejos hacia afuera que hacia adentro y la separación media de los átomos resulta algo mayor que la separación de

equilibrio. Cualitativamente, esta asimetría de la fuerza restauradora y de la curva de energía potencial es la causa de la dilatación térmica de los sólidos, según se verá en el capítulo 17.

Si se incrementa aún más la energía de oscilación, por ejemplo hasta el valor  $H_3$  de la figura 8-12, de manera que se supere el valor  $V_b$  de la barrera en  $x_b$ , el movimiento ya no será oscilatorio; los átomos ya no estarán ligados entre sí. Uno de los átomos salvará la barrera y pronto se hallará fuera del campo de fuerzas de su vecino. Si luego chocara con otro átomo, podría salvar su barrera de potencial, penetrar en el valle de potencial y alcanzar el punto de separación mínima ( $A$  en la figura). Como hemos supuesto un choque perfectamente elástico, el átomo invertirá el sentido de su movimiento y se alejará con la misma celeridad que tenía antes del choque. En cambio, si el choque no fuera perfectamente elástico, disminuiría la energía mecánica del átomo y si aquella pasara de  $H_3$  a  $H_2$ , los átomos se combinarían y formarían una molécula a consecuencia del choque.

Esta separación de los átomos que ocurre cuando la energía de oscilación supera un cierto valor crítico, es la esencia de la explicación «molecular» de fenómenos tales como la disociación y recombinación de un gas diatómico o poliatómico a temperatura elevada, de la fusión de un sólido, o de la ebullición de un líquido, según estudiaremos en el capítulo próximo.

**8-7 Amortiguamiento de las oscilaciones libres.** Hasta ahora hemos prescindido, en el estudio de las oscilaciones, de la influencia del rozamiento. La fuerza de rozamiento actúa siempre en sentido opuesto al desplazamiento y, evidentemente, dará lugar a una disminución gradual de la amplitud de la oscilación. Con el fin de estudiar cuantitativamente este movimiento, debemos establecer la ecuación del movimiento que incluya la fuerza de rozamiento y buscar la solución adecuada de dicha ecuación.

Las fuerzas de rozamiento existentes en los sistemas mecánicos suelen ser complicadas y difíciles de describir cuantitativamente de manera precisa. La fuerza de rozamiento entre dos superficies lisas suele ser constante para velocidades pequeñas, pero se halla sujeta a grandes variaciones cuando se tienen en cuenta la humedad, los detalles de la superficie, etc. La fuerza de resistencia al movimiento de una esferita que se mueva en el seno de un fluido es proporcional a su velocidad (ley de STOKES), y la fuerza de resistencia al movimiento de un cuerpo que se mueva a través de un gas enrarecido es proporcional al cuadrado de la velocidad. En otras condiciones, la fuerza de resistencia al movimiento depende críticamente de la forma del cuerpo y la dependencia de la velocidad es tan compleja que se debe realizar un análisis numérico para determinar la influencia de la fuerza de resistencia sobre el movimiento. El movimiento podrá describirse en términos matemáticos sencillos solamente en el caso de fuerzas

de rozamiento especialmente sencillas. Ejemplo de éstas lo tenemos en el caso de la fuerza proporcional a la velocidad, como las que cumplen la ley de STOKES, y este es el caso que consideraremos.

Como la fuerza de rozamiento está siempre dirigida en sentido opuesto al de la velocidad, podremos expresar la fuerza de rozamiento en la forma  $F_f = -R(dx/dt)$ , donde  $R$  es una constante. Si consideramos el movimiento de un cuerpo sometido a la acción de una fuerza de resorte y una fuerza de rozamiento de este tipo, la ecuación del movimiento de este cuerpo vendrá dada por

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx - R \frac{dx}{dt} \quad (8-17)$$

Supongamos que nos interesa el movimiento que resulta cuando soltamos el cuerpo partiendo del reposo, en la posición  $x = x_0$ , en el instante  $t = 0$ . La solución de la ecuación (8-17) correspondiente a esta condición inicial es

$$x = x_0 e^{-t/\tau} \left( \cos \omega t + \frac{1}{\omega \tau} \sin \omega t \right) \quad (8-18)$$

en la cual

$$\tau = \frac{2m}{R}$$

y

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - (1/\omega_0 \tau)^2} = \omega_0 \sqrt{1 - (T_0/2\pi\tau)^2}$$

y el período es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (1/\omega_0 \tau)^2}}$$

Se recomienda al lector que se dé perfecta cuenta de que la ecuación (8-18) satisface a la (8-17), y que  $x = x_0$  y  $v = 0$  cuando  $t = 0$ . (Prob. 8-28). Obsérvese que la existencia del rozamiento hace disminuir algo la frecuencia de oscilación, o sea, aumentar algo el período. Sin embargo, este efecto suele ser muy pequeño. En la mayoría de oscilaciones, el tiempo  $\tau$  es considerablemente mayor que un período y por tanto el término  $(T_0/2\pi\tau)^2$  del radical es mucho menor que  $(1/2\pi)^2 \simeq 0,025$ , lo cual significa que se varían la frecuencia y el período en menos de un 1 %. Por tanto, en la mayoría de las aplicaciones prácticas podrá emplearse el período  $T_0$ .

La cantidad  $\tau = 2m/R$  es un tiempo característico que mide la duración de las oscilaciones. En este sentido, puede considerarse como la vida del oscilador. Cuando el oscilador se ha movido un tiempo  $\tau$ , la amplitud se habrá reducido en un factor  $e^{-1} \simeq 1/2,718$ , o en otras palabras, aproximadamente igual a 1/3 de su valor inicial. La vida  $\tau$  es una cierta fracción del período  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  del

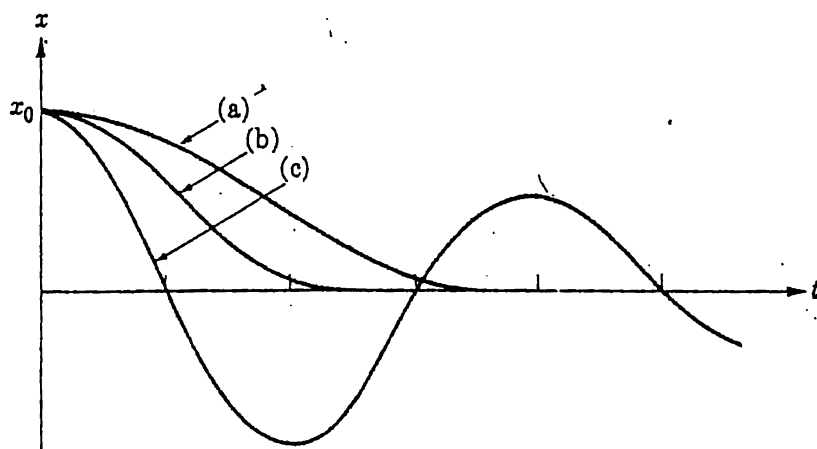


Fig. 8-13. Gráficas de  $x$  en función de  $t$  para un oscilador con (a)  $Q < 1/2$ , (b)  $Q = 1/2$ , y (c)  $Q > 1/2$ .

oscilador no amortiguado, y esta fracción es  $\tau/T_0 = \omega_0\tau/2\pi = Q/\pi$ , donde hemos introducido el símbolo  $Q = \omega_0 m/R$ . El desplazamiento angular correspondiente a la vida es, pues,  $\omega_0\tau = 2Q$ .

Además de la variación de amplitud del oscilador con el tiempo, que ya esperábamos, hemos indicado que también el período de oscilación se halla influido por la fuerza de rozamiento. Este último resultado es razonable si consideramos el caso extremo en que la fuerza de rozamiento sea tan grande que el oscilador quede prácticamente «pegado» a la superficie. En tal caso, el período, si lo hay, debe evidentemente ser mucho mayor que el período  $T_0$  del oscilador no amortiguado. El análisis matemático de la ecuación (8-18) revela que el período se hace, efectivamente, infinito cuando  $\omega_0\tau = 1$ , es decir, cuando  $Q = \frac{1}{2}$  o sea  $R = 2\omega_0 m$ . En estas condiciones, se dice que el oscilador se halla en las condiciones de amortiguamiento crítico. El cuerpo tenderá a la posición de equilibrio sin oscilar, es decir, sin sobrepasarla. Si es  $Q$  mayor que  $\frac{1}{2}$  el movimiento será oscilatorio y si es menor que  $\frac{1}{2}$  el movimiento no será oscilatorio (será sobreamortiguado). En la figura 8-13 puede verse la dependencia del tiempo de los movimientos sobreamortiguado, con amortiguamiento crítico y subamortiguado (oscilatorio).

La cantidad  $Q = \omega_0 m/R = \pi\tau/T_0 = \omega_0\tau/2$ , llamada a veces *calidad*, puede interpretarse físicamente de varias maneras. Si el amortiguamiento es pequeño, puede verse (prob. 8-31) que  $2\pi/Q$  es la variación fraccionaria de la pérdida de energía mecánica total en un período del movimiento. También podemos expresar  $Q$  en función de la magnitud del impulso de rozamiento en relación con la cantidad de movimiento máxima. El impulso de la fuerza de rozamiento, cuando el cuerpo va de  $x = 0$  a  $x = x_0$ , es  $\int F_f dt = R \int v dt = R x_0$ , y la cantidad de movimiento del cuerpo cuando pasa por la posición de equilibrio es  $mv_0$ . El co-

ciente entre la cantidad de movimiento máxima y el impulso de la fuerza de rozamiento será, pues,  $mv_0/Rx_0 \simeq m\omega_0/R = Q$ , si utilizamos la relación aproximada  $v_0 \simeq \omega_0 x_0$ . Por último, si se expresa  $Q$  en la forma  $Q = \omega_0 \tau / 2 \simeq \pi(\tau/T_0)$ , vemos que para valores suficientemente grandes,  $Q$  puede interpretarse como el producto de  $\pi$  por el número de oscilaciones completas durante la vida  $\tau$ , ya que entonces, según hemos visto, el período del oscilador es muy aproximadamente igual a  $T_0$ .

**8-8 Movimiento forzado de un oscilador lineal.** Las oscilaciones estudiadas hasta ahora son oscilaciones características o libres. Un oscilador libre es aquél que, con la posible excepción de los efectos del rozamiento externo, no interactúa con otros cuerpos. Realiza su propio movimiento determinado por

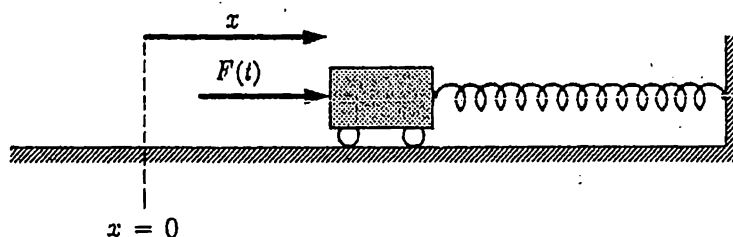


Fig. 8-14. Movimiento forzado de un oscilador lineal.

las fuerzas de inercia y restauradora del sistema. Aun cuando esas oscilaciones son muy importantes de por sí, encontraremos en Física muchos problemas en los que intervienen osciladores accionados por fuerzas exteriores.

Con el fin de fijar ideas con el ejemplo, volveremos a utilizar el oscilador lineal consistente en un carrito unido al extremo de un resorte y que se mueve sobre una vía horizontal en la forma indicada en la figura 8-14. Se supone que sobre el carrito se ejerce la fuerza exterior  $F(t)$  que varía armónicamente con el tiempo. Además, sobre el carrito se ejercen la fuerza del resorte y la fuerza de rozamiento de la vía. La frecuencia característica de oscilación del oscilador, si prescindimos del rozamiento, está representada por  $f_0$  y tenemos  $2\pi f_0 = \sqrt{K/m}$ . Consideraremos  $F(t)$  armónica, de frecuencia  $f$  diferente, en general, de  $f_0$ . El resultado es que el carrito estará forzado a moverse con movimiento oscilatorio de la misma frecuencia  $f$  de la fuerza que lo acciona. Además, al principio existe una oscilación característica «transitoria» del oscilador, pero llega a desaparecer a causa de la fuerza de rozamiento y el sistema alcanza un estado permanente de oscilación de frecuencia  $f = \omega/2\pi$ .

El desplazamiento o elongación del carrito en el movimiento permanente lo describiremos por  $x = x_0 \cos \omega t$ , donde queda por determinar la amplitud  $x_0$  en función de la fuerza aplicada y de las propiedades del oscilador. ¿Qué fuerza

hay que aplicar para producir el desplazamiento  $x = x_0 \cos \omega t$ ? Para responder a esta pregunta hemos de considerar las distintas fuerzas que actúan sobre el carrito. Si, como antes, utilizamos una fuerza de rozamiento  $F_f$  proporcional a la velocidad, es decir,  $F_f = -R(dx/dt)$ , la ecuación del movimiento es

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(t) - Kx - R \frac{dx}{dt}$$

y la fuerza que hay que aplicar para producir el desplazamiento  $x$  será, pues,

$$F(t) = Kx + m \frac{d^2 x}{dt^2} + R \frac{dx}{dt} \quad (8-19)$$

Sustituyendo en esta ecuación  $x = x_0 \cos \omega t$  hallamos, para la fuerza que hay que aplicar a fin de producir el movimiento:

$$\begin{aligned} F(t) &= Kx_0 \cos \omega t - m\omega^2 x_0 \cos \omega t - R\omega x_0 \sin \omega t \\ &= Kx_0 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \cos \omega t - R\omega x_0 \sin \omega t \end{aligned} \quad (8-20)$$

En la primera parte de la ecuación (8-20) los tres términos representan, respectivamente, las fuerzas necesarias para vencer la rigidez del resorte, la inercia del carrito, y el rozamiento. En la segunda parte de la ecuación hemos agrupado los términos en  $\cos \omega t$  e introducido la expresión de la frecuencia característica del oscilador no amortiguado,  $K/m = \omega_0^2 = (2\pi f_0)^2$ .

A diferencia de lo que ocurre con la frecuencia característica  $f_0$  del oscilador dado, la frecuencia aplicada  $f$  no depende de las propiedades del oscilador, sino que está determinada únicamente por el mecanismo accionador. Uno de los problemas esenciales en el estudio del movimiento forzado es determinar la respuesta del oscilador a diferentes frecuencias de accionamiento. Encontraremos que se pueden distinguir tres tipos fundamentalmente diferentes de respuesta del oscilador, los cuales corresponden a los tres dominios de frecuencias  $\omega < \omega_0$ ,  $\omega \simeq \omega_0$ , y  $\omega > \omega_0$ .

Empecemos con el primer dominio, en el cual la frecuencia de accionamiento es menor que la frecuencia característica del oscilador. En este dominio  $\omega/\omega_0 < 1$ , y al tender  $\omega$  a cero, la relación entre la fuerza aplicada y el desplazamiento del oscilador es, simplemente,  $F \simeq Kx_0 \cos \omega t = Kx$ . La fuerza aplicada no es más que la necesaria para comprimir el resorte; el efecto de la inercia del oscilador es despreciable. En esta región  $\omega \ll \omega_0$ , y se dice que el oscilador está gobernado por la rigidez. Obsérvese que al tender a cero  $\omega$  el desplazamiento y la fuerza

están en concordancia de fase; ambos pueden representarse por una función  $\cos \omega t$ . Además, cuando  $\omega$  sea suficientemente pequeña, el cociente entre la amplitud de la fuerza aplicada y el desplazamiento es independiente de la frecuencia.

En cambio, en la región de frecuencias elevadas  $\omega \gg \omega_0$ , la inercia juega el papel principal. Tenemos  $\omega/\omega_0 \gg 1$ , y al tender a infinito la frecuencia, la contribución más importante a la fuerza en la ecuación (8-20) se debe al término correspondiente a la inercia  $F \simeq -(\omega/\omega_0)^2 Kx_0 \cos \omega t = -\omega^2 m x_0 \cos \omega t$ . La fuerza aplicada ya no está en concordancia de fase con el desplazamiento sino que guardan una diferencia de fase igual a  $\pi$ , ya que  $-\cos \omega t = \cos(\omega t + \pi)$ . Obsérvese que la relación entre la amplitud de la fuerza  $F_0 = \omega^2 m x_0$  y la amplitud del desplazamiento depende ahora de la frecuencia. Para mantener un desplazamiento constante cuando aumenta la frecuencia, la amplitud de la fuerza deberá también aumentar de igual manera que  $\omega^2$ . Inversamente, si se mantiene constante la amplitud de la fuerza, el desplazamiento disminuirá de igual manera que  $1/\omega^2$ . En este dominio de las frecuencias elevadas  $\omega \gg \omega_0$ , se dice que el oscilador está *gobernado por la masa*.

Por último, en la región de frecuencias  $\omega \simeq \omega_0$ , donde la frecuencia de accionamiento es casi igual a la frecuencia característica, tenemos  $\omega/\omega_0 \simeq 1$ , y el factor  $1 - \omega^2/\omega_0^2$  es próximo a cero. En efecto, en ausencia de rozamiento y si  $\omega = \omega_0$ , no se precisa fuerza exterior alguna para mantener la oscilación  $x = x_0 \cos \omega_0 t$ . Desde luego, este resultado era de esperar, ya que este movimiento coincide con el del oscilador libre; las contribuciones a la fuerza, debidas a la inercia y a la rigidez, se anulan entre sí. Inversamente, si la fuerza aplicada no fuera nula cuando  $\omega = \omega_0$ , la amplitud de oscilación sería infinita, si no fuera por la influencia limitadora del rozamiento y de los efectos de no linealidad. Decimos que la frecuencia de accionamiento está *en resonancia* con la frecuencia característica, o más simplemente, que el oscilador está en resonancia. El factor que rige la amplitud es ahora el rozamiento, y la relación entre la fuerza de accionamiento y el desplazamiento es  $F = -R\omega_0 x_0 \sin \omega_0 t$ . Es interesante expresar este resultado en función de la  $Q$  del oscilador. Recordemos que  $Q = \omega_0 m/R = K/R\omega_0$ , y utilizando esta relación encontramos que  $F = -(Kx_0/Q) \sin \omega_0 t$ . En otras palabras, la amplitud de la fuerza necesaria para originar un desplazamiento de amplitud  $x_0$  en la resonancia es  $Q$  veces menor que el *valor estático*  $Kx_0$ . Inversamente, si se mantiene constante la amplitud de la fuerza, la amplitud del desplazamiento en la resonancia es  $Q$  veces mayor que el valor *estático*  $x_0$ .

Con el fin de obtener una relación entre la fuerza y el desplazamiento que sea válida en todo el dominio de frecuencias, volvamos a la ecuación (8-20). Si partimos del caso idealizado de rozamiento nulo, esta relación no es mas que  $F = Kx_0(1 - \omega^2/\omega_0^2) \cos \omega t = F_0 \cos \omega t$ . La relación correspondiente entre la amplitud



$F_0$  de la fuerza y la amplitud del desplazamiento es, pues,

$$F_0 = Kx_0 \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \quad \text{o sea} \quad x_0 = \frac{F_0/K}{1 - (\omega/\omega_0)^2} \quad (8-21)$$

En nuestro estudio del movimiento forzado, comenzamos con el problema de hallar la fuerza que hay que aplicar para dar lugar a un desplazamiento oscilatorio determinado. Una vez obtenida la solución de este problema, podemos dar un rodeo y considerar el desplazamiento como debido a la fuerza aplicada. Así, si se conoce la amplitud  $F_0$  de la fuerza aplicada, obtendremos de la ecuación (8-21) la  $x_0$  correspondiente. En la figura 8-15 puede verse esta relación. Las amplitudes de los movimientos oscilatorios se toman siempre positivas y el cambio de signo que aparece en el denominador de la ecuación (8-21) al pasar  $\omega$  por el valor  $\omega_0$  se expresa como un cambio de la fase desde 0 a  $\pi$ , como se indica en la figura 8-15.

Ampliaremos ahora el análisis para incluir el efecto del rozamiento. De la ecuación (8-20) se deduce que la fuerza es ahora de la forma  $F(t) = A \cos \omega t - B \sin \omega t$ , donde  $A = Kx_0(1 - \omega^2/\omega_0^2)$  y  $B = R\omega x_0$ . Como la fuerza es armónica, puede expresarse en la forma  $F = F_0 \cos(\omega t + \phi)$ , donde la amplitud  $F_0$  de la fuerza y la constante de fase  $\phi$  son funciones de  $\omega$  y de los parámetros del oscilador  $m$ ,  $K$  y  $R$ . Para obtener  $F_0$  y  $\phi$  en función de las cantidades conocidas  $A$  y  $B$ , utilizaremos la identidad  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ , y así obtendremos

$$F_0 \cos(\omega t + \phi) = (F_0 \cos \phi) \cos \omega t - (F_0 \sin \phi) \sin \omega t$$

En consecuencia, tenemos

$$A = F_0 \cos \phi \quad \text{y} \quad B = F_0 \sin \phi$$

y, por tanto

$$F_0 = \sqrt{A^2 + B^2} = Kx_0 \sqrt{(1 - \omega^2/\omega_0^2)^2 + (R\omega/K)^2}$$

y  $\tan \phi = B/A$ . La expresión de la amplitud de desplazamiento es, pues,

$$x_0 = \frac{F_0/K}{\sqrt{(1 - \omega^2/\omega_0^2)^2 + (R\omega/K)^2}} = \frac{F_0/K}{\sqrt{(1 - \omega^2/\omega_0^2)^2 + (\omega/\omega_0 Q)^2}} \quad (8-22)$$

y la constante de fase viene determinada por

$$\tan \phi = \frac{B}{A} = \frac{R\omega}{K(1 - \omega^2/\omega_0^2)}$$

En la figura 8-15 se han representado estas relaciones para diferentes valores de  $Q$ . La amplitud del desplazamiento se expresa en función del valor estático  $x_{\text{est}} = F_0/K$ .

Comprobación experimental del movimiento oscilatorio forzado. Con el fin de poner de manifiesto experimentalmente el movimiento oscilatorio forzado estudiado anteriormente, debemos disponer de una fuerza que dependa armónicamente del tiempo y cuya frecuencia podamos variar. Dicha fuerza se aplicará a la masa de un oscilador masa-resorte. Es preferible que la amplitud de la fuerza sea independiente de la frecuencia. No obstante, es mucho más fácil original un desplazamiento armónico gobernado que una fuerza armónica, y puede realizarse fácilmente un experimento como el de la figura 8-16. En él, se desplaza el extremo de un resorte con movimiento armónico  $x = x_0 \sin \omega t$ , y se observa el desplazamiento correspondiente de la masa en el otro extremo del resorte. Este tipo de experimento, tipo *A*, no corresponde totalmente al tipo inicial de movimiento forzado, tipo *B*, en el que se aplicaba una fuerza armónica dada a la masa del oscilador situada en un extremo del resorte cuyo otro extremo estaba fijo. No obstante, por lo que concierne al movimiento de la masa del oscilador, los dos casos son totalmente equivalentes. Dejamos como ejercicio demostrar que el

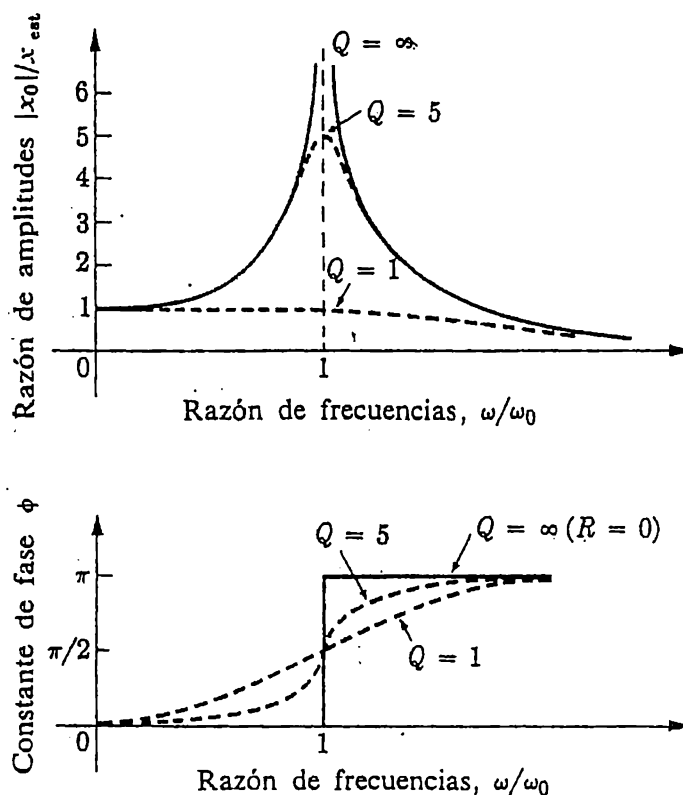


Fig. 8-15. Magnitud de la amplitud de desplazamiento y de la diferencia de fase  $\phi$  entre la fuerza aplicada y el desplazamiento en un oscilador armónico. La amplitud del desplazamiento se expresa en función del valor  $x_{\text{est}} = F_0/K$  que corresponde a  $\omega = 0$ .

movimiento producido en  $A$  por un desplazamiento armónico dado  $x = x_0 \sin \omega t$  es el mismo que el movimiento originado en  $B$  por una fuerza  $F = Kx_0 \sin \omega t$ , donde  $K$  es la constante del resorte (prob. 8-39).

El tipo de movimiento forzado al que hemos llamado  $B$  puede ponerse de manifiesto con el sencillo dispositivo de la figura 8-17. En la figura puede verse un carrito que permanece en una vía entre dos resortes estirados. Se pone en oscilación el carrito inclinando la vía un ángulo pequeño  $\theta = \theta_0 \sin \omega t$  respecto a la posición horizontal de equilibrio. Si el ángulo es suficientemente pequeño, la componente de la fuerza exterior en la dirección de la vía es  $F = mg \sin \theta \simeq mg\theta = mg\theta_0 \sin \omega t$ , que es una fuerza aplicada armónica de amplitud  $F_0 = mg\theta_0$ .

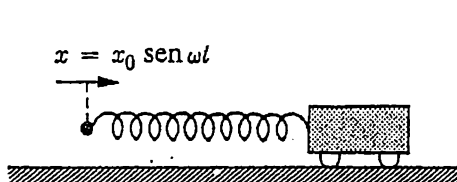


Fig. 8-16. Demostración experimental del movimiento armónico forzado.

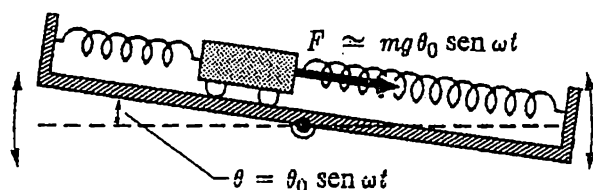


Fig. 8-17. Experimento acerca de un movimiento armónico forzado.

(Hay que advertir que en este experimento hay un pequeño efecto extraño originado por el movimiento del sistema de coordenadas. Véase el cap. 11.)

Desde luego, hay otras maneras de originar una fuerza armónica de amplitud constante. En particular, podríamos utilizar un dispositivo electromagnético análogo a un altavoz ordinario. En este caso se utiliza la fuerza ejercida sobre una corriente eléctrica en un campo magnético, siendo la fuerza proporcional a la intensidad de la corriente. Cuando la intensidad de la corriente varía armónicamente con el tiempo, se origina la fuerza exterior deseada.

*Consideraciones energéticas.* Hemos visto que la fuerza requerida para producir el desplazamiento oscilatorio  $x = x_0 \cos \omega t$  es  $F = F_0 \cos (\omega t + \phi)$ , donde la constante de fase  $\phi$  varía de 0 a  $\pi$  cuando  $\omega$  varía de 0 a  $\infty$ . La potencia instantánea suministrada al oscilador por la fuerza es  $Fv$ , donde  $v$  es la velocidad,  $v = -\omega x_0 \sin \omega t = -v_0 \sin \omega t$ . Esta potencia varía con el tiempo; es positiva cuando  $F$  y  $v$  tienen el mismo sentido y negativa cuando tienen sentidos opuestos. Si no hay rozamiento en el oscilador, los trabajos positivo y negativo suministrados en un período se compensan y la potencia media es nula. Sin embargo, en presencia de rozamientos, es evidente que se disipa energía. Dejamos como ejercicio el demostrar que la potencia media suministrada es

$$\text{Potencia media} = \frac{1}{2} F_0 v_0 \sin \phi = \frac{1}{2} R v_0^2 \quad (8-23)$$

(Véase el Problema 8-40.)

**8-9 Espectro mecánico de frecuencias.** Entre las diversas clases de osciladores mecánicos, las frecuencias de oscilación van desde 0 hasta aproximadamente  $10^{13}$  Hz. Al igual que el ojo humano sólo es sensible a una pequeña parte del espectro electromagnético, el oído humano sólo puede detectar una parte del espectro mecánico de frecuencias: entre 20 y 15 000 Hz, aproximadamente. Las frecuencias inferiores a 20 Hz se hallan en diversos tipos de estructuras mecánicas, edificios, puentes, etc. Las frecuencias superiores a los 15 000 Hz se hallan frecuentemente en la Mecánica de fluidos y pueden generarse en condiciones reguladas por medio de cristales piezoeléctricos u otros transductores electromecánicos. A dichas vibraciones suele llamárselas *vibraciones ultrasónicas* o *ultrasonidos*, tienen numerosas aplicaciones industriales y recientemente se han generado, mediante transductores electromecánicos, frecuencias de hasta 3000 MHz ( $3 \cdot 10^9$  Hz). El límite superior de las frecuencias de vibración en los sólidos corresponde al de las vibraciones térmicas, con una frecuencia del orden de  $10^{13}$  Hz (véase cap. 17).

### PROBLEMAS

8-1. Haciendo referencia a la figura 8-3, demostrar que la fuerza restauradora que tiende a acelerar el carrito hacia la posición de equilibrio es proporcional a  $x^3$  para valores pequeños de  $x$ . Determinar la energía potencial para un valor arbitrario de  $x$  y trazar un diagrama energético.

8-2. La energía de oscilación en un oscilador de «pozo cuadrado» es  $H$ . Si es  $T$  el período, ¿cuál es la amplitud de la oscilación?

8-3. Comprobar que  $x = x_0 \cos \omega_0 t$ ,  $x = x_0 \sin \omega_0 t$ ,  $x = x_0 \cos (\omega_0 t + \phi)$  satisfacen todas a la ecuación diferencial (8-3) si  $\omega_0 = \sqrt{K/m}$ .

8-4. Una viga en voladizo desciende su extremo libre 2,5 cm cuando de él se cuelga un peso de una tonelada. ¿Cuál es la frecuencia de oscilación, despreciando la masa de la viga?

8-5. La frecuencia de oscilación de una molécula en movimiento térmico es de  $10^{13}$  Hz, aproximadamente. La masa es del orden de  $10^{-22}$  g. ¿Cuál es la constante del resorte equivalente?

8-6. Un cuerpo, colocado sobre un resorte vertical, lo comprime estáticamente 10 cm. ¿Cuál es la frecuencia característica de oscilación de este cuerpo sobre el resorte?

8-7. Considerando valores razonables para la masa de un coche y su período de oscilación vertical, estimar la constante de resorte eficaz de los muelles que actúan sobre sus cuatro ruedas.

8-8. Un cuerpo de 0,5 kg realiza un movimiento armónico al colocarlo en el extremo de un resorte. La pulsación característica es  $\omega_0 = 10 \text{ s}^{-1}$ . ¿Cuál es la constante del resorte? Si se desplaza el cuerpo 20 cm a partir de su posición de equilibrio y luego se suelta, ¿cuáles son los valores máximos (amplitudes) del desplazamiento, celeridad y aceleración del movimiento subsiguiente? ¿Cuáles son las energías total, potencial máxima y cinética máxima?

8-9. Un cuerpo de masa  $m$  se halla sobre un plano horizontal sin rozamiento y está sujeto a la unión de dos resortes horizontales de constantes  $K_1$  y  $K_2$ . Las

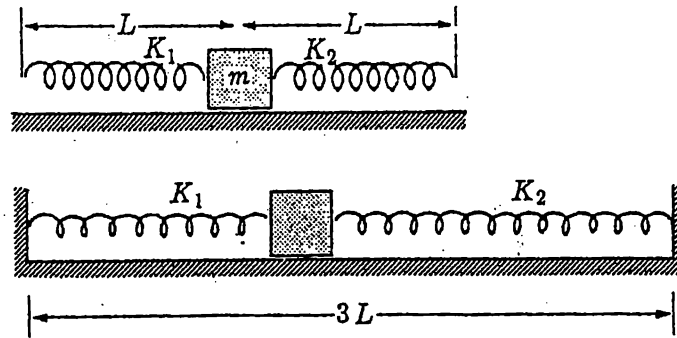


Figura 8-18

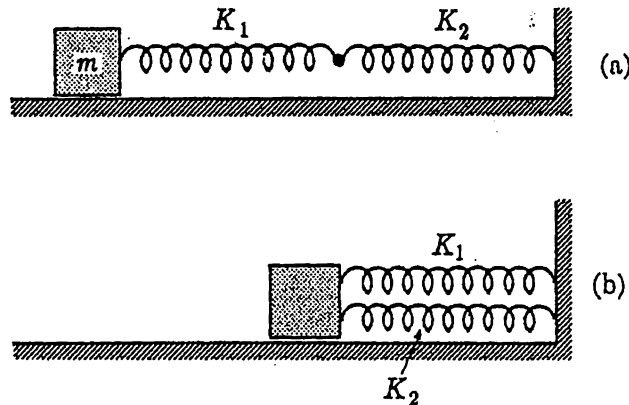


Figura 8-19

longitudes de los dos resortes indeformados son iguales e igual a  $L$ . Se tira de los extremos libres de los dos resortes y se sujetan a dos paredes fijas separadas  $3L$ , como se indica en la figura 8-18. (a) Determinar la posición de equilibrio del cuerpo. (b) ¿Cuál es la frecuencia de oscilación del cuerpo respecto a la posición de equilibrio?

8-10. Supongamos que un cuerpo de masa  $m$  está sujeto a dos resortes, en la forma indicada en la figura 8-19. ¿Cuál será la frecuencia de oscilación cuando los resortes están en (a) serie y (b) paralelo?

8-11. Supongamos que la energía potencial para valores pequeños de  $x$  es  $V = Ax^4$ . ¿Será armónico el movimiento oscilatorio correspondiente? ¿Cómo cree

Vd. que variará el período al variar la amplitud en estas oscilaciones?

8-12. En el diagrama de la figura 8-20 el resorte tiene masa despreciable y una longitud de 30 cm cuando está deformado. Un cuerpo de 2 kg unido al resorte puede moverse sobre una superficie plana horizontal. A dicho cuerpo se le ata un hilo que pasa por una polea sin rozamiento y del cual pende un peso de 4 kilogramos. El sistema se halla inicialmente en reposo en la posición representada y la longitud del resorte es de 40 centímetros. Se corta entonces el hilo y el cuerpo de 2 kg empieza a oscilar con movimiento armónico simple. (a) ¿Cuál es la amplitud de la oscilación? (b) ¿Cuál es el período de oscilación? (c)

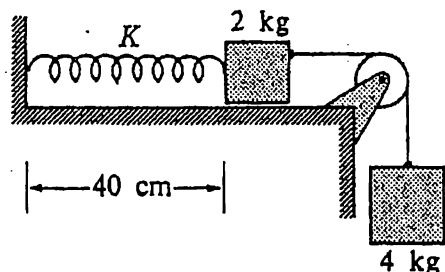


Figura 8-20

¿Cuál es la energía mecánica total del oscilador?

8-13. Demostrar que la celeridad media  $\bar{v}$  en un movimiento armónico es igual al producto de  $(2/\pi)$  por la celeridad máxima. Comprobar que el período de oscilación puede escribirse en la forma  $T_0 = 4x_0/\bar{v}$ , donde  $x_0$  es el desplazamiento máximo. Probar que  $T_0$  es independiente de  $x_0$ . Probar también que la energía cinética media (en el tiempo) es la mitad de la energía total.

8-14. Probar a partir de consideraciones energéticas que, en un oscilador armónico, la velocidad puede escribirse en la forma  $v = \omega_0 \sqrt{x_0^2 - x^2}$  y que el tiempo  $t$  puede expresarse en la forma  $t = \int dx / (\omega_0 \sqrt{x_0^2 - x^2})$ . Integrar esta ecuación y demostrar que sale  $x = x_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$ .

8-15. Una masa de 10 g oscila siguiendo la ley  $x = 10 \cos(\omega_0 t + \pi/4)$ , donde  $x$  viene expresada en centímetros y  $f_0 = \omega_0/2\pi = 20$  Hz. Hallar la posición y la velocidad de la masa oscilante en el instante  $t = 0$ . ¿Cuál es el valor de la constante  $K$  de la fuerza tipo resorte?

8-16. A un extremo de un resorte de constante  $K$  se une un bloque de madera de masa  $M$  que está en reposo sobre una mesa horizontal (despréciase el rozamiento). El otro extremo del resorte se mantiene fijo en la forma representada en la figura 8-21. Contra el bloque y en la dirección del resorte se dispara una bala de masa  $m$  que lleva una velocidad  $v$ . El

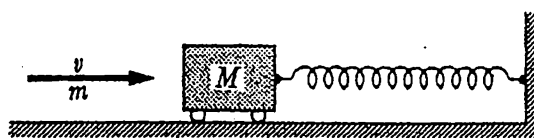


Figura 8-21

choque tiene lugar en un tiempo muy corto, con lo que puede considerarse que durante el choque el resorte mantiene su longitud natural de deformación nula. (a) ¿Cuál es la energía mecánica total de la oscilación subsiguiente? (b) ¿Cuál es la compresión máxima del resorte? (c) Aplicando los valores numéricos  $M = 1$  kg,  $m = 5$  g,  $v = 300$  m/s, y  $K = 400$  N/m, determinar numéricamente los resultados de (a) y (b). Indíquense las unidades.

8-17. Sobre una mesa horizontal, un cuerpo sujeto al extremo de un resorte realiza un movimiento armónico (despréciase el rozamiento) (Masa  $m = 0,5$  kg; constante del resorte  $K = 50$  N/m). La amplitud de oscilación es  $x_0 = 0,2$  m. Se aplica un impulso al oscilador con el fin de incrementar la amplitud al doble del valor dado. ¿Cuál sería la magnitud de dicho impulso si se aplica en el punto de desplazamiento máximo? ¿y en el punto de máxima velocidad? Discutir ambos casos.

8-18. Una barra delgada de madera de longitud  $l$  tiene un peso  $p$  en su extremo inferior, con lo que se mantiene vertical en el agua, teniendo sumergida la mitad de su longitud. Se desplaza verticalmente la barra a partir de su posición de reposo y luego se suelta. Estudiar el movimiento subsiguiente. ¿Cuál es el período de oscilación? Introducir símbolos para todas las cantidades que deban intervenir en la discusión. ¿Es lineal el oscilador para todas las amplitudes de oscilación?

8-19. Consideremos un cuerpo de masa  $m$  soportado por dos resortes iguales  $A$  y  $B$ , de constante  $K$  cada uno de ellos. Consideremos ahora los dos dispositivos de la figura 8-22. (a) Si los alargamientos estáticos, es decir, las variaciones de la posición de equilibrio del cuerpo originadas por su peso, en uno y otro caso, son  $x_1$  y  $x_2$ , determinar  $x_1/x_2$ . (b) ¿Cuál es la razón de las frecuencias de resonancia de uno y otro oscilador? (c) ¿Cuál es la razón de las energías mecánicas totales de los osciladores, si oscilan con la misma amplitud de desplazamiento?

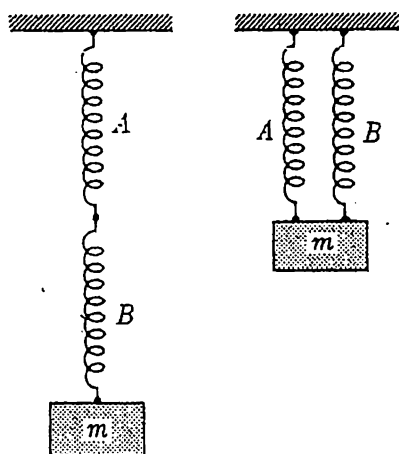


Figura 8-22

8-20. Una masa  $m$  situada al extremo de un resorte oscila con un desplazamiento dado por  $x = x_0 \sin \omega_0 t$ . Cuando la masa alcanza la posición  $x = x_0$  recibe un impulso instantáneo  $J$  en el sentido positivo de las  $x$ . Determinar la nueva expresión del desplazamiento, considerando las variaciones tanto de amplitud como de fase. El tiempo sigue midiéndose a partir del mismo origen que antes.

8-21. Un péndulo simple de longitud 2,5 m oscila con una amplitud de 30 cm medida a lo largo de la trayectoria circular de la lenteja del péndulo. (a) Calcular la velocidad del péndulo en su

posición más baja. (b) Calcular su aceleración en los extremos de su oscilación. (c) ¿Cuál es el período de oscilación?

8-22. Cuando se cuelga un cuerpo del extremo de un resorte vertical, éste se alarga estáticamente alcanzando una longitud doble que la inicial. Este sistema puede ponerse en oscilación de igual manera que un péndulo simple o un oscilador masa-resorte. ¿Cuál de las dos frecuencias correspondientes es mayor? ¿Cuál es la razón de las dos frecuencias?

8-23. Un péndulo y un oscilador masa-resorte tienen períodos iguales en la superficie terrestre. ¿Cuál sería la razón de sus períodos en un planeta en que los cuerpos pesen ocho veces más que en la Tierra?

8-24. De un punto común se suspenden masas de 10 g y 40 g mediante hilos muy ligeros de longitud 1,5 m. Se sueltan simultáneamente a partir de posiciones de  $5^\circ$  y  $10^\circ$ , como se indica en la figura 8-23. ¿Dónde y cuándo chocarán? Explicar y discutir brevemente la respuesta.

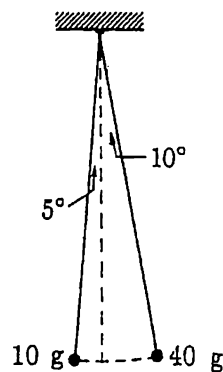


Figura 8-23

8-25. Se ha visto en el texto que el período de un péndulo simple no depende de la amplitud de oscilación, si son suficientemente pequeños los ángulos de excursión. Esta independencia no se tiene para amplitudes grandes. (a) El período del

péndulo, ¿aumentará o disminuirá al crecer la amplitud? Estudiar esta cuestión e ilustrar mediante un diagrama energético el movimiento de gran amplitud. (b) Haciendo referencia a la ecuación (7-10), obtener una expresión (integral) para el período del péndulo de gran amplitud. (c) Obtener una expresión análoga para el período del oscilador no lineal de la figura 8-3 del texto.

8-26. Dos cuerpos de masas  $m_1 = 1$  kilogramo y  $m_2 = 3$  kg pueden deslizarse libremente a lo largo de una recta sobre una superficie horizontal. Están unidas mediante un resorte de constante  $K = 300$  N/m y longitud natural  $L$ . Se comprime el resorte  $x_0 = 20$  cm a partir de la longitud natural (de deformación nula), y luego se sueltan los cuerpos de manera que su centro de masa permanezca en reposo. (a) ¿Cuál es la frecuencia de las oscilaciones subsiguientes? (b) ¿Cuál es la energía cinética máxima de  $m_1$  y  $m_2$ ?

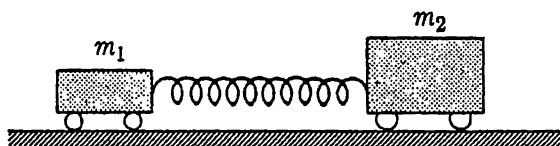


Figura 8-24

8-27. A los extremos de un resorte (de constante  $K$ ) de masa despreciable se unen dos masas  $m$  iguales, en reposo sobre una mesa exenta de rozamientos (figura 8-25). Se pone en movimiento el sistema comprimiendo el resorte una longitud  $d$ , con uno de los cuerpos apoyados contra una pared, y luego se suelta el sistema partiendo del reposo. (a) ¿Qué distancia recorrerá el cuerpo 1 antes de que empiece a moverse el cuerpo 2? (b) Después de perder contacto el cuerpo 2 con la pared, ¿cuál es la velocidad del centro de masa del sistema y cuál es la amplitud de oscilación?

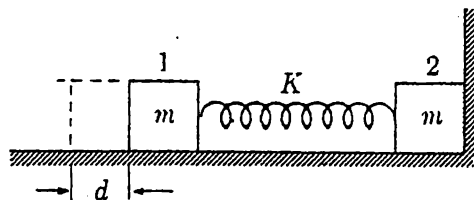


Figura 8-25

8-28. Probar que la expresión (8-18) para oscilaciones amortiguadas satisface la ecuación del movimiento (8-17).

8-29. De un resorte de constante 100 N/m se cuelga un cuerpo de masa 1 kg. (a) ¿Cuál es la frecuencia de oscilación? (b) Después de 30 períodos se observa que la amplitud de las oscilaciones se ha reducido a  $1/e$  de la amplitud inicial. ¿Cuánto vale  $Q$ ? ¿Cuál es la vida del oscilador? (c) ¿Cuánto vale el coeficiente  $R$  que relaciona la fuerza amortiguadora con la velocidad? (d) Si se iniciaron las oscilaciones desplazando la masa 10 cm a partir de su posición de equilibrio, ¿qué valor tienen las verdaderas fuerzas amortiguadoras?

8-30. Consideremos una masa en el extremo de un resorte, realizando oscilaciones libres amortiguadas. Consideremos amortiguamiento pequeño. ¿Cuál será entonces el impulso total suministrado en medio período (desde  $-x_0$  a  $+x_0$ ) (a) por la fuerza del resorte? (b) por la fuerza de rozamiento  $F_f = -R(dx/dt)$ ? (c) Estudiar cualitativamente la modificación, si la hay, de las respuestas a (a) y (b) si se suprime la restricción de amortiguamiento débil.

8-31. Consideremos un oscilador poco amortiguado. Demostrar que la variación fraccionaria de la energía total en un período es  $2\pi/Q$ .

8-32. Consideremos un oscilador armónico con amortiguamiento. Probar que la relación  $dH/dt = -(2R/m)E$ , donde  $H$  es la energía total y  $E$  la energía ci-



nética. (Sugerencia. Partir de  $m(dv/dt) = -Kx - Rv$  y multiplicar los dos miembros por  $v = dx/dt$ ).

8-33. (a) Consideremos un resorte (de constante  $K$ ) fijo por un extremo y accionado por el otro de manera que  $x = x_0 \cos \omega t$  (véase Fig. 8-26). ¿Cuál debe ser la fuerza accionadora  $F_1$ ? (b) Se aplica a un cuerpo de masa  $m$  una fuerza  $F_2$  tal que se mueva aquél con el mismo movimiento de (a),  $x = x_0 \cos \omega t$ . ¿Cuál es  $F_2$ ? (c) Se une ahora la masa  $m$  de (b) al resorte de (a) y masa y resorte se hallan accionados por una fuerza  $F_3$  tal que  $x = x_0 \cos \omega t$ . ¿Cuál es  $F_3$ ? (d) Si es  $\omega_0 = \sqrt{K/m}$ , la pulsación de accionamiento de (c), ¿cuál será la fuerza  $F_3$  necesaria para mantener dicha oscilación? (e) A frecuencias mucho mayores que la de  $\omega_0$ , el sistema de (c) se comporta aproximadamente como el de (a) o de (b). ¿Cómo cuál? Explíquese.

8-34. Sobre una plataforma horizontal reposa un bloque de madera. La plataforma se mueve verticalmente con un desplazamiento  $y = y_0 \cos \omega t$ , donde  $y_0$  es 3 cm y  $\omega$  puede variarse. (a) Hallar la fuerza que ejerce la plataforma sobre el bloque en función de la frecuencia  $f = \omega/2\pi$ . (b) ¿A qué frecuencia abandonará la mesa el bloque?

8-35. Una plataforma de 50 kg está soportada por resortes que reposan sobre unos cimientos. La frecuencia característica de oscilación es 10 Hz. La plataforma está accionada por una fuerza armónica vertical de amplitud 25 N. ¿Cuán-

les son las amplitudes del desplazamiento de la plataforma y de la fuerza que ejercen los resortes sobre los cimientos cuando la frecuencia de accionamiento es de 1 Hz? ¿9 Hz? ¿10,5 Hz? ¿20 Hz? Despréciase el amortiguamiento.

8-36. Hallar la potencia instantánea entregada por la fuerza aplicada a una masa  $m$  si ésta no tiene otras fuerzas que actúen sobre ella y se mueve de manera que  $x = x_0 \cos \omega t$ . A continuación, supóngase que  $m$  está unida a un resorte de constante  $K$ . ¿Cuál es, entonces, la potencia instantánea? ¿Existe alguna energía total suministrada durante un período?

8-37. Un péndulo balístico consta de un bloque de madera de 10 kg suspendido de un hilo de 3 m de longitud. (a) ¿Cuál es el período  $T$  del movimiento oscilatorio? (b) Estando el péndulo en reposo en su posición de equilibrio, es alcanzado por una bala de masa 5 g que se mueve a 200 m/s. ¿Cuál es la amplitud del movimiento oscilatorio resultante? (c) Si se dispara una bala cada  $T$  segundos, poner de manifiesto cómo aumenta la amplitud del movimiento con el tiempo. Esquemáticase el movimiento. (d) ¿Cuál será el movimiento si se dispara una bala cada  $T/2$  segundos? ¿cada  $3T/2$  segundos? (e) Si está oscilando el péndulo, ¿cuándo habría que dispararle una bala para cederle la máxima energía de oscilación posible adicional?

8-38. Consideremos el movimiento forzado de un oscilador lineal. La fuerza de rozamiento es proporcional a la velo-

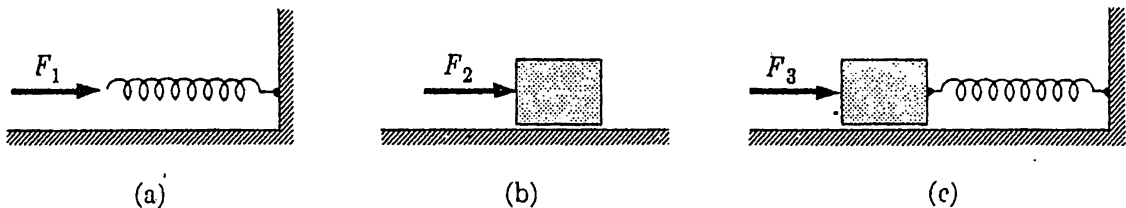


Figura 8-26

cidad y la constante de proporcionalidad es  $R$ . Si es  $F_0$  la amplitud de la fuerza aplicada, demostrar que la amplitud  $v_0$  de la velocidad está dada por  $v_0 = F_0 / \sqrt{R^2 + X^2}$ , donde  $X = \omega m - K/\omega$ .

8-39. En el texto, y en el estudio del movimiento forzado, se citaba un caso en el cual es oscilador masa-resorte estaba accionado por una fuerza aplicada a la masa cuando se mantenía fijo uno de los extremos del resorte. Consideremos ahora el movimiento resultante cuando, en vez de mantenerlo fijo, el extremo (sin masa) del resorte es forzado a moverse con un desplazamiento  $x_0 \sin \omega t$ . (a) ¿Cuál es entonces el desplazamiento de la masa  $m$  situada al otro extremo del resorte? Probar que este desplazamiento

es el mismo que el que resultaría si se aplicara a la masa la fuerza  $Kx_0 \sin \omega t$  cuando se mantuviera fijo el otro extremo del resorte. (b) Si es  $f_0$  la frecuencia característica del oscilador, ¿cuál es la amplitud de la oscilación cuando  $f = f_0/2$ ? (c) ¿A qué otra frecuencia será la amplitud igual a la de (b)? (d) ¿Qué fuerza se requiere en el extremo libre del resorte, para mantener en dicho punto el desplazamiento  $x = x_0 \sin \omega t$ ?

8-40. Demostrar la relación (8-23) del texto [*Sugerencia.* La potencia es el valor medio, en el tiempo, de  $Fv = -F_0 \cos(\omega t + \phi) v_0 \sin \omega t = -F_0 v_0 (\cos \omega t \cos \phi - \sin \omega t \sin \phi) \sin \omega t$ . Hallar los valores medios en el tiempo de los términos  $\sin \omega t \cos \omega t \cos \phi$  y  $\sin^2 \omega t \sin \phi$ .]

## MOMENTO CINÉTICO

*Resumen.* Cuando sobre una partícula se ejerce una fuerza central, es decir, dirigida siempre hacia un punto fijo en el espacio apuntando hacia él o en sentido contrario, el momento cinético de la partícula permanece constante. Introducimos el momento cinético de una partícula a través de un estudio de las propiedades del movimiento plano de una partícula accionada por una serie de impulsos centrales instantáneos. Se formula el principio de conservación del momento cinético y se extiende a un sistema de dos o más partículas que interactúan centralmente, incluyendo los cuerpos rígidos. Se estudia luego la naturaleza vectorial del momento cinético y se divide en dos partes el momento cinético total de un sistema de partículas: el momento cinético orbital que resulta del movimiento de traslación del sistema y del momento cinético de giro que resulta del movimiento respecto al centro de masa. Por último, estudiaremos la variación de momento cinético producida por fuerzas e impulsos exteriores y se introduce el concepto de momento de un par como velocidad de variación del momento cinético.

Los principios de conservación juegan un papel fundamental en la Física. Hasta ahora hemos estudiado los principios de conservación de la cantidad de movimiento, de la masa y de la energía. Estos principios de conservación son importantes, no sólo porque constituyen enunciados muy generales acerca de la Naturaleza, sino porque también ofrecen soluciones rápidas a problemas específicos permitiendo, al mismo tiempo, soluciones parciales o la comprensión parcial de problemas y fenómenos muy complicados. En este capítulo desarrollaremos otro principio de conservación: la conservación del momento cinético.

Si dos o más partículas sólo se ejercen interacciones entre ellas, su cantidad de movimiento total permanece constante. Hemos supuesto que este principio de conservación es aplicable a todos los tipos de interacción y exige que las fuerzas mutuas de interacción entre dos partículas cualesquiera sean de igual magnitud y directamente opuestas. Aun cuando las orientaciones relativas de las dos fuerzas de interacción (que constituyen un *par de fuerzas*) quedan establecidas de esta manera por el principio de conservación de la cantidad de movimiento, no se impone ninguna restricción a la orientación absoluta del par de fuerzas.

Las fuerzas deben ser paralelas, pero pueden estar dirigidas a lo largo de la recta que une las partículas o en una dirección arbitraria del espacio. No obstante, la experiencia nos indica que la mayoría de las fuerzas de interacción son *centrales*, es decir, dirigidas a lo largo de la recta que une los cuerpos en interacción. A consecuencia de esta propiedad de las fuerzas de interacción encontraremos que, además de la cantidad de movimiento, se conserva otra cantidad llamada *momento cinético*. La cantidad de movimiento se refiere al movimiento de traslación, mientras que el momento cinético se refiere al movimiento de rotación del sistema. Las fuerzas gravitatorias y electrostáticas son, tal vez, los ejemplos de fuerzas centrales más importantes y que nos son más familiares.

**9-1 Fuerza central ejercida sobre una partícula. Conservación del momento cinético.** En la introducción al estudio del momento cinético convendrá considerar el movimiento de una partícula sometida a una fuerza central dirigida siempre hacia un punto fijo del espacio. Este caso representa una interacción central entre dos partículas, cuando una de ellas se considera en reposo. El movimiento de la Tierra descrito respecto a un sistema de coordenadas solidario al Sol, constituye un ejemplo. Análogamente, el movimiento de la Luna visto desde un sistema de coordenadas solidario a la Tierra y el movimiento de un cuerpo sujeto al extremo de un resorte fijo a la Tierra son ejemplos de movimientos debidos a fuerzas centrales.

En el estudio del movimiento de proyectiles en el campo gravitatorio terrestre *local*, es muy natural y conveniente utilizar un sistema de coordenadas cartesianas ( $x, y$ ) ya que el peso es la única fuerza que se ejerce sobre el proyectil y puede expresarse en función de una sola componente ( $F_y = -mg$ ). Por análoga razón, suele ser más conveniente utilizar un sistema de coordenadas polares (véase el cap. 7) cuando la fuerza que se ejerce sobre el cuerpo es central, es decir,

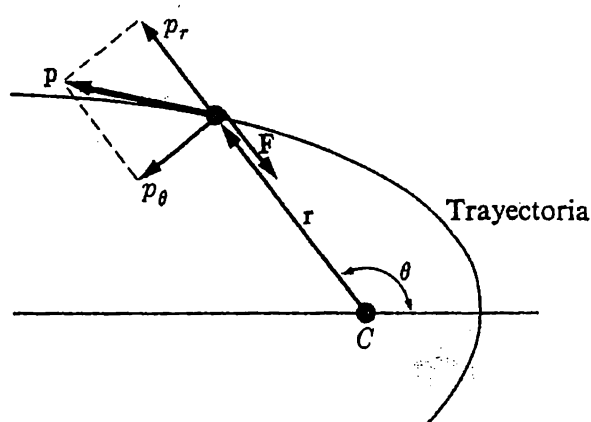


Fig. 9-1. Coordenadas polares y componentes radial y transversa de la cantidad de movimiento.

dirigida según el vector de posición  $r$ . Entonces, en vez de un estudio en función de las componentes  $x$  e  $y$  de la cantidad de movimiento de un cuerpo, consideraremos las componentes de la cantidad de movimiento en las direcciones  $r$  y  $\theta$  (véase fig. 9-1).

Ahora, en el caso del movimiento de proyectiles, en el que se utilizan coordenadas cartesianas, la componente  $x$  de la cantidad de movimiento es constante porque la fuerza sólo tiene componente  $y$ . En el caso de una fuerza central, sólo hay componente de la fuerza en la dirección  $r$  y esto sugiere, por analogía, que existirá una propiedad del movimiento que permanece constante al expresarlo en coordenadas polares.

Podríamos pensar que como  $F_\theta = 0$ ,  $p_\theta$  es constante. Sin embargo, es fácil ver que dicha hipótesis es errónea. Si  $p_\theta$  debe ser constante habiendo una fuerza central, también deberá ser constante en el caso particular en que dicha fuerza sea nula. Si la fuerza es nula, el punto material deberá moverse a lo largo de una recta con cantidad de movimiento constante. No se pierde generalidad si, como, en la figura 9-2, tomamos el eje  $y$  paralelo a la trayectoria rectilínea. Tenemos entonces,  $p_x = 0$ ,  $p_y = p$ . Según la figura, las componentes *polares* de la cantidad de movimiento son

$$p_\theta = p \cos \theta = p \frac{d}{r}, \quad p_r = p \sin \theta, \quad (9-1)$$

donde  $d$  es la distancia del punto de referencia  $O$  a la trayectoria rectilínea. Vemos que  $p_\theta$  no es constante. En efecto, cuando el punto material se mueve hacia el infinito ( $r \rightarrow \infty$ ),  $p_\theta$  tiende a cero y  $p_r$  tiende a  $p$ . Sin embargo, observemos

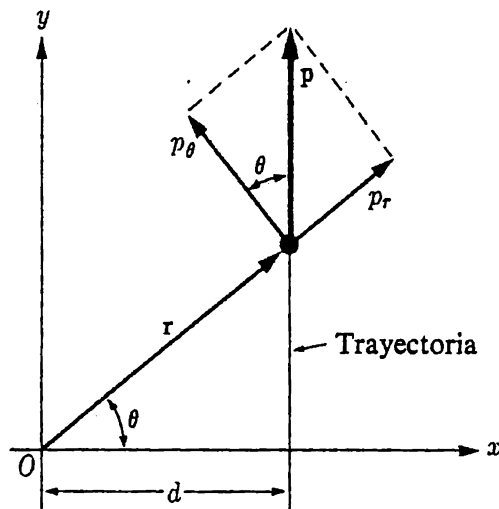


Fig. 9-2. El punto material se mueve sin estar sometido a la influencia de fuerza alguna. La cantidad de movimiento tiene componentes  $p_r$  y  $p_\theta$ .

que  $p_\theta$  varía de una manera muy sencilla y que el producto

$$p_\theta r = pd \quad (9-2)$$

permanece constante e igual al producto de la cantidad de movimiento  $p$  por la distancia del punto de referencia a la trayectoria rectilínea. A la distancia  $d$  le llamaremos frecuentemente *brazo de palanca* de  $p$ . Resulta claro inmediatamente que se obtendría el mismo resultado si el eje  $y$  no fuera paralelo a la trayectoria rectilínea, sino que ésta tuviera una dirección arbitraria en el plano, manteniéndose a una distancia  $d$  del punto de referencia  $O$ . El producto  $p_\theta r$  seguirá siendo constante e igual a  $pd$ .

Ahora ya podemos considerar el efecto de una fuerza central o, específicamente, de un impulso central instantáneo. No podemos esperar, ciertamente, que  $p_\theta$  permanezca constante, porque, según hemos visto, no es constante ni en ausencia de fuerzas. Pero, examinemos  $p_\theta r$ , y determinemos el efecto de un impulso central sobre esta cantidad.

En la figura 9-3 puede verse la trayectoria de un punto material que ha sido sometido a un impulso *central instantáneo*  $J$  en el punto  $A$ . La cantidad de movimiento inicial del punto material es  $p_1$  y su cantidad de movimiento final es  $p_2$ . Hemos visto (fig. 9-2) que  $p_{1\theta}r$  es constante e igual a  $p_1d_1$  a lo largo del camino 1, y  $p_{2\theta}r$  es constante e igual a  $p_2d_2$  a lo largo del camino 2, ya que a lo largo de estos caminos no hay fuerzas que actúen sobre el punto material. Debemos contestar ahora a la siguiente pregunta: ¿es posible que  $p_1d_1$  y  $p_2d_2$  sean iguales? Por ser  $J$  un impulso *instantáneo*, el vector de posición  $r_a$  (y el ángulo polar  $\theta_a$ ) del punto material es el mismo inmediatamente antes e inmediatamente después de aplicar el impulso. Como  $J$  es un impulso *central*, la componente  $\theta$  de la cantidad de movimiento  $(p_{1\theta})_a$ , inmediatamente antes del impulso debe ser igual a la  $(p_{2\theta})_a$  inmediatamente después. Por tanto,  $(p_{1\theta})_a r_a = (p_{2\theta})_a r_a$ . Pero hallamos antes que para todos los puntos del camino 1, teníamos  $p_{1\theta}r = p_1d_1$  y, en consecuencia,  $(p_{1\theta})_a r_a = p_1d_1$ . Análogamente, a lo largo del camino 2, tenemos  $p_{2\theta}r = p_2d_2$ , por lo que  $(p_{2\theta})_a r_a = p_2d_2$ . Se deduce que  $p_1d_1 = p_2d_2$ ; es decir, el impulso central en  $A$  no altera el valor de la cantidad  $p_\theta r$ .

Evidentemente, podemos repetir el mismo razonamiento para un número arbitrario de impulsos centrales  $J_1, J_2, J_3$ , etc., todos dirigidos hacia  $O$  pero aplicados en diferentes puntos  $A, B, C$ , etc., tales que la trayectoria consiste en una sucesión de segmentos rectilíneos, como se indica en la figura 9-4. La separación temporal de esos impulsos puede hacerse arbitrariamente pequeña, con lo que, en principio, podemos simular una fuerza central que se ejerce continuamente. Así, llegamos a la conclusión de que una fuerza central aplicada continuamente a una partícula no altera la cantidad  $p_\theta r = pd$ . A esta cantidad se le da el nombre de *momento cinético*  $l$ , y

$$l = p_\theta r = pd \quad (9-3)$$

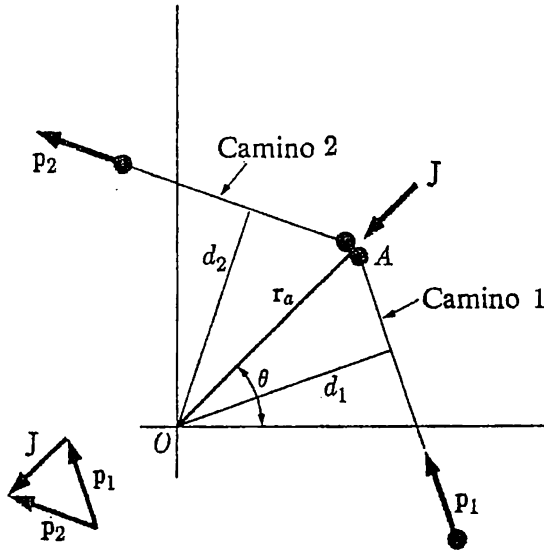


Fig. 9-3.  $J$  es un impulso *central instantáneo* y  $p_2 = p_1 + J$ . El momento cinético  $p_1 d_1$  es igual a  $p_2 d_2$ , y, por tanto, queda inalterado por el impulso.

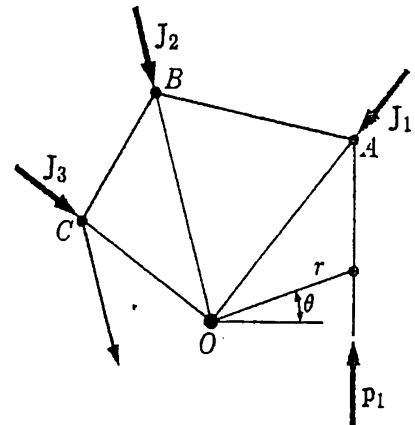


Fig. 9-4. Movimiento resultante de una serie de impulsos centrales.

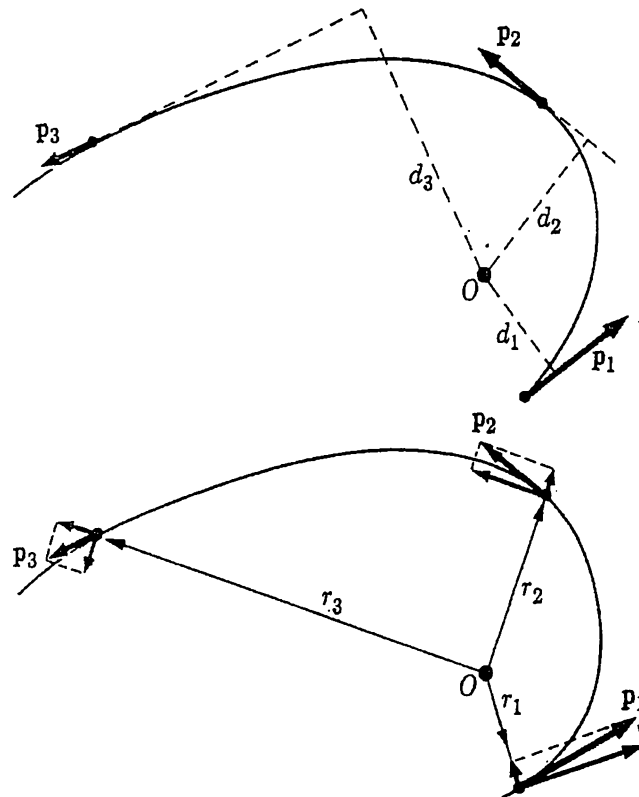


Fig. 9-5. Sobre el punto material se ejerce continuamente una fuerza central. El momento cinético  $p r = p d$  es constante para todos los puntos de la trayectoria.

A veces conviene expresar el momento cinético en función de la velocidad angular  $\omega = d\theta/dt$  respecto al centro de fuerzas  $O$ . La componente transversa de la velocidad es  $v_\theta = r(d\theta/dt) = r\omega$ , y así, según (9-3) podremos expresar el momento cinético en la forma

$$l = (mr^2)\omega \quad (9-4)$$

Obsérvese bien que el momento cinético está referido a un punto determinado del espacio. Si dicho punto es el centro de fuerzas, es decir, el punto hacia el cual están dirigidos los impulsos centrales o la fuerza central que se ejercen sobre la partícula, el momento cinético se conserva.

Desde luego, las dimensiones y unidades del momento cinético son diferentes de las de la cantidad de movimiento. El momento cinético, por ser el producto de una cantidad de movimiento por una distancia, tiene por dimensiones  $[M][L]^2[T]^{-1}$  y la unidad en el sistema Giorgi es el  $\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ .

Las velocidades angulares correspondientes a los dos sentidos de rotación posibles en el plano de movimiento se distinguen mediante los signos positivo y negativo. Análogamente, el momento cinético puede considerarse positivo o negativo de igual manera que  $\omega$ .

**EJEMPLO 1.** Un disco de 1,5 kg suspendido por aire, desliza sobre una superficie horizontal. Al disco se le ata un hilo ligero. Al llegar el disco a  $A$  se le da un impulso hacia  $O$  por medio de una tracción brusca al hilo que pasa a través de un anillo situado en  $O$ , como se indica en la figura 9-6. En el punto  $B$  se aplica otro impulso. El análisis de este movimiento enseña que la celeridad antes del impulso en  $A$  era  $v_1 = 1,38 \text{ m/s}$  y el brazo de palanca  $d_1 = 0,6 \text{ m}$ , con lo que el momento cinético era  $l_1 = mv_1d_1 = 1,24 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ . Análogamente, la celeridad y el brazo de palanca entre  $A$  y  $B$  son  $v_2 = 1,5 \text{ m/s}$  y  $d_2 = 0,55 \text{ m}$ , respectivamente, siendo el momento cinético  $l_2 = 1,23 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ . De igual manera hallamos que más allá de  $B$  es  $mv_3d_3 = 1,22 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ . Así, pues, dentro de los errores de medida, hallamos que el momento cinético es el

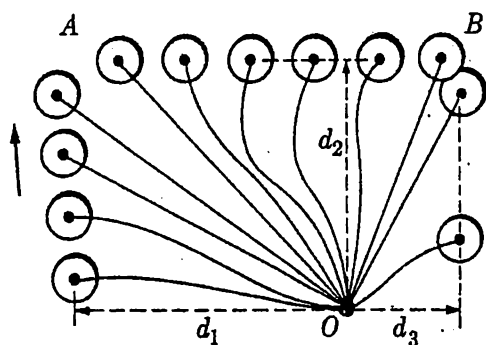


Fig. 9-6. Experimento ilustrativo de la conservación del momento cinético.

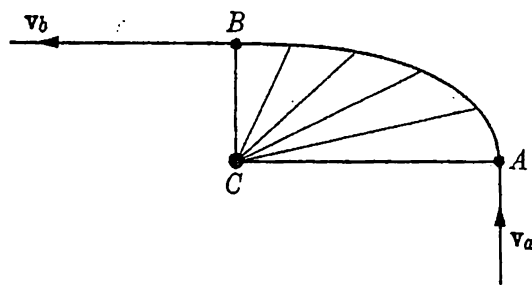


Figura 9-7



mismo en todos los puntos del movimiento. Este resultado era de esperar en vista del análisis anterior mientras sobre el movimiento del disco no influyan más fuerzas que las tracciones hacia  $O$ . A partir de los resultados experimentales anteriores resulta claro que el efecto del rozamiento sobre el disco no es suficiente para afectar, en forma importante, al momento cinético del disco.

**EJEMPLO 2.** Una persona de 80 kg se desliza sobre una superficie horizontal sin rozamiento con una velocidad  $v_a = 3$  m/s. Una cuerda estirada tiene una longitud  $d = 2$  m y tiene un extremo unido a un anillo que puede deslizar sin rozamiento alrededor de un poste situado en  $C$ . La persona agarra el otro extremo de la cuerda en el punto  $A$  (véase fig. 9-7) y mientras gira la trayectoria de la persona (interactúa con el poste a través de la cuerda), va tirando de la cuerda hasta quedar a una distancia  $d/2 = 1$  m del poste. Cuando la dirección de su velocidad es perpendicular a su velocidad inicial, suelta la cuerda. ¿Cuál es entonces la velocidad de la persona?

No hemos de analizar en detalle el movimiento espiral de la persona. Ésta sólo ejerce interacción con el poste (fuerza central) y, por tanto, su momento cinético respecto a  $C$  debe mantenerse constante. Se conoce su momento cinético en el punto  $A$  (y antes de  $A$  por lo dicho, ya que se dan  $v_a$  y  $d_a$ ) y se tiene  $l_a = p_a d_a = 3 \cdot 80 \cdot 2 = 480$  kg·m<sup>2</sup>/s. En el punto  $B$ , tenemos  $d_b = 0,5d_a$ , y de  $p_b d_b = l_b = l_a$ , encontramos que  $p_b = 2p_a$ . Así,  $v_b = 2v_a = 6$  m/s.

Obsérvese que la energía cinética de la persona se ha cuadruplicado, mientras que su velocidad se ha duplicado. (¿De dónde ha sacado esta energía?)

**EJEMPLO 3.** Un satélite terrestre de masa  $m$  recorre una órbita elíptica. Sus distancias máxima y mínima a la superficie terrestre son 2555 km y 352 km, respectivamente. La velocidad máxima es 29 737 km/h. ¿Cuáles son las velocidades en  $r = r_{\min}$  y  $r = r_{\max}$ ? El radio terrestre es igual a 6382 km.

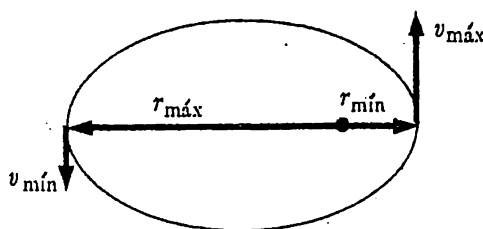


Figura 9-8

Como el satélite se mueve bajo la acción de una fuerza central (gravedad), su momento cinético permanecerá constante. Por tanto, cuando  $r$  sea pequeño, la velocidad deberá ser grande. Como en una órbita elíptica la velocidad  $v$  es perpendicular al vector de posición en  $r = r_{\min}$  y  $r = r_{\max}$ , el momento cinético constante del movimiento es

$$l = mv_{\max}r_{\min} = mv_{\min}r_{\max}$$

Con un radio terrestre de 6382 km, tenemos  $r_{\max} = 6382 + 2555 = 8937$  km y  $r_{\min} = 6382 + 352 = 6734$  km. Para  $v_{\min}$ , tenemos

$$v_{\min} = \frac{r_{\min}}{r_{\max}} v_{\max} = \frac{6734}{8937} \cdot 29\,737 = 22\,406 \text{ km/h}$$

*Velocidad areolar.* Una de las tres leyes empíricas de KEPLER (véanse caps. 1 y 10) dice que en el movimiento planetario el radio vector del Sol a un planeta cualquiera barre áreas iguales en tiempos iguales. Al área barrida en unidad de tiempo se le suele llamar *velocidad areolar*. Es fácil demostrar que la ley de KEPLER que enuncia la constancia de la velocidad areolar es equivalente al principio de conservación del momento cinético, aplicado al movimiento de un planeta alrededor del Sol. Esto significa que la fuerza que se ejerce sobre el planeta es central, es decir, dirigida hacia el Sol en todo momento durante el movimiento.

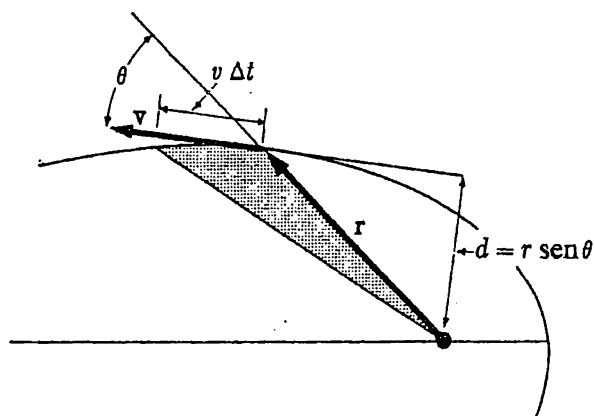


Fig. 9-9. La velocidad areolar  $rv_{\theta}/2 = r^2\omega/2$ , es proporcional al momento cinético. Cuando un punto material se mueve bajo la influencia de una fuerza central, el radio vector barre áreas iguales en tiempos iguales.

Para ver la relación existente entre la velocidad areolar y el momento cinético, consideremos la figura 9-9. Calculemos el área barrida por el radio vector, que va del punto central de referencia hasta el cuerpo, en un tiempo pequeño  $\Delta t$ . En este tiempo, el planeta ha recorrido una distancia  $v \Delta t$  y el radio vector habrá girado un ángulo  $\Delta \theta$ . El área triangular correspondiente girada por el radio es, pues,  $(v \Delta t)(r \sin \theta)/2$ , y la velocidad areolar media durante este tiempo  $\Delta t$  será, pues,  $(vr \sin \theta)/2$ , que puede ponerse en la forma  $v_{\theta}r/2$ , donde  $v_{\theta} = v \sin \theta$ , o bien, con  $v_{\theta} = r\omega$ , tenemos

$$\text{Velocidad areolar} = \frac{rv_{\theta}}{2} = \frac{1}{2}r^2\omega$$

Así pues, vemos que la velocidad areolar es proporcional al momento cinético  $l = mr^2\omega$  de la partícula; en efecto,

$$\text{Velocidad areolar} = \frac{l}{2m} \quad (9-5)$$

**9-2 Conservación del momento cinético de dos o más partículas que se ejercen interacciones en un plano.** En el apartado anterior hemos supuesto la existencia de una fuerza central que se ejerce sobre una partícula y no nos preocupábamos de qué era lo que originaba dicha fuerza. El movimiento supuesto era, digamos, planetario o de satélite, o el movimiento de un cuerpo situado al extremo de un resorte sujeto a la Tierra. En tales casos es razonable suponer que uno de los cuerpos en interacción está en reposo (el Sol en el movimiento planetario y la Tierra en el movimiento del satélite y en el del resorte), ya que puede considerarse que tiene una masa infinitamente mayor que la de la partícula móvil. En cambio, cuando las masas de las dos partículas en interacción son del mismo orden de magnitud, deberemos considerar el movimiento de las dos partículas.

Si la interacción entre las dos partículas es central, las fuerzas que se ejercen sobre las dos partículas pasan por el centro de masa del sistema, y si es nula la cantidad de movimiento total del sistema, su centro de masa estará en reposo. Cada partícula se mueve entonces bajo la influencia de una fuerza central dirigida hacia un punto fijo del espacio (el centro de masa). De nuestro estudio anterior se deduce que el momento cinético de cada partícula y, por tanto, el momento cinético total, que es la suma de los distintos momentos cinéticos, se conserva.

Consideremos dos partículas de masas  $m_a$  y  $m_b$ , unidas por un resorte, como se indica en la figura 9-10. Supongamos que se estira el resorte y que al soltar el sistema dejándolo mover en un plano, gira. Además de las oscilaciones, las partículas tendrán un movimiento orbital alrededor del centro de masa estacionario. Si en un momento dado son  $r_a$  y  $r_b$ , las distancias del centro de masa a una y otra partícula, el momento cinético total del sistema podrá expresarse en la forma  $L = p_{\theta a}r_a + p_{\theta b}r_b$ . Como el centro de masa está en reposo, tenemos  $p_{\theta a} = p_{\theta b} = p_{\theta}$ , y el momento cinético total se reduce a

$$L = p_{\theta}(r_a + r_b) = p_{\theta}d$$

La cantidad  $d = r_a + r_b$  es, desde luego, la separación de las dos partículas.

Como la recta que une las dos partículas pasa siempre por el centro de masa, las velocidades angulares de las dos partículas deberán ser iguales  $\omega_a = \omega_b = \omega$ . Por tanto, utilizando la ecuación (9-4), encontramos que el momento cinético total del sistema podrá expresarse en la forma

$$L = (m_a r_a^2 + m_b r_b^2)\omega = I^0\omega \quad (9-6)$$

La cantidad

$$I^0 = m_a r_a^2 + m_b r_b^2 \quad \text{— nonic}$$

es el momento de inercia del sistema respecto al centro de masa. En general, esta cantidad varía durante el movimiento ya que varían  $r_a$  y  $r_b$ . Sólo en el caso particular en que, como en el caso del cuerpo rígido, se mantiene constante la distancia entre las dos partículas, el momento de inercia y la velocidad angular

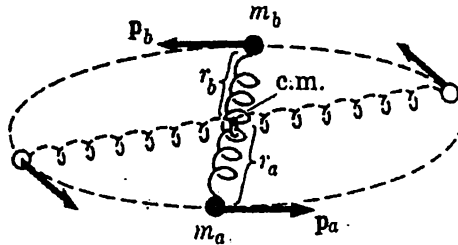


Fig. 9-10. Combinación de oscilación y rotación de dos partículas unidas por un resorte.

se mantendrán constantes. Sin embargo, cuando varíe  $I^0$  también variará la velocidad angular de manera que mantenga constante el momento cinético. Cuando se alarga el resorte, con lo que  $d$  es grande, la velocidad angular es pequeña, y recíprocamente.

En la figura 9-11 se ha representado una experiencia que pone de manifiesto este comportamiento. El sistema es un hombre que sostiene dos pesas y se halla de pie sobre una plataforma que gira alrededor de un eje vertical. Las masas  $m_a$  y  $m_b$  del estudio anterior están representadas por las pesas y el resorte está representado por el hombre, el cual puede variar el momento de inercia del sistema acercando o alejando de su cuerpo las pesas. El hombre puede regular entonces la velocidad angular con ayuda de las pesas; cuando mantiene sus brazos en cruz, la velocidad angular es pequeña y cuando acerca las pesas a su cuerpo, su velocidad angular aumenta.

El principio de conservación del momento cinético tendría validez limitada si no se pudiera extender a los cuerpos reales. Todo cuerpo real puede considerarse como un sistema de partículas. Una partícula de dicho sistema puede estar sometida a fuerzas de dos tipos. Primero, fuerzas internas centrales resultantes de la interacción con otras partículas del sistema. Segundo, fuerzas exteriores debidas a partículas que no pertenecen al sistema. De momento vamos a eliminar estas últimas ampliando el sistema de manera que contenga *todas* las partículas que ejerzan interacciones con el sistema de interés. Desde luego, en el caso de tres o más partículas, la fuerza que se ejerce sobre una partícula única no tiene

por qué pasar por el centro de masa del sistema. Aun cuando posteriormente trataremos con más detalle este problema, podemos señalar que, efectivamente, la conservación del momento cinético también es aplicable a un conjunto de partículas, con tal que las interacciones mutuas entre partículas sean centrales. Para ilustrar esta aseveración, consideremos dos partículas  $P_1$  y  $P_2$  en un sistema plano (fig. 9-12). Supongamos que  $P_1$  ejerce sobre  $P_2$  un impulso instantáneo  $J_{21}$ . A consecuencia de ello,  $P_2$  adquirirá una cantidad de movimiento adicional  $J_{21}$  dirigida hacia  $P_1$ , y un momento cinético  $J_{21}D$  respecto al punto de referencia  $O$ , donde  $D$  es el brazo de palanca del impulso. No obstante, la propiedad general de las fuerzas de interacción, deducida de la conservación de la cantidad de movimiento, exige que sobre  $P_1$  se ejerza un impulso igual y opuesto  $J_{12} = -J_{21}$  a causa de la interacción con  $P_2$ . Entonces,  $P_1$  recibirá una variación  $J_{12}$  de canti-

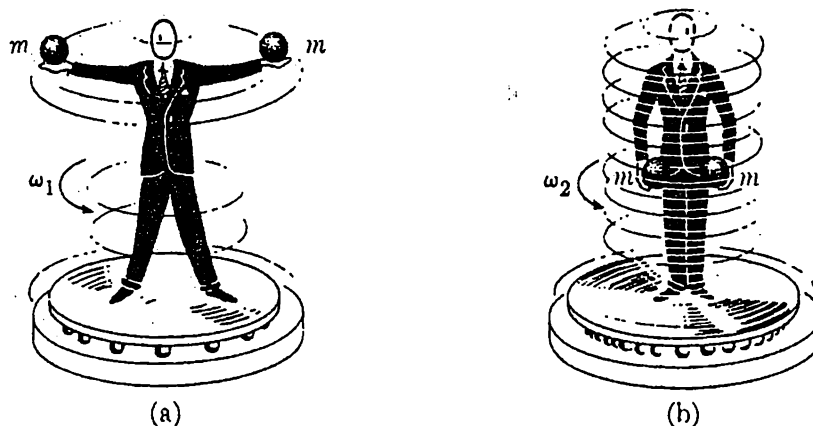


Fig. 9-11. Conservación del momento cinético.

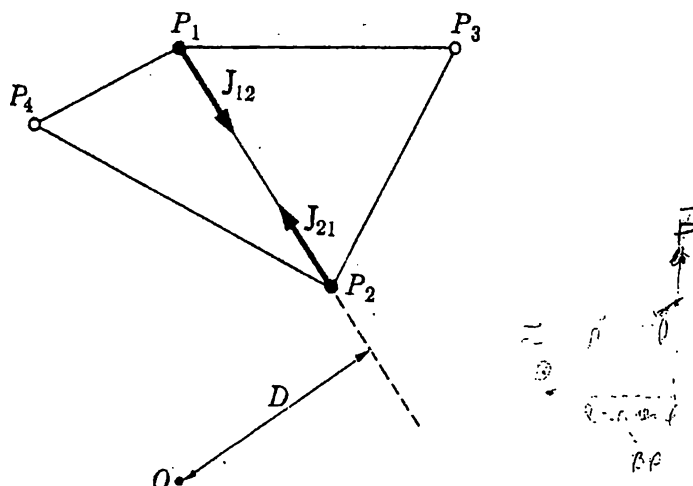


Fig. 9-12. Las fuerzas de interacción central entre las partículas de un sistema no alteran el momento cinético total de éste.

dad de movimiento hacia  $P_2$  y un momento cinético de magnitud  $J_{12}D$ . Como  $J_{12} = -J_{21}$ , se deduce que el momento cinético cedido por  $P_1$  a  $P_2$  es de igual magnitud, pero de signo contrario al cedido por  $P_2$  a  $P_1$ . Por tanto, la interacción entre  $P_1$  y  $P_2$  no alterará el momento cinético total del sistema. A cualquier par de partículas del sistema se podrá aplicar un razonamiento análogo y encontramos así que el momento cinético total se mantiene constante cuando las fuerzas interiores son centrales. El momento cinético de cada partícula puede, desde luego, variar.

En realidad, el ejemplo del hombre sobre la plataforma giratoria corresponde a un sistema muy complicado. Las partículas son las partículas elementales atómicas y nucleares que constituyen al hombre, plataforma y pesas. A pesar del enorme número y complejidad de las fuerzas interiores, el momento cinético del sistema es constante.

Por lo que se refiere al momento cinético total, aun cuando las partículas puedan moverse arbitrariamente acercándose y alejándose entre sí, el momento cinético total permanece siempre el mismo. Podemos incluso imaginar que las partículas se «funden» para formar una nueva partícula compuesta sin que varíe el momento cinético total. La nueva partícula deberá poseer un momento cinético de giro (spin) igual al momento cinético total inicial. Inversamente, si explota la partícula dividiéndose en varias partes, su momento cinético inicial será la suma de los momentos cinéticos de los fragmentos. El momento cinético total, como la cantidad de movimiento, se conserva en toda interacción arbitraria que lleve consigo fuerzas centrales.

La Tierra y el Sol poseen ambos, momentos cinéticos de giro. En las escalas atómica y subatómica también encontramos frecuentemente partículas que poseen momentos cinéticos de giro del orden de  $(h/2\pi) \simeq 10^{-34} \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ , donde  $h$  es la constante de Planck.

Existen muchos ejemplos ilustrativos tales como los saltos de trampolín, el patinaje artístico, saltos de esquí y otros acontecimientos atléticos en los cuales juega un papel importante la conservación del momento cinético y en los que se regula la velocidad angular variando el momento de inercia del cuerpo. Volviendo al ejemplo del hombre sobre la plataforma giratoria, observamos que el hombre no sólo puede variar su velocidad angular variando el momento de inercia, sino que también puede arrancar partiendo del reposo y, moviendo adecuadamente las pesas, girar él mismo de una posición angular a otra, de la misma manera que un gato al caer gira sobre sí mismo aterrizando sobre sus patas (prob. 9-13). Esta manipulación del gato es un caso de aprovechamiento de la conservación del momento cinético en la que interviene, en gran manera, el movimiento de la cola. Pero la técnica de distribuir el momento cinético total entre la cola, patas traseras, etc., varía de un gato a otro. (Incluso los gatos a los que se ha cortado el rabo caen de pie.)

**EJEMPLO.** Tres cuerpos,  $A$ ,  $B$  y  $C$ , con las velocidades indicadas en la figura 9-13, se aproximan a una región  $R$  del espacio. Al penetrar en la región,  $A$ ,  $B$  y  $C$  sólo interactúan con otro de entre ellos y finalmente se observa que los cuerpos  $B$  y  $C$  abandonan  $R$ , mientras que  $A$  queda en reposo. Si  $B$  tiene la velocidad y trayectoria indicadas, ¿cuáles deben ser la velocidad y trayectoria de  $C$ ?

En los problemas en que nos encontramos con más de dos partículas, o en los casos en que se tiene poca información o ninguna acerca de la interacción, no suele ser posible hallar el movimiento en detalle. Sólo sabemos que deben satisfacerse los principios de conservación de la cantidad de movimiento y del momento cinético. Por tanto, en el caso actual, empezaremos escribiendo las condiciones de la conservación de la cantidad de movimiento y del momento cinético, de la manera siguiente:

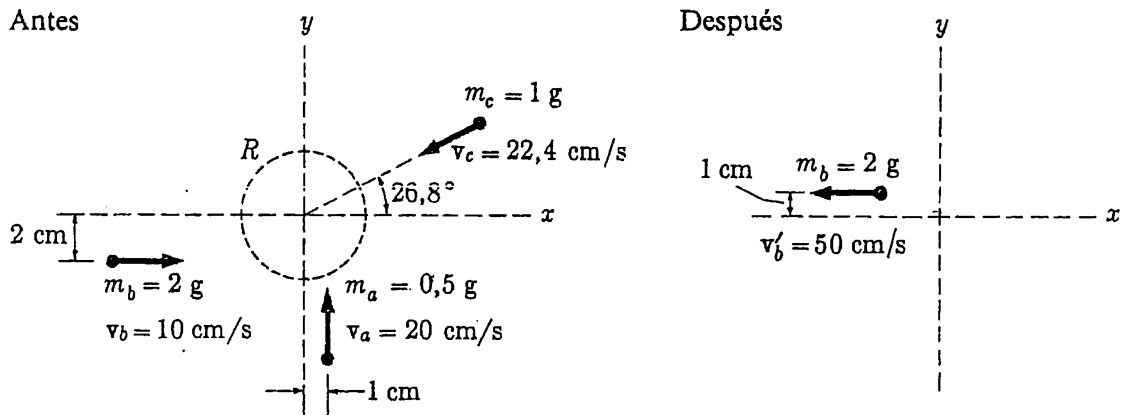


Figura 9-13

*Conservación de la cantidad de movimiento:*

$$\text{Dirección } x: 2 \cdot 10 - 1 \cdot 22,4 \cdot \cos \theta = -2 \cdot 50 + 1 \cdot v_{cx}$$

$$\text{Dirección } y: 1 \cdot v_{cy} = 0,5 \cdot 20 - 1 \cdot 22,4 \cdot \sin \theta$$

Con  $\theta = 26,8^\circ$ , obtenemos

$$v'_{cx} \simeq 100, \quad v'_{cy} \simeq 0$$

*Conservación del momento cinético:* Supongamos que el brazo de palanca de  $v_c$  respecto a  $O$  es  $y$ . El momento cinético respecto a  $O$  es, entonces,

$$0,5 \cdot 20 \cdot 1 + 2 \cdot 10 \cdot 2 = 2 \cdot 50 \cdot 1 - v'_{cx} y$$

en donde los miembros primero y segundo de la ecuación representan las condiciones antes y después de la interacción, respectivamente. Esta ecuación da

$$y = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

Observamos que la energía cinética después de los choques es mayor que antes. Durante la interacción, debe haberse liberado energía a expensas de alguna energía potencial o interna de las partículas.

Momento de inercia de un cuerpo rígido. Un cuerpo rígido puede considerarse como un conjunto de partículas que mantienen invariables sus distancias mutuas. Si el cuerpo gira alrededor de un eje, todas las partículas describirán trayectorias circulares con la misma velocidad angular, como se ilustra esquemáticamente en la figura 9-14. Así, si las partículas de masas  $m_1, m_2, m_3$ , etc. están situadas a las distancias  $r_1, r_2, r_3$ , etc. del eje, de la ecuación (9-4) se deduce que el momento cinético total del cuerpo es

$$(\sum mr^2)\omega = I_0\omega \quad (9-7)$$

La cantidad  $I_0 = \sum mr^2 = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \dots$  es el momento de inercia del sistema de partículas respecto al eje de rotación y se ve que depende de la geometría del sistema y de la distribución de la masa en él.

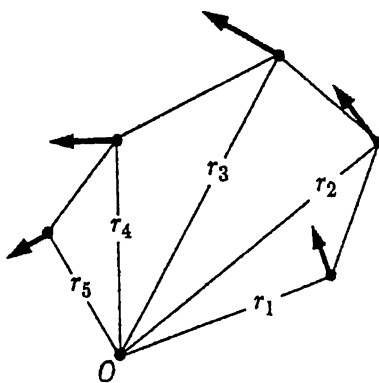


Fig. 9-14. Todos los puntos materiales de un cuerpo rígido tienen la misma velocidad angular. Sus celeridades son  $\omega r_1, \omega r_2$ , etc.

Cuando el cuerpo consiste en una distribución continua de masa, en vez de en un número finito de puntos materiales, la suma de un número finito de términos de la forma  $mr^2$  sólo constituiría una expresión aproximada del momento de inercia del cuerpo. La expresión correcta sería

$$I = \int r^2 dm \quad (9-8)$$

donde la integración se extiende a todo el cuerpo. En el caso de cuerpos que tengan una forma geométrica sencilla, tales como barras rectas y cilindros de revolución, la integral (9-8) tiene un cálculo exacto fácil, según veremos en los ejemplos que siguen. Si se mide la distancia  $r$  a un eje que pasa por el centro de masa del cuerpo, representaremos el momento de inercia por  $I_0$ . Debe advertirse que, incluso en el caso de cuerpos con masa distribuida uniformemente, el momento de inercia se puede evaluar aproximadamente por medio de un número fini-



to de términos  $mr^2$  que representen las contribuciones de un número finito de elementos de masa en que podamos descomponer el cuerpo.

**EJEMPLO 1.** Consideremos una barra recta y uniforme, de longitud  $L$  y masa total  $M$ , y determinemos el momento de inercia respecto al eje perpendicular a la barra y que pasa por su centro de masa, según se indica en la figura 9-15

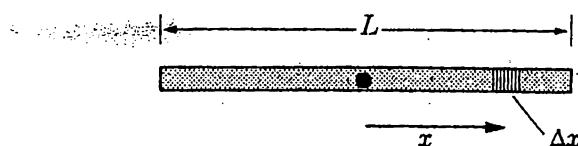


Figura 9-15

Utilicemos, en primer lugar, el método aproximado en el que la barra se divide en un número finito de elementos de masa y apliquemos  $I_0 \simeq \sum mr^2$  para el cálculo del momento de inercia. Elijamos cuatro partes iguales, cada una de masa  $M/4$ . Cada mitad de la barra contendrá dos elementos con distancias al centro de masa  $r_1 = L/8$  y  $r_2 = 3L/8$ . El momento de inercia se hace entonces aproximadamente igual a

$$I_0 \simeq 2 \cdot \frac{M}{4} \left[ \left( \frac{L}{8} \right)^2 + \left( \frac{3L}{8} \right)^2 \right] = \frac{10}{128} ML^2 = \frac{ML^2}{12,8}$$

Cuanto mayor sea el número de elementos utilizado, tanto más próximo al resultado exacto será el resultado obtenido. En el caso límite de un número infinito de elementos, habrá que calcular la integral (9-8). En el ejemplo actual, tomamos como elemento de masa  $\Delta m$ , una longitud  $\Delta x$  de barra, según se indica en la figura 9-15. El elemento está situado a una distancia  $x$  del centro de la barra y tiene la masa elemental  $\Delta m = (\Delta x/L)M$ . Su contribución al momento de inercia respecto al eje considerado es  $(\Delta m)x^2$ . Y el momento de inercia buscado será

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 dm = 2 \int_0^{L/2} x^2 dm = 2 \int_0^{L/2} \frac{M}{L} x^2 dx \\ &= 2 \frac{M}{L} \frac{L^3}{24} = \frac{ML^2}{12} \end{aligned}$$

Es interesante darse cuenta de que, incluso con el número relativamente pequeño de elementos (4) considerado, el método aproximado de cálculo es bastante bueno.

**EJEMPLO 2.** Para calcular el momento de inercia de un disco circular respecto a un eje que pase por su centro de masa y sea normal al disco, tomaremos como elemento de masa el anillo comprendido entre los radios  $r$  y  $r + \Delta r$ , según se indica en

la figura 9-16. Si es  $M$  la masa total del disco y  $R$  su radio, la masa del elemento será  $\Delta m = (2\pi r \Delta r / \pi R^2)M$ . El momento de inercia total es

$$I_0 = \int_0^R r^2 dm = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{MR^2}{2}$$

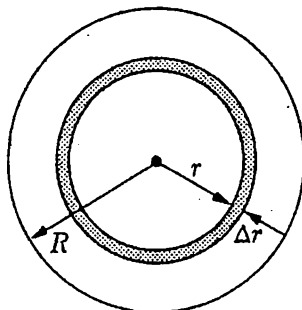


Figura 9-16

*Radio de giro.* El momento de inercia tiene por dimensiones  $[M][L]^2$ . En otras palabras, siempre será posible expresar el momento de inercia como producto de la masa total  $M$  por el cuadrado de una cierta longitud  $k$ , a la que llamaremos radio de giro del cuerpo respecto al eje considerado, tal que

$$I = Mk^2$$

También emplearemos los símbolos  $I_0$  y  $k_0$  cuando nos refiramos a un eje que pase por el centro de masa del cuerpo.

El radio de giro puede interpretarse de la manera siguiente. Un cuerpo que gira con velocidad angular  $\omega$  alrededor de un eje fijo tiene un momento cinético  $I\omega$ . Si tomamos ahora un elemento puntiforme de masa igual a la masa total  $M$  del cuerpo y hacemos que este punto describa una circunferencia de radio  $k$  con velocidad angular  $\omega$ , el momento cinético de la masa puntual es el mismo que el del cuerpo. En este sentido, el problema de la rotación de un cuerpo rígido en un plano, se puede sustituir por el problema más sencillo del movimiento de un punto material único. Por ejemplo, un disco circular de radio  $R$  que gira alrededor del eje perpendicular a él y que pasa por su centro de masa, equivale a un punto material de igual masa que gire con la misma velocidad angular siguiendo una circunferencia de radio  $k_0 = R/\sqrt{2}$ .

**9-3 El momento cinético como vector.** *Movimiento en un plano.* Los dos sentidos de rotación posibles del vector de posición y las velocidades angulares correspondientes de la partícula en un plano, se distinguen por los signos más y menos, y al momento cinético se le da el mismo signo que a la velocidad angu-

lar, según se mencionó en relación con la ecuación (9-4).  $L = (m r^2) \omega$  En principio, la elección del sentido de rotación positivo, es arbitraria; y cuando nos ocupamos del movimiento en un plano la elección carece de importancia, si bien en los razonamientos debemos siempre respetarla. Sin embargo, cuando consideremos tipos más generales de movimiento, el sentido del momento cinético jugará un papel importante y con el fin de ganar experiencia en esta cuestión, estudiaremos aquí la manera de elegir el sentido positivo de rotación en un plano.

Cuando miramos el plano del movimiento desde un lado, vemos girar al radio vector de la partícula o en el sentido de las agujas del reloj o en el opuesto. Podemos tomar como positivo el sentido contrario al de las agujas del reloj, por ejemplo. Sin embargo, esta descripción no es única. Ya que si el plano es horizontal, el signo del momento cinético, según esta descripción, depende de que miremos el movimiento desde encima del plano o desde debajo. En otras palabras, para establecer en forma unívoca el signo del momento cinético deberemos especificar, de alguna manera, el lado desde el cual contemplamos el movimiento. Esta especificación se hace introduciendo un eje de coordenadas perpendicular al plano. En un sistema de coordenadas cartesianas, el eje  $z$  tiene un sentido definido en relación con el plano  $xy$ . En un *sistema de coordenadas dextrorsum* dicho sentido está relacionado con los sentidos de los ejes  $x$  e  $y$ , de la manera siguiente. Giremos el semieje  $+x$  hacia el semieje  $+y$ . Este giro define un sentido de rotación que representaremos por  $x \rightarrow y$ . Girando un sacacorchos de igual manera, el sentido de su avance define el sentido del eje  $z$ . Introduciremos el símbolo  $x \rightarrow y \rightarrow z$  para representar esta relación entre los sentidos de los ejes. El sentido de rotación  $x \rightarrow y$  define el sentido positivo de la velocidad angular y del momento cinético del movimiento en el plano  $xy$ . Así pues, visto desde el semieje positivo de las  $z$ , este sentido positivo de rotación es el opuesto al de las agujas del reloj (véase fig. 9-17).

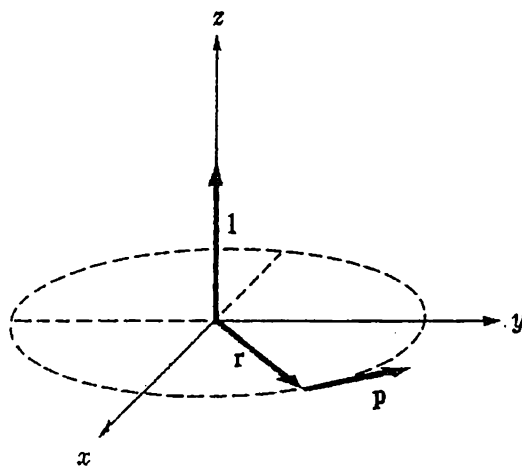


Fig. 9-17. Sistema de coordenadas dextrorsum y descripción vectorial del momento cinético.

Como el momento cinético está tan estrechamente relacionado con una dirección normal al plano del movimiento, será natural describir un momento cinético positivo en el plano  $xy$  por un vector dirigido según el semieje  $+z$ , según se indica en la figura 9-17. Hemos visto que la magnitud del momento cinético es  $pd = p_\theta r$ . Esto puede interpretarse como producto de la cantidad de movimiento por la componente normal al vector cantidad de movimiento del vector de posición, o bien como producto de la magnitud del vector de posición por la componente normal a éste del vector cantidad de movimiento. En uno y otro caso, la magnitud del momento cinético es  $|p| |r| \sin \phi$ , donde  $\phi$  es el ángulo que forman las direcciones de  $r$  y  $p$ , según se indica en la figura 9-18

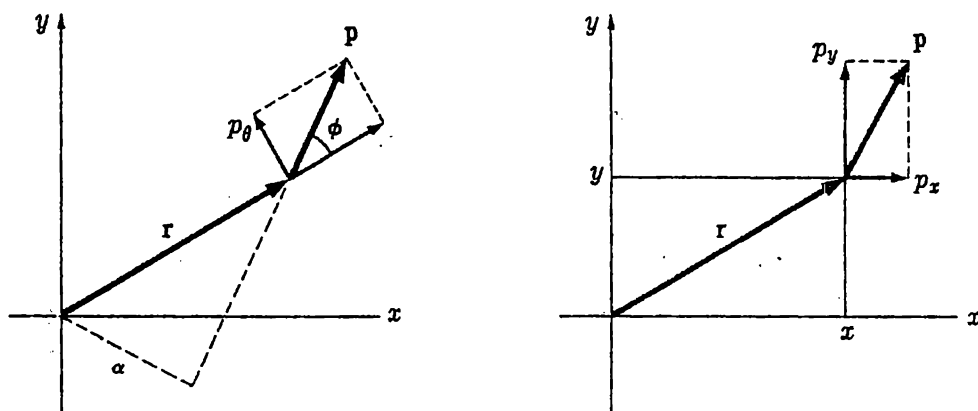


Fig. 9-18. La magnitud del momento cinético de una partícula en un plano puede expresarse en la forma  $pd = p_\theta r = pr \sin \phi$ . Además, en función de las coordenadas rectangulares, tenemos  $l = xp_y - yp_x$ .

El momento cinético también puede expresarse en función de las componentes de los vectores  $r$  y  $p$  (fig. 9-18). Si descomponemos  $p$  en las componentes  $p_x$  y  $p_y$  hallamos que la contribución de  $p_y$  al momento cinético es  $+xp_y$  (sentido positivo de rotación), y la contribución de  $p_x$  es  $-yp_x$  (sentido negativo de rotación). El momento cinético total es, pues,

$$l = xp_y - yp_x \quad (9-9)$$

Esta adición de las contribuciones de  $p_x$  y  $p_y$  al momento cinético es totalmente compatible con las otras expresiones  $pd$ ,  $p_\theta r$  y  $rp \sin \phi$  del momento cinético total (véase prob. 9-22). Además de la magnitud del momento cinético, la ecuación (9-9) da también el signo del momento cinético.

Tenemos así un procedimiento para la determinación de la magnitud, dirección y sentido del momento cinético a partir de los vectores  $r$  y  $p$ , quedando el momento cinético unívocamente especificado por estos vectores. Un simbolismo

aceptado para expresar las relaciones entre los tres vectores  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{p}$ , tanto en magnitud como en dirección y sentido, es

$$\underline{\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}}$$

Al producto  $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$  se le da el nombre de producto vectorial de los vectores  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{p}$ . Este producto es un vector de módulo o magnitud  $l = rp \sin \phi$ , dirección normal al plano determinado por  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{p}$ , y sentido el de avance de un sacacorchos que gire llevando el sentido positivo de  $\mathbf{r}$  sobre el sentido positivo de  $\mathbf{p}$  por el camino más corto.

El estudio de la figura 9-19 puede ayudarnos a comprender el sentido de  $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ . Obsérvese que cuando  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{p}$  son mutuamente perpendiculares ( $\phi = 90^\circ$ ),  $\mathbf{l}$  tiene su magnitud máxima y cuando  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{p}$  son paralelos,  $\mathbf{l}$  tiene módulo nulo.

Debe tenerse muy en cuenta que en este tipo de multiplicación de vectores, al invertir el orden de los factores se invierte el signo, o sea el sentido del vector producto. La razón de esto se halla en que hemos definido el sentido de  $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$  en función de una rotación en la que el sentido de  $\mathbf{r}$  (multiplicando) gira hacia el de  $\mathbf{p}$  (multiplicador). En el producto  $\mathbf{p} \times \mathbf{r}$  sería el sentido de  $\mathbf{p}$  el que girara hacia el de  $\mathbf{r}$ , con lo que el sentido del producto sería el opuesto del de  $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ . En consecuencia, para un producto vectorial de dos vectores arbitrarios  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  tenemos

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

El módulo del producto vectorial  $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$  admite una interpretación geométrica interesante, pues es igual al área del paralelogramo determinado por los dos vectores  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{p}$ , según se indica en la figura 9-20. La altura del paralelogramo es  $d = r \sin \phi$  y el área es  $p(r \sin \phi)$ .

*Movimiento tridimensional.* Nuestros estudios anteriores acerca del momento cinético se han reducido a casos en que todo el movimiento estaba confinado en un plano. En el caso de una partícula que se mueve bajo la influencia de una fuerza central, por ejemplo, el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, el movimiento tiene lugar siempre en un solo plano. Sin embargo, cuando intervienen varias partículas o cuerpos rígidos, el movimiento no suele estar confinado en un plano único.

Consideremos, por ejemplo, un volante situado sobre una plataforma giratoria, montado de manera que su eje sea horizontal. Si sólo gira el volante, el movimiento tiene lugar en un plano, pero si además gira la plataforma, tenemos un movimiento tridimensional.

Existen numerosos ejemplos de este tipo, especialmente en la Mecánica de los cuerpos en rotación, en la que habrá que examinar de nuevo el concepto de momento cinético. En el capítulo 13 estudiaremos con cierto detalle algunos

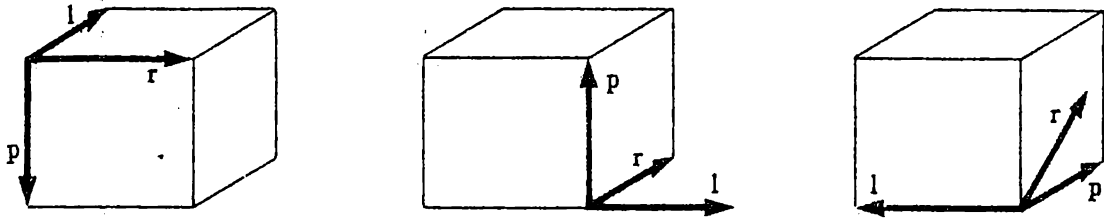


Fig. 9-19. El vector  $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  es perpendicular a  $\mathbf{r}$  y a  $\mathbf{p}$  y tiene el sentido de avance de un sacacorchos que girara llevando  $\mathbf{r}$  sobre  $\mathbf{p}$ .

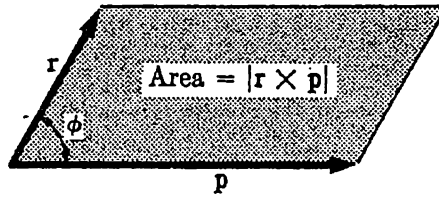


Fig. 9-20. El módulo del producto vectorial es igual al área del paralelogramo determinado por  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{p}$ .

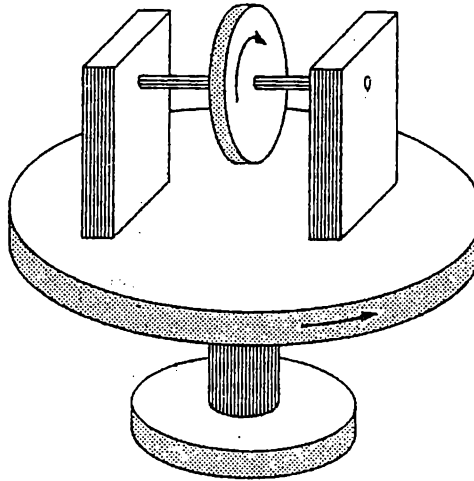


Figura 9-21

ejemplos específicos de este tipo. Por el momento, bastará indicar, en principio, cómo se extiende el concepto de momento cinético desarrollado para el movimiento en un plano, a fin de que incluya el movimiento en tres dimensiones.

Recordemos que en el movimiento en un plano se introducía el momento cinético como la cantidad que permanecía invariable cuando las fuerzas eran centrales. Vamos a ver que esta idea de momento cinético puede llevarse, de manera natural, a un movimiento arbitrario, descomponiendo éste en movimientos

planos sobre los tres planos coordenados de un sistema  $xyz$ . El análisis anterior puede aplicarse a cada uno de estos movimientos planos y determinar así las condiciones en las cuales se conserva el momento cinético en cada plano. Esto nos conduce a introducir tres componentes del momento cinético, o sea a un vector momento cinético.

Para desarrollar estas ideas, deberemos recordar primeramente que el momento cinético puede interpretarse en función de la velocidad areolar de la partícula en cuestión. En otras palabras, podemos presentar la magnitud del momento cinético en función del área barrida en un segundo por el radio vector. El momento cinético no es más que el producto de  $2m$  por esta área, siendo  $m$  la masa de la partícula.

Consideremos ahora una de las partículas de un grupo de ellas que se mueve en el espacio, como se indica en la figura 9-22. La posición de la partícula está descrita con relación a un sistema de ejes  $xyz$  coordenados, cartesianos, rectangulares, que forman un triedro dextrorsum. Durante un intervalo de tiempo suficientemente corto, la trayectoria de la partícula puede asimilarse a un segmento rectilíneo elemental y puede considerarse que el movimiento tiene lugar en el plano definido por este segmento rectilíneo y el origen de coordenadas. Entonces, en virtud de las consideraciones que hicimos al estudiar el movimiento plano, podremos representar, en la forma que se indica, al momento cinético de la partícula por la velocidad areolar. De manera análoga, podremos construir planos y velocidades areolares que representen los momentos cinéticos de las demás partículas del grupo pero como, en general, estos planos no coincidirán, no habrá manera de conocer el significado de la suma de estos momentos individuales, si nos basamos en nuestras consideraciones anteriores acerca del momento cinético. Para que dicha suma de momentos cinéticos tenga significado,

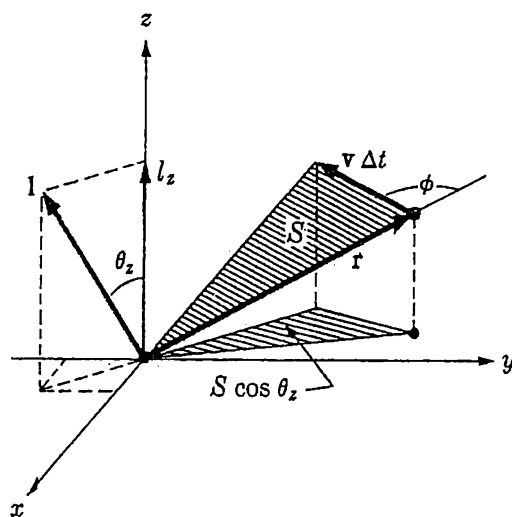


Figura 9-22

habrá que referir a un plano los movimientos de las partículas. Aun cuando esto no es posible cuando utilizamos los momentos cinéticos totales de las partículas, puede lograrse si utilizamos las proyecciones de los movimientos de las partículas sobre los tres planos coordenados. Entonces, en cada uno de estos planos, tenemos movimientos y trayectorias que se refieren a las partículas del grupo y podremos introducir velocidades areolares y momentos cinéticos de estos movimientos planos. Entonces podrán sumarse como antes las velocidades areolares y los momentos cinéticos.

Examinemos con más detenimiento la proyección sobre el plano  $xy$  del movimiento de uno de los puntos, representada en la figura 9-22. La velocidad areolar de la proyección sobre el plano  $xy$  no es mas que la velocidad areolar de la partícula multiplicada por el coseno del ángulo que forman el plano de la trayectoria y el plano  $xy$ . Este ángulo es, por definición, el que forman las normales a los planos, es decir, el ángulo  $\theta_z$  que forma el eje  $z$  con la normal al plano de la trayectoria, según puede verse. Así pues, si es  $S$  la magnitud de la velocidad areolar, la velocidad areolar en el plano  $xy$  será  $S_{xy} = S \cos \theta_z$ . En lugar de emplear la notación  $S_{xy}$ , será más conveniente e igualmente descriptivo emplear  $S_z$ , con lo que  $S_z = S \cos \theta_z$ . En otras palabras,  $S_z$  es la velocidad areolar asociada al movimiento alrededor del eje  $z$  en el plano normal a dicho eje. De manera completamente análoga, podemos obtener  $S_x = S \cos \theta_x$  y  $S_y = S \cos \theta_y$  para las velocidades areolares en los planos  $yz$  y  $zx$ , respectivamente. Los ángulos  $\theta_x$  y  $\theta_y$  son los que forma la normal al sector plano de la trayectoria con los ejes  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Al igual que hay un momento cinético  $l = 2mS$  asociado a la velocidad areolar  $S$ , podremos introducir análogamente las componentes del momento cinético  $l_x = 2mS_x = l \cos \theta_x$ ,  $l_y = 2mS_y = l \cos \theta_y$ , y  $l_z = 2mS_z = l \cos \theta_z$ , donde hemos empleado  $S_x = S \cos \theta_x$ , etc., y  $l = 2mS$ . Con esta interpretación de las componentes del momento cinético, podemos definir un vector momento cinético de componentes  $l_x$ ,  $l_y$ , y  $l_z$ . La componente  $l_z$  está dirigida según el eje  $z$ , y representa el momento cinético asociado al movimiento en el plano  $xy$ . Análogamente, las componentes  $l_x$  y  $l_y$  están relacionadas con los momentos cinéticos en los planos  $yz$  y  $zx$ , respectivamente. Juntas, forman un vector momento cinético normal al sector plano determinado por el elemento de trayectoria y el origen de coordenadas, según se indica en la figura 9-22. (El ángulo que forma el vector resultante con el eje  $z$  está definido por  $\cos \theta_z = l_z/l$ , etc., es decir, la dirección de  $l$  es la misma que la de la normal al sector plano, ya que  $l_z/l = S_z/S$ .)

Hay que recalcar que el momento cinético se define respecto a un punto y que depende de la posición de este punto. A las componentes del vector momento cinético en un sistema de ejes coordenados cuyo origen es el punto de referencia, se les llama momentos cinéticos respecto a los ejes. Debemos tener en cuenta, sin embargo, que ordinariamente no se pueden determinar estas componentes



hasta que se haya elegido el punto de referencia del momento cinético.

El momento cinético asociado al movimiento en el plano  $xy$  puede expresarse en la forma  $l_z = xp_y - yp_x$ , según se demostró anteriormente, y para las otras componentes se tendrán expresiones análogas, es decir,

$$\begin{aligned} l_x &= yp_z - zp_y \\ l_y &= zp_x - xp_z \\ l_z &= xp_y - yp_x \end{aligned} \quad (9-10)$$

La magnitud del momento cinético total podrá, pues, expresarse en la forma

$$l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2} \quad (9-11)$$

Según se vio en el apartado anterior, esta magnitud también puede expresarse de la manera siguiente:

$$l = rp \sin \phi \quad (9-12)$$

donde  $r$  es la magnitud del radio vector  $\mathbf{r}$  que va del punto de referencia a la partícula,  $p$  es la magnitud de la cantidad de movimiento  $\mathbf{p}$ , y  $\phi$  es el ángulo que forman los vectores  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{p}$  (fig. 9-22).

Según las ecuaciones (9-10), las componentes del momento cinético de la partícula se expresan en función de ciertos productos de las componentes de los vectores  $\mathbf{r}$  de posición y  $\mathbf{p}$  cantidad de movimiento. El vector momento cinético queda unívocamente determinado por el vector de posición  $\mathbf{r}$  y el vector cantidad de movimiento  $\mathbf{p}$ . Las tres ecuaciones (9-10) pueden condensarse en la ecuación vectorial única

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (9-13)$$

Según hemos visto, este vector tiene por módulo  $rp \sin \phi$ , dado por la ecuación (9-12). Por lo que se refiere a la dirección y sentido de  $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , véase el estudio del caso particular del movimiento plano (fig. 9-19).

De manera completamente análoga podremos obtener los vectores  $\mathbf{l}$  momento cinético de las demás partículas del sistema. Como pueden sumarse las componentes del momento cinético que representen movimientos en un plano, podremos caracterizar el momento cinético total de un sistema de partículas por las componentes  $L_x = \sum l_x$ ,  $L_y = \sum l_y$ , y  $L_z = \sum l_z$ , y estas componentes definen el vector  $\mathbf{L}$  momento cinético total del sistema de partículas. Este vector es, pues, la suma vectorial de los momentos cinéticos de las distintas partículas:

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{l} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \dots \quad (9-14)$$

Lo que hemos hecho hasta ahora ha sido generalizar la definición de momento cinético para que incluyera el movimiento de partículas que no se muevan todas en el mismo plano. Dicha definición constituye una extensión natural del momento cinético de partículas en un plano. No obstante, recordemos que la introducción del momento cinético en un plano estaba motivada por la conservación observada del momento cinético de un sistema de partículas sometido a la influencia de una fuerza central. Debemos examinar en este aspecto el momento cinético vectorial total y estudiar qué ocurre con el momento cinético total cuando las partículas no sólo se ejercen interacciones entre sí con fuerzas centrales, sino que también se hallan sometidas a fuerzas centrales dirigidas hacia el origen  $O$ . Observamos que si las fuerzas son centrales, sus *componentes* en los planos coordenados *son también centrales*. (Después de todo, si una fuerza está dirigida hacia  $O$ , sus componentes sobre los planos coordenados también están dirigidas hacia  $O$ .) En otras palabras, el problema puede reducirse al más conocido en que las partículas se mueven en planos bajo la influencia de fuerzas centrales. En el apartado anterior hemos advertido que, en tales condiciones, las componentes del momento cinético total en cada uno de los planos coordenados permanecen constantes. En consecuencia, al vector momento cinético total del sistema de partículas permanece también constante.

**EJEMPLO.** Una partícula que se mueve en el espacio tiene por componentes de la cantidad de movimiento  $p_x = -1$ ,  $p_y = -2$  y  $p_z = 4$  kg·m/s al pasar por el punto  $x = 1$ ,  $y = 2$ ,  $z = -3$  m. (a) Determinar el momento cinético de la partícula respecto al origen. (b) ¿Cuál es la distancia del origen a la línea de movimiento en dicho punto? (c) ¿Qué ángulo forman el vector de posición  $\mathbf{r}$  y la cantidad de movimiento  $\mathbf{p}$ ?

Utilizando las ecuaciones (9-10) para las componentes del momento cinético, obtenemos

$$l_x = 2 \cdot 4 - (-3)(-2) = 2$$

$$l_y = (-3)(-1) - 1 \cdot 4 = -1$$

$$l_z = 1 \cdot (-2) - 2 \cdot (-1) = 0$$

La magnitud del momento cinético es, pues,

$$l = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

Esta magnitud también puede expresarse en la forma  $l = pD$ , donde  $D$  es el brazo de palanca de la cantidad de movimiento,  $p$  la magnitud de ésta, que se expresa en la forma

$$p = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{21} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Por tanto, el brazo de palanca es

$$D = \frac{l}{p} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{21}} \simeq 0,49 \text{ m}$$

La magnitud del momento cinético también se puede expresar como  $l = rp \sin \phi$ , donde  $\phi$  es el ángulo que forman  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{p}$ . La magnitud del vector de posición es

$$r = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

y obtenemos

$$\sin \phi = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} \simeq 0,13 \quad \text{o sea} \quad \phi \simeq 7,5^\circ$$

**9-4 Momento cinético orbital y de spin \*.** Hasta ahora, el resultado esencial que hemos obtenido en relación con el momento cinético es el siguiente. Si un sistema de partículas, que pueden o no constituir un cuerpo rígido, se mueve en el espacio bajo la acción de una fuerza exterior, el vector momento cinético total del sistema respecto al centro de fuerzas es constante, si las interacciones interiores entre las partículas son centrales. En este apartado no vamos a añadir a este resultado nada fundamentalmente nuevo. No haremos más que estudiar el hecho de que el momento cinético total puede considerarse como suma de dos partes, una atribuida al movimiento del centro de masa del sistema y la otra que interpreta el movimiento respecto al centro de masa. Esta separación es, a menudo, muy conveniente, en particular cuando tratamos del movimiento de cuerpos rígidos que giran sobre sí mismos, en cuyo caso pueden hallarse fácilmente las contribuciones al momento cinético de la traslación y la rotación del cuerpo. Además, debemos mencionar que en las escalas atómica y subatómica existe, frecuentemente, un momento cinético de «spin» asociado a una partícula, y en la determinación del momento cinético total de la partícula habrá que considerar esta contribución.

Para probar que puede descomponerse en las dos partes citadas el momento cinético total, determinaremos el momento cinético total de un conjunto de partículas respecto a un punto fijo que tomaremos como origen de coordenadas. Sea  $\mathbf{r}$  la posición de una de dichas partículas, especificada por  $(x, y, z)$ , y  $\mathbf{p}$  su cantidad de movimiento, especificada por  $(p_x, p_y, p_z)$ . El centro de masa de todo el sistema tiene un vector de posición  $\mathbf{R}$ , especificado por  $(X, Y, Z)$  y una velocidad  $\mathbf{V}$  especificada por  $(V_x, V_y, V_z)$ . La componente  $z$  del momento cinético de una partícula del sistema, según las ecuaciones (9-10), es  $l_z = xp_y - yp_x$ , y la compo-

---

\* El vocablo inglés «spin» significa giro sobre sí mismo. La Física Atómica ha hecho que se adopte dicho vocablo en la terminología científica de todos los países.

nente  $z$  del momento cinético total se obtendrá sumando para todas las partículas las expresiones correspondientes a la anterior, es decir  $L_z = \sum l_z$ .

Podemos hacer  $x = X + x^*$ , donde  $x^*$  es la coordenada  $x$  de la partícula medida desde el centro de masa. Análogamente, tenemos  $p_y = mV_y + p_y^*$ , donde  $p_y^*$  es la cantidad de movimiento respecto al centro de masa. Las demás componentes de  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{r}$  se expresan de manera análoga. Para la componente  $z$  del momento cinético de una de las partículas obtenemos, entonces,

$$\begin{aligned} l_z &= (X + x^*)(mV_y + p_y^*) - (Y + y^*)(mV_x + p_x^*) \\ &= (XmV_y - YmV_x) + \underbrace{(x^*p_y^* - y^*p_x^*)}_{l_z^*} \\ &\quad + (Xp_y^* - Yp_x^*) + (V_y mx^* - V_x my^*) \end{aligned}$$

Si sumamos ahora para todas las partículas del sistema, el primer grupo de términos dará  $XP_y - YP_x$ , donde  $P_x$  y  $P_y$  son las componentes de la cantidad de movimiento total  $\mathbf{P} = \sum \mathbf{p}$ . El segundo término da la componente  $L_z^* = \sum l_z^*$ , del momento cinético total respecto al centro de masa. Los restantes términos dan suma nula ya que  $\sum p_y^* = \sum p_x^* = 0$ , y análogamente,  $\sum mx^* = \sum my^* = 0$ . La componente  $z$  del momento cinético total es, pues,

$$L_z = L_z^* + (XP_y - YP_x) = L_z^* + (\mathbf{R} \times \mathbf{P})_z \quad (9-15)$$

Las componentes  $x$  e  $y$  del momento cinético se obtienen análogamente y el resultado puede resumirse en forma concisa mediante la relación vectorial

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^* + \mathbf{R} \times \mathbf{P} \quad (9-16)$$

En particular, cuando se trata del movimiento de cuerpos rígidos, a la contribución  $\mathbf{R} \times \mathbf{P}$  del movimiento de traslación se le da el nombre de momento cinético orbital y a la contribución  $\mathbf{L}^*$  resultante de la rotación del cuerpo se le llama momento cinético de spin.

La ecuación (9-16) estipula, pues, que el momento cinético total de un sistema de partículas o de un cuerpo rígido no es sino la suma vectorial del momento cinético orbital y del momento cinético de spin. En la figura 9-23 se ha representado esquemáticamente esta suma. Para obtener este resultado, hemos operado con las componentes de los vectores de posición y cantidad de movimiento. Sin embargo, se habría podido obtener más directamente utilizando el Álgebra vectorial en donde se demuestra que el producto vectorial goza de la propiedad distributiva  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ . Dejamos como ejercicio demostrar esta relación y luego realizar el análisis anterior aplicando el Álgebra vectorial (prob. 9-31).

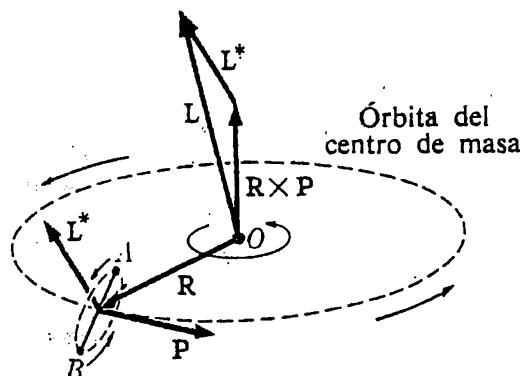


Fig. 9-23. El momento cinético total respecto a un punto fijo  $O$  es la suma vectorial de los momentos cinéticos orbital y de spin del sistema; es decir,  $L = L^* + R \times P$ .

**EJEMPLO 1.** El centro de masa de un disco circular uniforme de radio  $R$  y masa  $M$  desliza con celeridad  $V$  en el plano  $xy$ , siguiendo la recta  $y = 2R$  en el sentido negativo del eje  $x$ . Al mismo tiempo, el disco gira con una velocidad angular  $\omega = V/R$  en el sentido negativo de rotación (el de las agujas del reloj visto desde el semieje  $+z$ ). ¿Cuál es el momento cinético total del disco respecto al origen?

El momento cinético orbital del disco es  $MV(2R)$ , ya que el brazo de palanca respecto al origen es  $2R$ . El momento cinético de spin es  $L^* = -I_0\omega$ , y al introducir la cantidad  $I_0 = MR^2/2$ , obtenemos

$$L^* = -\frac{MR^2}{2} \frac{V}{R} = -\frac{MVR}{2}$$

El momento cinético total es, pues,

$$L = 2MVR - \frac{MVR}{2} = \frac{3MVR}{2}$$

**EJEMPLO 2.** Una barra de longitud  $R$  gira en un plano horizontal, alrededor de uno de sus extremos, con una velocidad angular constante  $\Omega$ , en la forma indicada en la figura 9-24. En su otro extremo lleva una «hélice» consistente en otra barra que lleva en sus extremos dos partículas, cada una de masa  $m$  y separadas por una distancia  $d$ , según se indica. Esta hélice gira con velocidad angular  $\omega$  en un plano normal a la primera barra. ¿Cuál es el momento cinético de la hélice respecto a  $O$ ? La masa de la barra es despreciable.

El momento cinético de spin  $L^*$  de la hélice tiene por magnitud  $L^* = m\omega d^2/2$  y está dirigido a lo largo de la barra horizontal.

El momento cinético orbital  $R \times P$  de la hélice tiene por magnitud  $2mR^2\Omega$  y está dirigido hacia arriba.

El momento cinético total de la hélice es, pues,  $L = L^* + R \times P$ , y como  $L^*$  gira con la primera barra y  $R \times P$  permanece fijo, se deduce que la flecha que representa a  $L$  describe una superficie cónica de vértice  $O$ .

La magnitud de  $L$  es  $L = \sqrt{(m\omega d^2/2)^2 + (2mR^2\Omega)^2}$ .

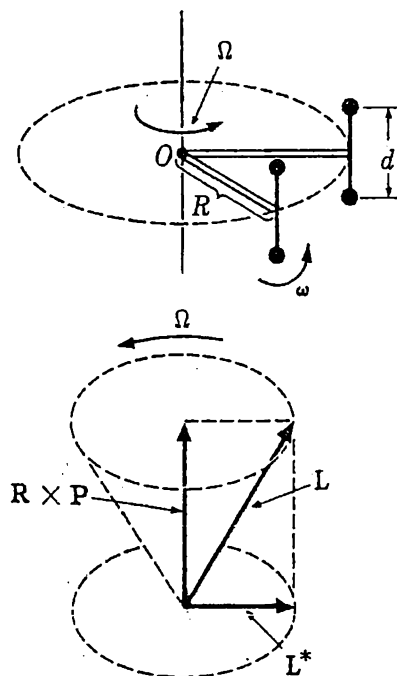


Figura 9-24

51

**9-5 Impulso angular y momento. Partícula única.** Hemos visto que los impulsos y fuerzas dirigidos hacia un centro no alteran el momento cinético de un punto material. En realidad, esta era la base sobre la que se desarrolló el concepto de momento cinético. Consideremos, ahora, un impulso  $\mathbf{J}$  que tenga una componente perpendicular a la dirección central o radial.

Si se aplica el impulso a una partícula de cantidad de movimiento  $\mathbf{p}_1$ , ésta pasará a ser  $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{J}$ . Para determinar la variación de momento cinético producida por este impulso, consideremos en primer lugar el momento cinético asociado al movimiento en el plano  $xy$ . Así, si son  $J_x$  y  $J_y$ , las componentes  $x$  e  $y$  del impulso, las variaciones en estas direcciones de las cantidades de movimiento serán simplemente  $\Delta p_x = J_x$  y  $\Delta p_y = J_y$ . En virtud de las ecuaciones (9-10), la variación de la componente  $z$  del momento cinético es

$$\Delta l_z = xJ_y - yJ_x$$

si el impulso es instantáneo. Para las variaciones de las componentes  $x$  e  $y$  del momento cinético podemos obtener expresiones análogas. La variación total de momento cinético podrá, pues, describirse con el vector

$$\Delta \mathbf{l} = \mathbf{G} = \mathbf{r} \times \mathbf{J} \quad (9-17)$$

Esta variación total de momento cinético recibe a menudo el nombre de impulso angular sobre la partícula, respecto al punto de referencia elegido.

Varias partículas. Supongamos ahora que la partícula que recibe el impulso exterior es un miembro de un grupo de partículas que sólo se ejercen interacciones entre sí con fuerzas centrales. En ausencia del impulso exterior, el momento cinético y, desde luego, la cantidad de movimiento, permanece constantes. Luego las variaciones de la cantidad de movimiento total y del momento cinético total se deberán únicamente al impulso exterior. La variación de cantidad de movimiento es  $\Delta \mathbf{P} = \mathbf{J}$  independientemente del punto de aplicación del impulso. Por otra parte, la variación del momento cinético depende del punto de aplicación. Si es  $\mathbf{r}$  el vector de posición de la partícula que recibe el impulso, la variación del momento cinético total respecto al origen de  $\mathbf{r}$  será

$$\Delta \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{J} \quad (9-18)$$

Podemos considerar esta variación total de momento cinético como el resultado de las variaciones del momento cinético angular y del momento cinético de spin del sistema de partículas. Si es  $\mathbf{R}$  el vector de posición del centro de masa, la variación de la parte orbital será simplemente  $\mathbf{R} \times \Delta \mathbf{P} = \mathbf{R} \times \mathbf{J}$ . El resto  $\Delta \mathbf{L} - \mathbf{R} \times \mathbf{J} = (\mathbf{r} - \mathbf{R}) \times \mathbf{J}$  deberá ser la variación del momento cinético de spin del sistema. Observemos que  $\mathbf{r} - \mathbf{R} = \mathbf{r}^*$  es el vector de posición del punto de aplicación del impulso, respecto al centro de masa del sistema de partículas. En consecuencia, para obtener la variación del momento cinético de spin del sistema, no haremos mas que multiplicar el impulso por el brazo de palanca respecto al centro de masa. Expresado en forma vectorial, queda

$$\Delta \mathbf{L}^* = \mathbf{r}^* \times \mathbf{J} \quad (9-19)$$

**EJEMPLO.** Tres partículas unidas por barras de masa despreciable ocupan los vértices de un triángulo equilátero, según se indica en la figura 9-25. Las masas de las partículas son todas iguales a  $m$ , y las distancias que separan las partículas son  $d$ . Se da a la partícula  $A$  un impulso paralelo a la recta que une  $C$  y  $B$ . Describir el movimiento después del impulso si el sistema desliza sobre una superficie exenta de rozamientos.

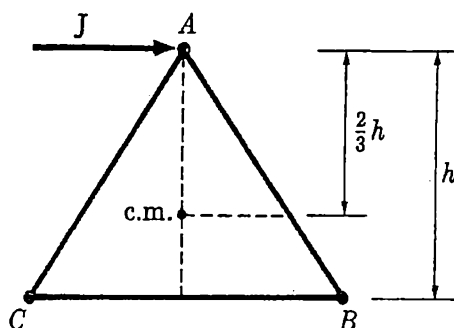


Figura 9-25

En primer lugar, determinaremos la posición del centro de masa c.m. Hallamos que está situado a una distancia  $\frac{2}{3}h$  de  $A$ , según se indica, donde  $h = d\sqrt{3}/2$ . Después del impulso, el centro de masa se moverá con la velocidad

$$V = \frac{J}{3m}$$

y el cuerpo habrá adquirido un momento cinético de spin

$$L^* = J\frac{2}{3}h = \frac{Jd}{\sqrt{3}}$$

También podemos expresar el momento cinético en función de la velocidad angular del triángulo, introduciendo el momento de inercia del sistema:

$$I_0 = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2$$

donde  $r_1, r_2, r_3$  son las distancias de las partículas al centro de masa. En este caso, estas distancias son todas fijas e iguales,  $r_1 = \frac{2}{3}h = d/\sqrt{3}$ . El momento de inercia es, pues,

$$I_0 = 3m \frac{d^2}{3} = md^2$$

y el momento cinético respecto al centro de masa es

$$L^* = I_0\omega = md^2\omega = \frac{Jd}{\sqrt{3}}$$

Así, obtenemos

$$\omega = \frac{J}{\sqrt{3} md}$$

*Momento.* Consideremos ahora el efecto de una fuerza que actúe de manera continua, en vez de un impulso instantáneo. El momento cinético de la partícula sometida a la acción de la fuerza varía ahora continuamente y a la velocidad de variación del momento cinético se le da el nombre de *momento de la fuerza* respecto al punto al que referimos el momento cinético. Si es  $\mathbf{r}$  el vector de posición de la partícula y  $\mathbf{p}$  su cantidad de movimiento, el momento cinético respecto al origen de  $\mathbf{r}$  es  $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ . Para estudiar la velocidad de variación del momento cinético estudiaremos, en primer lugar, la velocidad de variación de una de sus componentes. La componente  $z$  del momento cinético es  $l_z = xp_y - yp_x$  y la velocidad de variación es entonces

$$\frac{dl_z}{dt} = \frac{dx}{dt} p_y + x \frac{dp_y}{dt} - \frac{dy}{dt} p_x - y \frac{dp_x}{dt}$$



Los términos primero y tercero de esta expresión se destruyen, ya que  $dx/dt = p_x/m$  y  $dy/dt = p_y/m$ . Los términos segundo y cuarto pueden escribirse en la forma  $x F_y$  e  $y F_x$  respectivamente, con lo que la velocidad de variación quedará en la forma

$$\frac{dl_z}{dt} = x F_y - y F_x \quad (9-20)$$

Para las velocidades de variación de las otras componentes se obtienen expresiones análogas. La velocidad de variación del momento cinético, o momento de la fuerza será, pues, un vector  $\tau$  cuyas componentes son las del producto vectorial  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ , y tenemos

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (9-21)$$

Para obtener este resultado, hemos operado con las componentes de los vectores  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{p}$ . Podríamos haber obtenido el mismo resultado operando directamente con los vectores, una vez demostrada la validez de la fórmula  $d(\mathbf{r} \times \mathbf{p})/dt = \mathbf{r} \times (d\mathbf{p}/dt) + (d\mathbf{r}/dt) \times \mathbf{p}$ . Dejamos como ejercicio demostrar este resultado y luego aplicarlo a la deducción del resultado (9-20) (véase prob. 9-39).

La magnitud del momento puede, pues, expresarse como producto de la fuerza por su brazo de palanca respecto al punto de referencia  $\mathbf{r} = 0$ . El brazo de palanca tiene por magnitud  $r \sin \phi$ , donde  $\phi$  es el ángulo que forman los vectores  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{F}$ , y tenemos

$$\tau = Fd = Fr \sin \phi$$

Evidentemente, la magnitud de  $\tau$  puede también interpretarse como producto de la componente  $F \sin \phi$  de la fuerza perpendicular a  $\mathbf{r}$  por la distancia  $r$  al punto de referencia (véase fig. 9-26).

En el caso de movimiento en un plano, tenemos  $l = mr^2\omega$  y la velocidad de variación del momento cinético queda en la forma

$$\frac{dl}{dt} = mr^2 \frac{d\omega}{dt} + 2m\omega r \frac{dr}{dt} = mr^2\alpha + 2m\omega r \frac{dr}{dt} \quad (9-22)$$

donde

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

es la *aceleración angular*. Si es constante  $r$ , como en el caso, por ejemplo, de la partícula perteneciente a un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo, la velocidad de variación del momento cinético es, simplemente,  $mr^2\alpha$ . El segun-

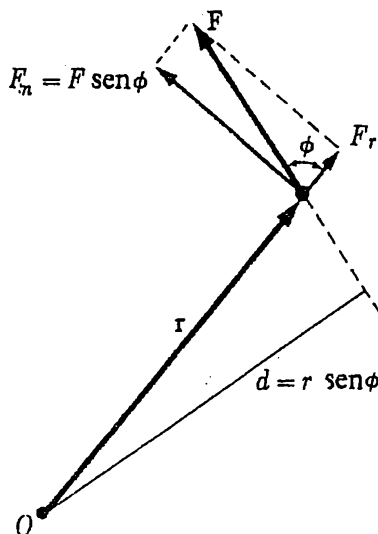


Fig. 9-26. La magnitud del momento  $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  es  $Fr \sin \phi = F_n r = Fd$ .

do término de la ecuación (9-22) representa la variación de momento cinético debida a la variación del brazo de palanca. Esta variación existe incluso si se mantiene constante la velocidad angular de la partícula. En el capítulo 11 estudiaremos más a fondo esta cuestión.

**EJEMPLO.** Se ata una masa  $m$  a un hilo que pasa por un agujero en un punto  $O$  de una mesa horizontal sin rozamientos. Con un extremo fijo en  $O$ , puede girar alrededor de él un palo que sirve para obligar a la masa a girar alrededor de  $O$  (fig. 9-27).

(a) Si se mantiene a un valor constante la fuerza normal  $N$  y se mantiene constante la longitud del hilo, cuales son la aceleración angular, el momento cinético y el ángulo girado al cabo de  $t$  segundos?

El momento respecto a  $O$  de la fuerza resultante que se ejerce sobre la masa es  $\tau = Nr$ , y en virtud de  $\tau = mr^2\alpha$ , la aceleración angular es  $\alpha = N/mr$  ( $dr/dt$  es nula). Como el momento es constante, la velocidad de variación del momento cinético será constante. Por tanto, si el sistema parte del reposo, el momento cinético será  $I =$

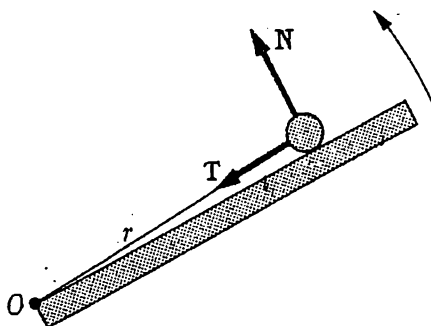


Figura 9-27

$\tau t = Nrt$ . La velocidad angular es  $\omega = at = (N/mr)t$ . Como la aceleración angular es constante, el ángulo girado es  $\theta = at^2/2 = Nt^2/2mr$ .

(b) Supongamos ahora que el palo gira con velocidad angular constante  $\omega$  y que la masa puede deslizar a lo largo de él con una velocidad radial  $dr/dt$ . ¿Cuál será la fuerza normal?

En este caso es constante la velocidad angular de la masa y el momento cinético crece solamente porque la masa se mueve aumentando el radio. Como  $mr^2a$  es nula, tenemos

$$Nr = 2mr\omega \frac{dr}{dt}$$

o sea

$$N = 2m\omega \frac{dr}{dt}$$

El resultado anterior puede aplicarse directamente al momento cinético total de un sistema de partículas o de un cuerpo rígido, sometido a la acción de fuerzas exteriores. Las fuerzas que se ejercen sobre cada una de las partículas de un tal sistema, pueden ser de dos tipos: fuerzas interiores y fuerzas exteriores. Desde luego, uno y otro tipo pueden hacer variar el momento cinético de dicha partícula, pero sólo las fuerzas exteriores (o mejor dicho, los momentos exteriores) pueden alterar el momento cinético del sistema. La razón de esto es que las fuerzas interiores son centrales, y como son fuerzas de interacción, siempre actúan dos a dos. Consideremos, por ejemplo, el momento cinético del sistema Tierra-Luna respecto al Sol. (En este caso ignoraremos el momento cinético que cada uno de los cuerpos tiene en virtud de su movimiento de rotación.) La Luna ejerce una fuerza gravitatoria sobre la Tierra y por ello varía el momento cinético de la Tierra respecto al Sol. La Tierra ejerce una fuerza gravitatoria sobre la Luna y por ello varía también el momento cinético de la Luna. Pero, como las fuerzas gravitatorias Tierra-Luna y Luna-Tierra son iguales y opuestas (fuerzas de interacción) y tienen la misma línea de acción (fuerzas centrales), los momentos respecto al Sol de las fuerzas que se ejercen sobre estos cuerpos son iguales y opuestos y el momento cinético *del sistema* permanecerá constante. Análogamente, si sobre la Tierra se ejerciera una fuerza exterior (un momento exterior respecto al Sol), este momento no sería igual a la velocidad de variación del momento cinético de la Tierra sola, sino que sería igual a la velocidad de variación del momento cinético del sistema Tierra más Luna. Entonces, para un sistema de partículas que se ejercen interacción entre ellas solamente, tenemos

$$\sum \tau = \frac{dL}{dt} \quad (9-23)$$

donde  $L$  es el *vector* momento cinético total del sistema y  $\sum \tau$  es el *vector* momento resultante que se ejerce sobre el sistema.

Cuando el momento exterior es nulo, es decir, cuando la fuerza exterior es central o nula, el vector momento cinético total permanece constante en magnitud, dirección y sentido. Si la fuerza es nula, se conservan el momento cinético total y la cantidad de movimiento total, y se deduce que las contribuciones de los momentos cinéticos orbital y de spin permanecen constantes cada una de ellas. En consecuencia, en un choque en el que intervenga un sistema de partículas o un cuerpo rígido, estos principios de conservación pueden decirnos mucho acerca del resultado del choque.

**EJEMPLO.** Una haltera consiste en dos bolas  $A$  y  $B$ , cada una de masa  $m$ , sujetas a los extremos de una barra de longitud  $d$  de masa despreciable. La haltera se halla en reposo sobre una superficie horizontal exenta de rozamientos. Otra bola  $C$ , también de masa  $m$ , se mueve a lo largo de una recta perpendicular a la haltera con celeridad  $v_0$  y choca con  $B$  quedándose adherida, según se indica en la figura 9-28. Describir el movimiento del sistema después del choque.

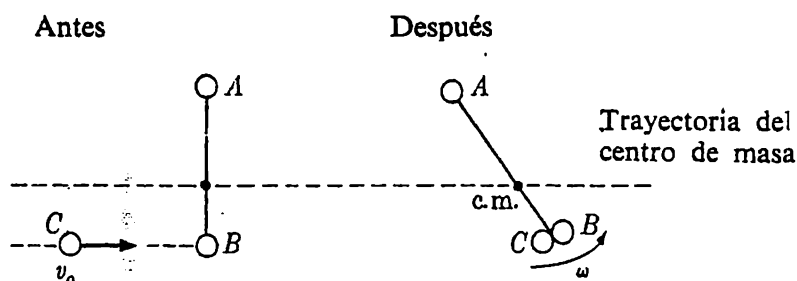


Figura 9-28

En este caso tenemos un sistema de partículas aislado (no hay fuerzas exteriores en el plano del movimiento) y la cantidad de movimiento total, así como el momento cinético total, permanece constante. La conservación de la cantidad de movimiento exige que el centro de masa del sistema recorra una recta con velocidad constante, lo cual puede obtenerse de la ecuación

$$mv_0 = 3mV, \quad V = \frac{v_0}{3}$$

Después del choque, el centro de masa se halla a una distancia  $d/3$  de  $B$ , y dicho punto tendrá un movimiento de traslación pura. El resto del sistema gira alrededor del centro de masa con una velocidad angular que puede determinarse a partir de la conservación del momento cinético. Antes del choque, solamente contribuía  $C$  al momento cinético. El brazo de palanca del sistema respecto al centro de masa es  $d/3$  y la magnitud del momento cinético es, pues,  $l = mv_0 d/3$ . Después del choque, el momento cinético es  $I_0 \omega$ , donde  $I_0$  es el momento de inercia del sistema respecto al centro de masa. Tenemos

$$I_0 = 2m \left( \frac{d}{3} \right)^2 + m \left( \frac{2d}{3} \right)^2 = \frac{2}{3} md^2$$

La velocidad angular se obtiene entonces de  $I_0\omega = mv_0 d/3$ ; es decir,

$$\omega = \frac{v_0}{2d}$$

Aun cuando la introducción formal del momento cinético y del momento de una fuerza como vectores se deduce de manera muy directa en el caso del movimiento en un plano, el familiarizarse plenamente con estas ideas y con la relación  $\tau = dL/dt$  requiere un estudio profundo de ejemplos específicos de movimientos en los que intervenga, por ejemplo, la Mecánica de los cuerpos rígidos en rotación. En el capítulo 13 volveremos a tratar problemas de este tipo.

### PROBLEMAS

9-1. Una masa de 2 kg se mueve de derecha a izquierda a lo largo de la recta  $y = 0,5$  m, con una velocidad  $v = -10$  m/s. (a) ¿Cuál es la componente según  $\theta$  de la cantidad de movimiento cuando la masa se halla en  $x = 0$ ,  $y = 0,5$ ?  $x = 0,5$ ,  $y = 0,5$ ?  $x = 6$ ,  $y = 0,5$ ?  $x = 100$ ,  $y = 0,5$ ? (b) ¿Cuánto vale el producto  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}$  en cada uno de estos puntos?

9-2. Nos referimos al problema 9-1. En el punto  $x = 1$ ,  $y = 0,5$  se da a la masa un impulso que la hace recorrer la recta  $x = 1$  m con una velocidad de 5 m/s. ¿Cuáles son los momentos cinéticos respecto al origen ( $x = 0$ ,  $y = 0$ ) antes y después del impulso? A partir de aquí, determinar la dirección del impulso.

9-3. Una partícula de 1 kg recorre el perímetro de un cuadrado de 1 m de lado, indicado en la figura 9-29. El momento cinético respecto a  $O$  permanece constante. El punto  $O$  se halla 20 cm por encima del lado inferior y sobre su mediatriz, teniendo la partícula en dicho lado una velocidad de 10 m/s. ¿Qué impulsos debe darse a la partícula en los vértices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ ?

9-4. Demostrar que las dimensiones de un momento cinético son el produc-

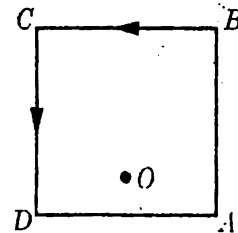


Figura 9-29

to de las dimensiones de un trabajo por la de un tiempo. ¿Cuáles son las unidades de momento cinético en los sistemas GIORGI, cgs y técnico o terrestre?

9-5. Una partícula de masa  $m$  recorre una circunferencia de radio  $R$  bajo la acción de la fuerza atractiva hacia un punto fijo  $O$ ,  $F = A/R^2$  ( $A$  es constante). El momento cinético de la partícula respecto a  $O$  es  $l$ . (a) ¿Cuál es el radio de la órbita circular en función de  $l$ ,  $m$  y  $A$ ? (b) Comprobar dimensionalmente el resultado.

9-6. Una partícula de 3 g está unida a un hilo ligero de 1 m de longitud. El otro extremo del hilo se ata a una espiga fija sobre una superficie exenta de rozamientos (véase fig. 9-30). Se da a la partícula una velocidad de 10 m/s y pasa a 10 cm de la espiga llevando detrás suyo al hilo. Cuando la partícula tensa el hilo,

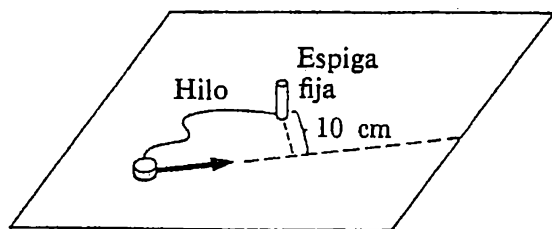


Figura 9-30

recorre una trayectoria circular. ¿Cuál es la velocidad angular de la partícula?

9-7. Según se indica en la figura 9-31, una partícula de masa  $m$  está unida al extremo de un hilo y recorre una trayectoria circular de radio  $r$  sobre una mesa horizontal exenta de rozamientos. El hilo pasa por un orificio de la mesa y su otro extremo se halla fijo al principio. (a) Si se tira ahora del hilo de manera que disminuya el radio de la órbita circular, ¿cómo variará la velocidad angular, si vale  $\omega_0$  cuando el radio es  $r_0$ ? (b) ¿Cuál es el trabajo realizado cuando se tira lentamente de la partícula haciéndola pasar de un radio  $r_0$  a otro  $r_0/2$ ? (Por tracción lenta queremos significar una tracción en la cual la velocidad radial del cuerpo es siempre despreciable frente a la velocidad transversa.)

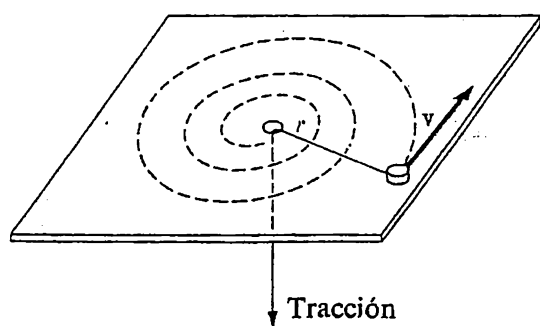


Figura 9-31

9-8. Consideremos un caso análogo al estudiado en el problema 9-7, pero ahora hagamos que el hilo se arrolle sobre un cilindro de revolución vertical

de radio  $R$ . (a) ¿Es constante, en este caso, el momento cinético de la partícula respecto al centro de la sección del cilindro coplanaria con la trayectoria? Discusión. (b) Si la partícula parte con velocidad  $v_0$  cuando la longitud libre del hilo es  $r_0$ , ¿cuál es el momento cinético de la partícula, respecto al centro de la sección del cilindro antes mencionada, cuando la longitud libre del hilo sea  $r$ ? Si se desea, puede considerarse  $r$  mucho mayor que  $R$ . Estudiar el trabajo realizado por el hilo sobre la partícula.

9-9. Una partícula se mueve a lo largo de la recta  $x = 100$  cm con  $v = 10$  cm/s. En el instante  $t = 0$ , la partícula se halla en  $y = -100$  cm. (a) ¿Qué área barre el radio vector en los intervalos de tiempo  $0 - 1$  s,  $4 - 5$  s,  $10 - 11$  s? (b) Si la partícula tiene una masa  $m = 3$  g, ¿cuál es su momento cinético? (c) ¿Cuál es la velocidad angular en los instantes  $t = 0, 4, 10$  y  $20$  s?

9-10. Un satélite recorre una órbita elíptica alrededor de la Tierra. Cuando corta al eje menor de la elipse, su velocidad es  $v_0$ . ¿Cuál es el período de revolución si los ejes mayor y menor de la elipse son  $2a$  y  $2b$ , respectivamente? (El área de la elipse es  $\pi ab$ .)

9-11. Nos referimos a la figura 9-10 del texto. Demostrar que el momento cinético total de las dos partículas en interacción puede expresarse en la forma

$$l = \mu d^2 \omega$$

donde  $\omega$  es la velocidad angular,  $\mu = m_a m_b / (m_a + m_b)$  es la masa reducida y  $d$  la distancia que separa las partículas.

9-12. Nos referimos a la figura 9-10 del texto. Sean iguales  $m_a = m_b$ , las masas de las partículas y sea  $d_0$  la longitud del resorte indeformado. Se pone en movimiento el sistema alargando le

resorte hasta la longitud  $2d_0$  y soltándolo luego, de manera que se dé a cada partícula una velocidad  $v$  perpendicular al resorte. (a) ¿Cuál es la velocidad angular del sistema en el instante en que la longitud del resorte es  $3d_0/2$ ? (b) ¿Cuál es entonces la componente radial de la velocidad de cada partícula? La constante del resorte es  $K$ .

9-13. Consideremos una persona sobre una plataforma giratoria, como se indica en la figura 9-11. En cada mano tiene una pesa. Moviendo adecuadamente los brazos puede girar desde una posición angular hasta otra, partiendo del reposo. Explicar cómo puede hacerse esto y cómo es compatible con el principio de conservación del momento cinético.

9-14. Dos patinadores, de 50 kg cada uno, se aproximan siguiendo caminos paralelos separados 3 m. Los patinadores llevan velocidades de igual dirección, sentidos opuestos y de módulos iguales a 10 m/s. El primer patinador transporta una pértiga ligera de 3 m de longitud y el segundo la agarra por el extremo al pasar (supóngase el hielo exento de rozamientos). (a) Describir, dando las velocidades pertinentes, el movimiento de los patinadores después de estar unidos por la pértiga. (b) Supongamos que uno de los patinadores va tirando de la pértiga hasta reducir a 1 m su distancia al otro patinador. ¿Cuál es entonces su movimiento? (c) Comparar las energías cinéticas del sistema correspondientes a las partes (a) y (b).

9-15. Dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  están unidas por un hilo de longitud  $d$  (despréciase la masa del hilo) y están en reposo sobre una mesa exenta de rozamientos con el hilo tenso entre ellas. Se da a la partícula  $m_2$  un impulso perpendicular al hilo, y por tanto una velocidad

inicial  $v_0$ . Se supone que el hilo proporciona una interacción central entre las partículas. (a) Describir el movimiento de los cuerpos después del impulso. (b) ¿Cuál es la tensión del hilo durante este movimiento?

9-16. Dos partículas  $A$  y  $B$  de masas  $m_a$  y  $m_b$  se hallan sobre una superficie horizontal exenta de rozamientos. Están unidas por un hilo flexible tenso que pasa a través de un anillo pequeño  $O$  sin rozamiento, que está fijo sobre la superficie. La partícula  $A$  se halla inicialmente a una distancia  $r_a$  de  $O$  y entonces, en el instante  $t = 0$  se le da un impulso perpendicular al hilo que hace que tome una velocidad  $v_0$ . (a) Determinar la velocidad de la partícula  $B$  en función de la distancia  $OA = r$ . (b) ¿Cuál es la tensión del hilo en función de  $r$ ?

9-17. Determinar el momento de inercia de una barra recta uniforme de longitud  $L$  y masa  $M$  respecto a un eje perpendicular a ella y que pase por uno de sus extremos (a) en forma aproximada, dividiendo la barra en tres partes iguales y tratándolos como puntos materiales con las masas concentradas en los centros de masa de los elementos, y (b) exactamente, por integración.

9-18. ¿Cuál es el momento de inercia de una varilla delgada que se ha curvado dándole la forma de circunferencia de radio  $R$ ? (El momento de inercia se refiere a un eje que pase por el centro del círculo y sea normal a su plano). ¿Por qué es mayor este momento de inercia que el que se tendría si la misma masa del material se hubiera transformado, martilleándola, por ejemplo, en un disco plano de radio  $R$ ?

9-19. ¿Cuáles son los radios de giro de los siguientes cuerpos: (a) disco uniforme de radio  $R$  respecto a un eje normal a él y que pase por su centro, (b)

varilla recta uniforme de longitud  $L$  respecto a un eje perpendicular a ella y que pase por un extremo, (c) varilla recta uniforme de longitud  $L$  respecto a un eje perpendicular a ella y que pasa por su centro?

9-20. Un cuerpo situado en un punto  $A$  en  $y = 3$  m,  $x = 0$  recibe un impulso  $J_x = -5$  kg·m/s. ¿Cuál es el momento cinético del cuerpo respecto al origen  $O$ , después del impulso? ¿y respecto a  $A$ ? ¿y respecto al punto  $x = 0$ ,  $y = 6$ ?

9-21. Un cuerpo que se halla inicialmente en reposo en el punto  $x = 2$  m,  $y = 0$  recibe un impulso  $J_y = 6$  kg·m/s en la dirección  $y$ . Posteriormente, cuando pasa el cuerpo por la posición  $A$ ,  $x = 2$  m,  $y = 5$  m, recibe otro impulso de componentes  $J_x = -4$  y  $J_y = -2$  kg·m/s (a) ¿Cuál es el momento cinético del cuerpo respecto al origen, después del segundo impulso? (b) ¿Cuál es el momento cinético respecto a  $A$ , después del segundo impulso?

9-22. Con referencia a la figura 9-18, demostrar que  $pd$ ,  $p_{\theta r}$ ,  $x p_y - y p_x$ , y  $|r| |p| \sin \phi$  son equivalentes.

9-23. Un cuerpo de 10 kg tiene una velocidad de 10 m/s dirigida formando un ángulo  $\theta = 30^\circ$  con el eje  $x$ . En un instante determinado, el cuerpo se halla en el punto  $x = 3$  m,  $y = 4$  m. (a) ¿Cuáles son las componentes  $x$  e  $y$  de la cantidad de movimiento del cuerpo? (b) Hallar el momento cinético a partir de cada una de las cuatro expresiones dadas en el problema 9-22.

9-24. En el texto hemos utilizado el símbolo  $x \rightarrow y$  para describir el sentido positivo del eje  $z$  en un sistema de coordenadas dextrorsum. Utilizando el mismo simbolismo expresar los sentidos positivos de (a) los ejes  $x$  e  $y$ , (b) el sentido del vector  $\mathbf{l}$  en función del radio vector  $\mathbf{r}$  y la cantidad de movimiento  $\mathbf{p}$ .

9-25. Una partícula tiene como componentes de la cantidad de movimiento  $p_x = 1$ ,  $p_y = 2$ ,  $p_z = 3$ , cuando pasa por el punto del espacio  $x = 4$ ,  $y = -5$ ,  $z = 3$ . (a) ¿Cuál es el momento cinético de la partícula respecto al origen? (b) ¿Cuál es la distancia del origen a la recta del movimiento? (c) ¿Respecto a qué punto, o puntos, es nulo el momento cinético?

9-26. Una partícula se mueve en un plano  $xy$  a lo largo de la recta  $x = 5$  con una cantidad de movimiento constante  $p_y = +10$  kg·m/s (a) ¿Cuál es el momento cinético de la partícula respecto al origen  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ , cuando la partícula se halla en  $x = 5$  m,  $y = 5$  m? Indicar todas las componentes del momento cinético. (b) Si se toma como punto de referencia  $z = +1$  m, ¿cuáles son las componentes según  $x$ ,  $y$ ,  $z$  del momento cinético? (c) ¿Cómo varía el momento cinético cuando pasa el punto de referencia de  $z = -\infty$  a  $z = +\infty$  a lo largo del eje  $z$ ? Estudiar, en forma análoga, los casos en que el punto de referencia se mueve a lo largo de los ejes  $x$  e  $y$ .

9-27. Sean  $\mathbf{A}$  un vector dirigido según el eje  $x$ ,  $\mathbf{B}$  según el eje  $y$ , y  $\mathbf{C}$  según el eje  $z$ . Indicar esquemáticamente las direcciones y sentidos de  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{C} \times \mathbf{B}$ ,  $-\mathbf{C} \times \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ ,  $\mathbf{C} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ ,  $\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{B})$ , y  $(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \times \mathbf{B}$ .

9-28. Una partícula se mueve en el plano  $x = x_0$  paralelo al plano  $yz$ . En el punto  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ , la magnitud de su cantidad de movimiento es  $p$  y forma un ángulo  $\theta$  con la dirección del semieje  $+y$ . (a) ¿Cuál es la magnitud del momento cinético respecto al origen? (b) Estudiar la magnitud del momento cinético en función del ángulo  $\theta$ .

¿Para qué ángulos es máxima y mínima la magnitud del momento cinético



y cuáles son los valores máximo y mínimo de  $I$ ? Discusión.

9-29. Un vector unitario es el que tiene un módulo igual a la unidad. Si representamos por  $i, j$  y  $k$  a los vectores unitarios cuyas direcciones y sentidos son, respectivamente, las de los semiejes  $+x, +y, +z$ , demostrar que  $i \times i = 0, j \times j = 0, k \times k = 0, i \times j = k, j \times k = i, k \times i = j$ . A partir de estas propiedades de los vectores unitarios, demostrar, por multiplicación vectorial término a término de los vectores  $A = A_x i + A_y j + A_z k$  y  $B = B_x i + B_y j + B_z k$  y aplicando la propiedad distributiva, que las componentes del producto vectorial  $C = A \times B$  son  $C_x = A_y B_z - B_y A_z, C_y = A_z B_x - B_z A_x, C_z = A_x B_y - B_x A_y$ .

9-30. Una recta en el espacio pasa por los dos puntos  $P_1(x_1 = 2, y_1 = -2, z_1 = 3)$  y  $P_2(x_2 = 1, y_2 = 3, z_2 = -2)$ . ¿Cuál es la distancia del origen a esta recta? (Sugerencia. ¿Cuál es el producto vectorial de los vectores correspondientes a  $P_1 P_2$  y  $OP_1$ ?)

9-31. Utilizando las componentes del producto vectorial dadas por las ecuaciones (9-10) del texto, demostrar la propiedad distributiva  $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$ , del producto vectorial. Utilícese este resultado para demostrar la relación  $L = L^* + R \times P$  [Ec. (9-16) del texto], por operación directa con los vectores.

9-32. Una varilla recta y uniforme de longitud  $d = 2$  m y masa  $M = 3$  kg desliza sobre un plano horizontal  $xy$ , de manera que su centro de masa se mueva con una celeridad  $V = 0,5$  m/s a lo largo de la recta  $y = 2d = 4$  m en el sentido positivo de las  $x$ . La barra gira en el sentido de las agujas del reloj con una velocidad angular  $\omega = 4$  rad/s. (a) ¿Cuál es el momento cinético total de la varilla respecto al origen  $x = 0,$

$y = 0$ ? (b) ¿Respecto a qué puntos es nulo el momento cinético total?

9-33. Consideremos la varilla del problema 9-32. Gira de nuevo con velocidad angular  $\omega = 4$  rad/s en un plano paralelo al  $xy$ . Pero ahora, el centro de masa se mueve en el plano  $yz$ , siguiendo la recta  $y = 2d$  en el sentido positivo de las  $z$ , con la celeridad  $V = 0,5$  m/s. (a) ¿Cuál es ahora el momento cinético respecto al origen? (b) ¿Existe algún punto respecto al cual sea nulo el momento cinético total?

9-34. Las partículas  $A, B$  y  $C$  se hallan sometidas a las fuerzas constantes  $F_a, F_b$  y  $F_c$ , respectivamente, cuyas componentes se consignan en la tabla siguiente

	$F_x$	$F_y$	$F_z$ (newtons)
$F_a$ :	0	3	4
$F_b$ :	2	-2	1
$F_c$ :	0	0	5

Las masas de las partículas, dadas en kilogramos, son  $m_a = 1, m_b = 2$  y  $m_c = 1$ . Las partículas parten del reposo en las posiciones iniciales ( $x_a = 3, y_a = 0, z_a = 0$ )  $x_b = 0, y_b = 2, z_b = 0$ , ( $x_c = 0, y_c = 0, z_c = 1$ ). (a) Describir el movimiento del centro de masa del sistema. (b) ¿Cuál es el momento cinético del sistema, en función del tiempo, respecto al origen ( $x = 0, y = 0, z = 0$ )? ¿Cuál es el momento cinético respecto al centro de masa?

9-35. Una partícula con una cantidad de movimiento  $p$  tiene un momento cinético  $I$  respecto a un punto fijo del espacio. La partícula recibe un impulso perpendicular a  $p$ . ¿Significa esto que el incremento correspondiente  $\Delta I$  de momento cinético sea perpendicular a  $I$ ? ¿Puede ser nulo  $\Delta I$  en estas condiciones? Discusión.

9-36. Un cuerpo de masa  $m = 2$  kg

recorre una circunferencia de radio  $R = 0,5$  m alrededor del origen y en el plano  $xy$ , con una celeridad igual a  $v = 5$  m/s. Recibe un impulso instantáneo en la dirección  $z$ , de magnitud  $J = 6$  N.s. ¿Cuál es el nuevo momento cinético de la partícula? Dense la magnitud, dirección y sentido.

9-37. Una fuerza tiene por componentes  $F_x = 2$  N,  $F_y = 3$  N y  $F_z = -4$  N. Está aplicada a un cuerpo rígido en un punto  $x = 2$  m,  $y = 1$  m,  $z = 3$  m. ¿Cuál es el momento (en magnitud, dirección y sentido) de la fuerza respecto al origen? Indicar la dirección y sentido del vector momento dando los ángulos que forma con los ejes de coordenadas.

9-38. Dos partículas  $A$  y  $B$ , de masa  $m$  cada una de ellas, situadas en  $x_a = a$ ,  $y_a = 2a$ ,  $z_a = -2a$  y  $x_b = 2a$ ,  $y_b = a$ ,  $z_b = 2a$ , están sometidas a la acción de una tercera partícula  $C$ , situada en el origen.  $A$  está atraída y  $B$  repelida por  $C$ , con fuerzas de magnitudes  $|F_a| = c/r_a^2$  y  $|F_b| = c/r_b^2$ , respectivamente. ¿Cuál es el momento resultante respecto al centro de masas del sistema, de las fuerzas que actúan sobre el sistema de partículas  $A$  y  $B$ , considerado como una unidad? Dése la magnitud, dirección y sentido del momento.

9-39. Operando con las componentes del producto vectorial dadas en las ecuaciones (9-10) del texto, demostrar que  $d(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{r} \times d\mathbf{p}/dt + (d\mathbf{r}/dt) \times \mathbf{p}$  y obtener  $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{l}/dt = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ .

9-40. Se monta una vía circular horizontal de masa  $M = 1,5$  kg y radio  $R = 0,5$  m sobre una rueda que puede girar (rozamientos despreciables) alrededor de su eje vertical fijo, como se indica en la figura 9-32. La masa de la rueda puede despreciarse. Sobre la vía parte del reposo una locomotora de juguete de masa  $m = 0,5$  kg y alcanza

pronto una celeridad constante  $v_0 = 2$  m/s, respecto al sistema del laboratorio. (a) ¿Cuál es entonces la velocidad angular de la rueda si parte del reposo? Indicar el sentido. (b) La locomotora va disminuyendo su velocidad y finalmente se detiene. ¿Cuál es la velocidad angular final de la rueda? (c) Si, en vez de mantenerla en posición mediante un eje fijo, la rueda se apoya sobre una superficie horizontal exenta de rozamientos, ¿cuál será el movimiento del sistema después de arrancar la locomotora? Describir este movimiento sin realizar un análisis detallado.

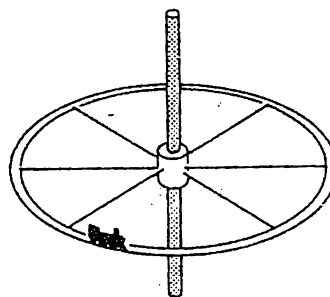


Figura 9-32

9-41. Cuando chocan dos cuerpos rígidos, el momento cinético de los cuerpos se mantiene constante. ¿Significa eso que las fuerzas de contacto entre los cuerpos pasan por el centro de masa de los cuerpos? Discusión.

9-42. ¿Es posible, en un choque entre cuerpos rígidos, que varíe el momento cinético de spin de uno de los cuerpos, sin que varíe el momento cinético de spin del otro?

9-43. ¿Es posible, en un choque entre dos cuerpos rígidos extensos que, después del choque, ambos cuerpos sólo tengan energía cinética de rotación en torno a sus centros de masa individuales? Si es así, dese un ejemplo.

9-44. Dos cuerpos pequeños, de masa  $m$  cada uno de ellos, están unidos por

un alambre rígido al que se ha dado la forma indicada en la figura 9-33. El sistema puede deslizar libremente sobre una mesa horizontal exenta de rozamientos. La masa del alambre es despreciable. Inicialmente, los cuerpos tienen un movimiento de traslación pura, de velocidad  $V$ . Entonces, el ganchito capta

un tercer cuerpo de masa  $2m$ , que estaba inicialmente en reposo. (Las tres masas pueden considerarse como puntos materiales.) Después de captar la tercera masa (a) ¿cuál es la velocidad del centro de masa del sistema? y (b) ¿Qué momento cinético de spin tendrá el sistema, y cuál es la velocidad angular?

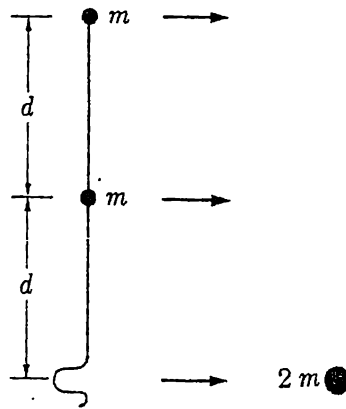


Figura 9-33

## EJEMPLOS DE FUERZAS Y MOVIMIENTO — III

*Resumen.* Partiendo de observaciones del movimiento de la Luna y prosiguiendo con el análisis de las leyes de Kepler del movimiento obtenemos la ley de Newton de la Gravitación Universal. En este análisis preliminar se suponen órbitas circulares. Se repasan las propiedades de la interacción gravitatoria (ausencia de «blindaje», independencia de la velocidad, etc.) y de la masa pesante. Sigue un análisis detallado de las leyes de Kepler en el que se demuestra que la órbita elíptica de un planeta implica una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Se le da después la vuelta al problema y se estudian las órbitas posibles de una partícula en un campo gravitatorio. A título de ejemplo, se determina la trayectoria de un satélite a partir de sus condiciones iniciales. Por último, se estudia brevemente el problema de una fuerza repulsiva inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, a tenor del experimento de Rutherford de la dispersión.

El movimiento de los planetas y de la Luna jugó un papel importante en el desarrollo de la teoría del movimiento y constituyó el fundamento de la formulación de la ley de la Gravitación Universal de NEWTON. La sucesión de acontecimientos que condujeron a esta importantísima ley trazaron un camino en el que intervinieron la mayoría de los pensadores mundiales y constituye un bello ejemplo de la marcha de la Física. Análogamente, el estudio de la desviación por los núcleos atómicos de las partículas cargadas (dispersión de Rutherford) ha tenido gran influencia en el desarrollo del pensamiento científico y ha marcado la apertura de una nueva era. Para este capítulo hemos seleccionado el estudio de estos ejemplos de fuerzas y movimiento.

**10-1 Ley de la Gravitación Universal.** *Interacción Luna-Tierra.* En el primer estudio de NEWTON acerca de la fuerza gravitatoria universal intervenía, según se registra en sus famosos *Principia*, una consideración del movimiento de la Luna y del movimiento de un cuerpo en el campo gravitatorio terrestre local. Había dicho GALILEO que todos los cuerpos caían con la misma aceleración en el campo gravitatorio local. NEWTON supuso que este resultado debía ser cierto en todo

lugar, de manera que si se pudiera tomar un objeto  $A$  situado en la posición de la Luna, caería hacia la Tierra con la misma aceleración que la Luna. En consecuencia, comparando la aceleración de la Luna y la aceleración de  $A$  situado en la superficie terrestre, podría obtenerse el cociente de las fuerzas gravitatorias que se ejercen sobre  $A$  en estas dos posiciones. A partir de observaciones del movimiento de la Luna, NEWTON encontró que su aceleración hacia la Tierra es tal que, si partiera del reposo, caería en un minuto una distancia de 4,60 m. Comparando este valor con la distancia correspondiente de caída en el campo gravitatorio local, llegó a la conclusión de que la fuerza gravitatoria que se ejerce sobre un cuerpo en la superficie terrestre es unas  $60^2$  veces mayor que la que se ejercería si se hallara ocupando la posición de la Luna. El cociente entre esos valores es muy aproximadamente igual a  $(R_2/R_1)^2$ , donde  $R_1$  es el radio terrestre y  $R_2$  es la distancia Tierra-Luna. Este resultado sugiere que la fuerza gravitatoria que se ejerce sobre un cuerpo de masa  $m$  es de la forma  $F \simeq Cm/r^2$ , donde  $r$  es la distancia del cuerpo al centro de la Tierra y  $C$  es una constante. Los experimentos de laboratorio acerca de la interacción entre un par de cuerpos han indicado que la fuerza que se ejerce sobre uno, es igual y opuesta a la que se ejerce sobre el otro. Así, si se quiere completar la analogía entre el movimiento del sistema Tierra-Luna y las fuerzas y movimiento en el laboratorio, deberemos suponer, decía NEWTON, que también atrae la Luna a la Tierra con una fuerza que corresponde a una aceleración de la Tierra hacia la Luna. Esta fuerza será, pues, proporcional a la masa de la Tierra y si representamos por  $m_1$  y  $m_2$ , a la masa terrestre y a la lunar, respectivamente, la ley de la Gravitación debería ser de la forma

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (10-1)$$

donde  $G$  es una constante. En realidad, esta constante no sólo es aplicable al sistema Tierra-Luna, sino que ha resultado ser una constante universal, según veremos más adelante.

*Interacción Sol-planeta. Análisis de las leyes de Kepler.* La ley de la Gravitación adquirirá una base más firme si demostramos, como hizo NEWTON, que la ecuación (10-1) es una consecuencia de la descripción de Kepler de los hechos experimentales referentes al movimiento planetario. Las tres leyes de KEPLER pueden resumirse mediante los siguientes enunciados:

1. Los planetas recorren órbitas elípticas en torno al Sol. Éste, en todos los casos, ocupa un foco de la elipse.
2. El radio vector que va del Sol al planeta, barre áreas iguales en tiempos iguales.
3. Los cuadrados de los períodos de revolución de los planetas alrededor del Sol, son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas.

Vamos a poner de manifiesto que estas tres leyes son compatibles con la ecuación (10-1). En el capítulo 9 vimos que cuando un cuerpo se mueve bajo la influencia de una fuerza central, se conserva el momento cinético. En estas condiciones, el movimiento del cuerpo se caracteriza por dos de las características contenidas en las leyes de KEPLER: el movimiento tiene lugar en un plano y el radio vector que parte del centro de fuerzas barre áreas iguales en tiempos iguales (véase fig. 10-1).

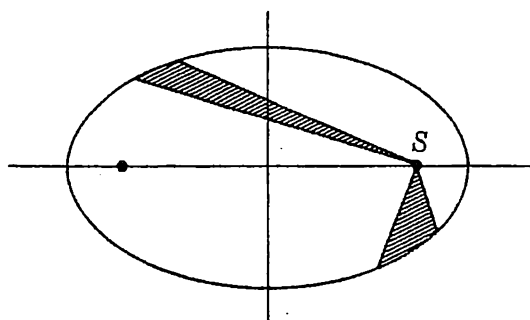


Fig. 10-1. Los planetas recorren órbitas elípticas, uno de cuyos focos  $S$  ocupa el Sol. El radio vector barre áreas iguales en tiempos iguales.

El área de una elipse de semiejes  $a$  y  $b$ , es  $\pi ab$ . Esta área total la barre el radio vector en un tiempo  $T$  igual al período de revolución del planeta (un año para la Tierra). Pero por la ley de KEPLER sabemos que el radio vector barre el área con velocidad areolar constante. Luego, en todo instante, tendremos

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\pi ab}{T} \quad (10-2)$$

Por otra parte, la cantidad  $dA/dt$  es  $r^2\omega/2$ , donde  $\omega$  es la velocidad angular  $d\theta/dt$ . Como el momento cinético puede escribirse en la forma  $mr^2\omega$ , vemos que la ecuación (10-2) implica un momento cinético constante, (véase también ec. 9-5).

$$l = 2m \frac{dA}{dt} = \frac{2\pi mab}{T} \quad (10-3)$$

Ésta, a su vez, significa que la fuerza que se ejerce sobre el planeta es central y está dirigida hacia el Sol.

Supongamos ahora que las órbitas planetarias son circulares (más adelante se considerarán las órbitas elípticas). Para que un planeta recorra una órbita circular alrededor del Sol, sobre aquél deberá ejercerse una fuerza  $F$ , dirigida hacia el Sol, de magnitud

$$F = m\omega^2 r = \frac{m4\pi^2 r}{T^2} \quad (10-4)$$

donde

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$

La masa del planeta es  $m$ ,  $r$  es el radio de su órbita, y  $T$  el período de revolución alrededor del Sol. En nuestra hipótesis de órbitas circulares,  $r$  es constante. La ecuación (10-2) no dice, entonces, nada acerca de cómo varía la fuerza con la distancia. La fuerza podría, por ejemplo, ser del tipo de resorte, incluso constante, o, dejando aparte lo ingenuo de la idea, estar ejercida por una cadena gigante. En cambio, la tercera ley de KEPLER contiene la información acerca de la dependencia de  $r$ , puesto que compara los comportamientos de los planetas a diversas distancias del Sol. Dice que para todos los planetas los cuadrados de los períodos de revolución son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores (radios en este caso). Es decir, experimentalmente tenemos

$$T^2 = C_1 r^3 \quad (10-5)$$

donde  $C_1$  es una constante que es la misma *para todos los planetas*. La expresión (10-4) relaciona el radio de la órbita y el período con la fuerza requerida, mientras que la ecuación (10-5) da la variación del período con el radio de la órbita. Combinando las dos relaciones, obtenemos  $F = m4\pi^2/C_1 r^2$ . Entonces, para que se cumplan las leyes de KEPLER, la fuerza que se ejerce sobre un planeta debe (a) ser proporcional a su masa inerte, (b) ser inversamente proporcional al cuadrado del radio de la órbita y (c) estar dirigida hacia el Sol.

Utilizando el mismo razonamiento acerca de la reciprocidad de las fuerzas de interacción entre dos cuerpos, como en el caso Tierra-Luna, llegamos a la ley de la Gravitación Universal dada por la ecuación (10-1). Esta ley ha demostrado ser compatible con las observaciones de caída de cuerpos en la superficie terrestre, de la interacción Tierra-Luna y del movimiento planetario, y se supone que tiene validez general. En otras palabras, siempre que dos cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$  estén separados una distancia  $r$ , se atraen con una fuerza dada por la ecuación (10-1). Cuando se da la ley de esta manera, queda implícito que las dimensiones de los cuerpos en interacción son pequeñas frente a  $r$ . Si los cuerpos son ambos esféricos, o si uno de ellos es una esfera grande (por ejemplo, la Tierra) y el otro es pequeño frente a  $r$ , sigue siendo aplicable la ecuación (10-1), según puede demostrarse fácilmente utilizando el Cálculo Integral (véase apéndice C). (Las contribuciones de NEWTON al Cálculo Integral son posteriores a sus trabajos acerca de la gravitación.)

*Determinación de  $G$ .* Recordemos que, para el movimiento planetario, la relación  $T^2 = C_1 a^3$ , obtenida a partir de las leyes de KEPLER era válida para todos los planetas. Según la hipótesis formulada para la ley de la fuerza, tenemos  $C_1 = 4\pi^2/Gm_s$ , donde  $m_s$  es la masa del Sol. Por tanto, al menos para todos los

planetas,  $G$  es una constante. A partir de estas consideraciones solamente, no podemos determinar  $G$ , ya que no tenemos manera de hallar la masa del Sol. Análogamente, a partir de medidas de  $g$  y del radio terrestre, podemos hallar  $Gm_t$ , pero no pueden hallarse por separado  $G$  y la masa  $m_t$  de la Tierra. Así pues, para poder determinar  $G$  deberemos estudiar la fuerza producida por una masa conocida. Los primeros investigadores (hacia el año 1750) intentaron medir  $G$  estudiando la influencia de una montaña (o de otra masa natural) sobre el período de un péndulo, cuando se colocaba éste encima o al lado de la montaña. La masa total y la forma de la montaña se estimaban mediante triangulaciones y estudios geológicos. En otros experimentos análogos se comparaban los períodos de péndulos situados en la superficie de la Tierra y en el fondo de una mina. Aun cuando muchos de estos estudios tenían como primer objetivo la medida de la masa de la Tierra, el conocimiento de ésta daba  $G$  si se conocía  $g$ .

La primera medida de la fuerza gravitatoria entre objetos de laboratorio fue realizada en Inglaterra en 1797, por CAVENDISH. En la figura 10-2 puede verse el principio del experimento de Cavendish. En los extremos de una varilla se montaron dos cuerpos  $A$  y  $B$ , estando aquella suspendida por un punto medio por un alambre muy delgado. Se colocaron grandes esferas de plomo en las posiciones 1 y 4 y luego en las posiciones 2 y 3. Las fuerzas atractivas entre los cuerpos suspendidos y las esferas hicieron girar la varilla, provocando una ligera torsión del alambre. El movimiento del sistema como péndulo de torsión sirvió para medir la constante del momento de torsión del alambre, y se pudo medir por tanto la fuerza atractiva entre los cuerpos ( $A$  y  $B$ ) y las esferas de plomo. Posteriormente se han realizado medidas más precisas, pero enteramente análogas, por ejemplo, en el National Bureau of Standards de los Estados Unidos. El valor de  $G$  así obtenido es

$$G = (6,67 \pm 0,005) \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \quad (10-6)$$

Una vez establecido el valor de  $G$ , pueden obtenerse la masa de la Tierra y la masa del Sol. En realidad, para todo planeta que tenga una luna propia, podrá obtenerse la masa de aquél, pues sólo se precisa conocer el período de revolución y la distancia entre el planeta y su luna, cantidades fáciles de medir.

Hemos mencionado anteriormente que los planetas se ejercen fuerzas entre sí y, por tanto, su movimiento no será exactamente el que sería de prever si sólo se movieran bajo la influencia del Sol. Las desviaciones respecto a las órbitas elípticas son muy pequeñas pero, no obstante, son mensurables. A estas desviaciones se les da el nombre de *perturbaciones* y han proporcionado muchas orientaciones importantes y otros procedimientos para la medida de las masas planetarias. La existencia de Neptuno y de Plutón se previó gracias a las perturbaciones que producían en el movimiento de planetas próximos.



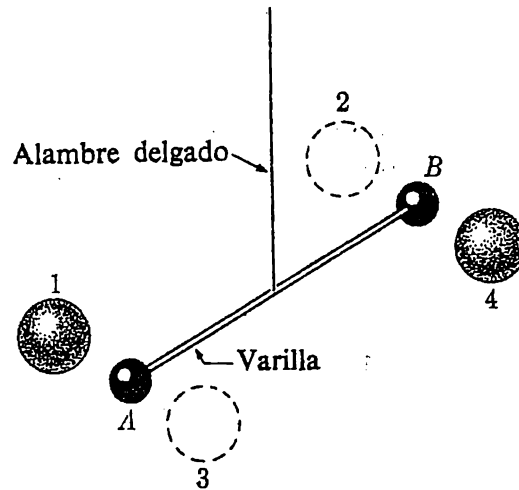


Fig. 10-2. Experimento de Cavendish. Los cuerpos *A* y *B* están atraídos por las esferas de plomo situadas primeramente en 1 y 4 y luego en 3 y 2.

**10-2 Propiedades de la interacción gravitatoria.** En el estudio realizado en el capítulo 3 acerca del campo gravitatorio local, mencionábamos que la propiedad de la materia a la que se consideraba responsable de la fuerza gravitatoria se le llama *masa pesante*. Se indicaba que esta propiedad, medida en función del peso de un cuerpo, resultaba ser proporcionalmente a la masa inerte. La evidencia experimental de este resultado residía en el hecho de que todos los cuerpos caen con la misma aceleración en el campo gravitatorio local. En el desarrollo de la ley de la Gravitación universal, la evidencia experimental correspondiente a este resultado es la universalidad de  $G$ ; es la misma para todos los cuerpos, independientemente de su composición, color, formas, etc. Se han proyectado numerosos experimentos destinados a determinar la influencia de diversos factores sobre la atracción gravitatoria, pero, hasta ahora, todos esos experimentos han resultado negativos; el único factor importante parece ser la masa del cuerpo. El mismo NEWTON realizó numerosos experimentos con péndulos con el fin de comprobar la relación entre peso e inercia; en otras palabras, la proporcionalidad entre las masas pesante e inerte. Comparó los períodos de péndulos de igual longitud, pero constituidos por materiales diferentes, sin hallar diferencia alguna, dentro de los errores experimentales.

Debe observarse que la fuerza gravitatoria no depende de las velocidades relativas de los cuerpos en interacción. En la ley de la fuerza no interviene la velocidad de los planetas. Tampoco depende la fuerza gravitatoria de la composición del medio interpuesto entre los cuerpos en interacción, resultado que establece una diferencia entre la interacción gravitatoria y la interacción eléctrica. Sabemos, por ejemplo, que el campo eléctrico puede blindarse mediante una pantalla conductora («jaula de Faraday») y que el campo magnético se puede

desviar notablemente con un pedazo de hierro. En el campo gravitatorio no aparecen los fenómenos correspondientes. Aparentemente, no hay manera de «blindar» un objeto del campo gravitatorio.

Podría sospecharse que una esfera de un material tal como el cuarzo cristalino o la madera, que tenga una estructura con una orientación definida, tuviera un campo gravitatorio de fuerzas diferente para las diferentes direcciones. No se ha observado nunca ningún efecto de ese tipo.

El campo gravitatorio no depende de la temperatura. También se han realizado experimentos de gran precisión para determinar cualquier efecto, pero los resultados han sido negativos.

Ninguno de los experimentos mencionados anteriormente, ni otros análogos, han podido alterar la hipótesis inicial de que la interacción gravitatoria sólo depende de la masa.

**10-3 Campo gravitatorio en el interior de una esfera homogénea.** Ya hemos indicado que la ley de la Gravitación expresada por la ecuación (10-1) sólo es aplicable cuando las dimensiones de los objetos en interacción son pequeñas frente a  $r$ . Si no se cumple esta condición, el cálculo de la fuerza de interacción exige la suma de las contribuciones a la fuerza debidas a los diversos elementos del cuerpo. En el apéndice C se realiza un cálculo de este tipo para determinar la fuerza gravitatoria que ejerce una esfera sobre un objeto pequeño *exterior* a la esfera. En este caso particular, el resultado es muy sencillo; la fuerza es la misma que se tendría en el caso de que toda la masa de la esfera se hallara concentrada en su centro. Se obtiene un resultado análogo en el caso de la fuerza en el *exterior* de una capa esférica. En cambio, en el interior de dicha capa el resultado es totalmente diferente y puede demostrarse fácilmente que en todos los puntos interiores a la capa, la fuerza gravitatoria originada por ésta es nula.

Este resultado es inmediato para el caso de un punto  $P_1$  situado en el centro de la capa, ya que dicho punto se halla sometido a la acción de fuerzas iguales dirigidas en todas direcciones. También es cierto para una situación arbitraria  $P_2$ . Para obtener la fuerza que se ejerce sobre  $P_2$ , podemos dividir la capa en elementos  $dm_1$  y  $dm_2$ , como los indicados en la figura 10-3, y hallamos que la fuerza resultante debida a cada uno de dichos pares es nula ya que  $dm_1/r_1^2 = dm_2/r_2^2$ . (El área de la superficie de capa correspondiente a un ángulo sólido elemental  $d\Omega_1$  es proporcional a  $r_1^2$ .)

Una vez obtenido este resultado, podemos pasar a calcular la fuerza gravitatoria que se ejerce sobre un objeto situado en el interior de una esfera uniforme. Haciendo referencia a la figura 10-4, consideremos una esfera uniforme de radio  $R$  con un punto  $P$  situado a una distancia  $r$  del centro. Por el principio de superposición, la fuerza que se ejerce sobre  $P$  (masa  $m$ ) puede considerarse como suma de las fuerzas ejercidas por la capa esférica entre los radios  $r$  y  $R$ , más la ejercida

por la esfera de radio  $r$ . Acabamos de demostrar que la primera contribución es nula, y la contribución de la esfera no es mas que  $Gm_r m/r^2$ , donde  $m_r$  es la masa de la esfera de radio  $r$ . Si es  $M$  la masa total de la esfera, tenemos  $m_r = (r/R)^3 M$ , y la fuerza que se ejerce sobre  $P$  será

$$F_r = -G \frac{r^3}{R^3 r^2} M m = -\frac{GMm}{R^3} r, \quad (r < R)$$

En otras palabras, la fuerza que se ejerce sobre  $m$  crece proporcionalmente a su distancia al centro de la esfera y alcanza el valor máximo  $GMm/R^2$  en la superficie de la esfera. Cuando  $r$  se hace mayor que  $R$ , la fuerza que se ejerce sobre  $m$  disminuye, siendo proporcional a  $1/r^2$ .

Por lo que respecta a su dirección y dependencia de la distancia, la fuerza en el interior de la esfera es análoga a la fuerza del tipo de resorte, porque actúa como fuerza restauradora proporcional al desplazamiento  $r$  de su posición de equilibrio. La constante del resorte equivalente es  $K = GMm/R^3$ . Imaginemos un túnel exento de rozamientos que atraviese la Tierra por su centro y en el que se deje caer un cuerpo desde la superficie terrestre. El cuerpo realizará un movimiento armónico de período  $T = 2\pi\sqrt{m/K} = 2\pi\sqrt{R^3/MG}$  independiente de la masa del cuerpo. Si introducimos la densidad  $\rho$  de la esfera que cumple con

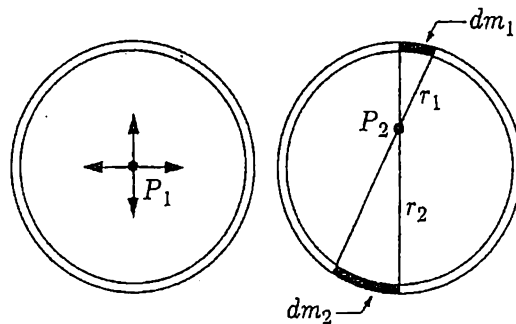


Fig. 10-3. La fuerza gravitatoria en el interior de una capa uniforme es nula.

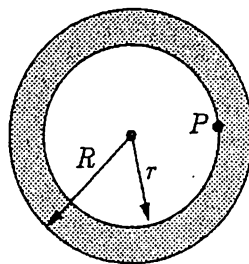


Fig. 10-4. La fuerza gravitatoria en el interior de una esfera uniforme es proporcional a la distancia al centro de la esfera.

$M = (4\pi/3)R^3\rho$ , obtenemos  $T = \sqrt{3\pi/\rho G}$ , que sólo depende de la densidad y de la constante universal  $G$ . La densidad de la Tierra es aproximadamente igual a  $5,5 \text{ g/cm}^3$  y con  $G = 6,7 \cdot 10^{-8} \text{ dyna} \cdot \text{cm}^2/\text{g}^2$ , obtenemos  $T \simeq 5 \cdot 10^3 \text{ s} \simeq 1\frac{1}{2} \text{ h}$ . Dejamos como ejercicio demostrar que el período de oscilación será el mismo para cualquier túnel recto que una dos puntos cualesquiera de la superficie terrestre (prob. 10-11).

**10-4 Deducción de la ley de la Gravitación a partir de la órbita elíptica de un planeta.** En el apartado 10-1, la deducción de la ley de la Gravitación Universal a partir de las leyes de KEPLER se basaba en la hipótesis de órbitas circulares. Para obtener la ley de la fuerza, teníamos que echar mano de observaciones experimentales de distintos planetas que seguían órbitas de radios diferentes. Vamos a considerar ahora las órbitas elípticas de los planetas. Evidentemente,  $r$  no se mantiene constante y podremos obtener cómo depende de  $r$  la fuerza, del hecho único de que la órbita es elíptica.

Repasemos la descripción matemática de la elipse. En la figura 10-5 puede verse una elipse con uno de sus focos situados en el origen de un sistema de coor-

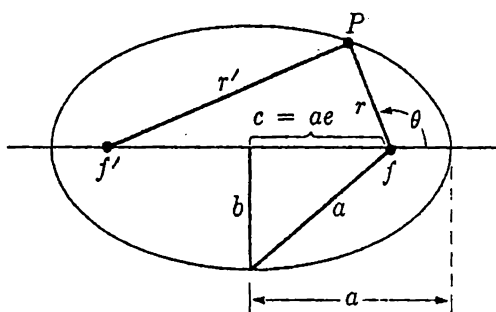


Fig. 10-5. Elipse. La distancia  $a$  es el semieje mayor y  $b$  es el semieje menor. La forma de la elipse es tal que la distancia  $r + r' = 2a$  para todo punto  $P$  de la curva. Recordemos que puede dibujarse una elipse con ayuda de una cuerda de longitud  $2a$  cuyos extremos se fijan en los focos. Moviendo un lápiz de manera que mantenga siempre tensa la cuerda, se dibujaría una elipse.

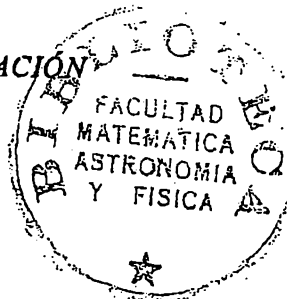
denadas. La distancia del centro de la elipse al extremo más alejado recibe el nombre de semieje mayor  $a$  y la curva es tal que se verifica  $r + r' = 2a$ , hallándose en la figura los focos en los puntos  $f$  y  $f'$ . La ecuación polar de la elipse\* es

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} = \frac{b^2/a}{1 + e \cos \theta} \quad (10-7)$$

\* Véase GEORGE B. THOMAS, JR., *Calculus and Analytic Geometry*, 3a. ed. Cap. 9, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts.

donde  $e$  es la excentricidad y, de la figura, tenemos

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$$



Esta descripción de la elipse de la ecuación (10-7) se ha hecho en función de las coordenadas polares  $r, \theta$ , cuyo empleo es particularmente conveniente cuando se trate una fuerza central (que la fuerza es central se deduce de la segunda ley de KEPLER —véase el apart. 10-1). En tal caso, la fuerza sólo tiene componente en la dirección  $r$  y el problema estriba en calcular esta fuerza a partir de la trayectoria conocida. En la figura 10-6 se indican las componentes de la velocidad  $v_\theta = \omega r$  y  $v_r = dr/dt$ . En el caso de una circunferencia, en que  $r$  permanece constante, la velocidad sólo tiene componente transversa y sabemos que la aceleración tiene por valor  $\omega^2 r$  es radial y está siempre dirigida hacia el centro, siendo  $\omega = d\theta/dt$ . Como ahora varía el radio, la velocidad tendrá una componente radial  $v_r = dr/dt$  y una contribución  $d^2r/dt^2$  a la aceleración radial. En consecuencia, la fuerza radial es

$$F_r = m \frac{d^2r}{dt^2} - m\omega^2 r \quad (10-8)$$

Ahora no tenemos más que combinar la  $r$  de la ecuación (10-7) con la ecuación (10-8) y comprobar que, efectivamente, la fuerza es inversamente proporcional a  $1/r^2$ . Aunque el problema no tiene dificultad conceptual, es relativamente laborioso.

Podemos calcular inmediatamente el segundo término de la ecuación (10-8). La velocidad angular  $\omega$  varía con  $r$ , pero la segunda ley de KEPLER nos dice que el momento cinético  $l$  es constante. Tenemos  $l = mr^2\omega = \text{const.}$  y  $\omega = l/mr^2$ , con lo que el segundo término de la ecuación (10-8) es  $m\omega^2 r = l^2/mr^3 = (l^2/m)u^3$ , donde  $u$  es  $1/r$ . La ecuación de la elipse queda más sencilla en función de  $u$  que en función de  $r$ . Tenemos  $u = (a/b^2)(1 + e \cos \theta)$ .

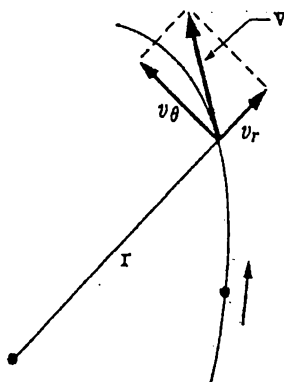


Fig. 10-6. Componentes polares d. la velocidad.

El cálculo del segundo término,  $d^2r/dt^2$ , nos obliga a echar mano de nuestros conocimientos de cálculo infinitesimal. Tenemos  $dr/dt = (dr/d\theta)(d\theta/dt) = (dr/d\theta)\omega = (dr/d\theta)(l/m)u^2$ , donde hemos utilizado la expresión  $\omega = (l/m)u^2$ .

Obsérvese que  $dr/d\theta = d(1/u)/d\theta = -(1/u^2)(du/d\theta)$ , y hallamos que  $dr/dt$  es, simplemente,  $-(l/m)(du/d\theta)$ . Derivando de nuevo respecto al tiempo, tenemos  $d^2r/dt^2 = -(l/m)(d^2u/d\theta^2)(d\theta/dt) = -(l/m)^2(d^2u/d\theta^2)u^2$ . Por tanto, la expresión (10-8) de la fuerza radial se convierte en

$$F_r = -\frac{l^2}{m} u^2 \left( u + \frac{d^2u}{d\theta^2} \right) \quad (10-8a)$$

Con  $u = (a/b^2)(1 + e \cos \theta)$ , tenemos entonces  $d^2u/d\theta^2 = -(ae/b^2) \cos \theta$  y  $u + d^2u/d\theta^2 = a/b^2$ . Por tanto

$$F_r = -\frac{l^2}{m} \frac{a}{b^2} u^2 = -\frac{l^2}{m} \frac{a}{b^2} \frac{1}{r^2} \quad (10-9)$$

que demuestra que la fuerza es inversamente proporcional a  $1/r^2$ .

Podemos pasar a determinar el período del planeta. El área de la elipse es  $\pi ab$ , y por la ecuación (10-3) tenemos  $T = 2m\pi ab/l$ . Si en la ecuación (10-9) hacemos  $l^2 a / mb^2 = K$ , es decir,  $F_r = -K/r^2$ , tenemos

$$b^2 = \frac{l^2}{m} \frac{a}{K} \quad (10-10)$$

y sustituyendo ésta en la expresión de  $T$  se tiene

$$T^2 = \frac{4m\pi^2}{K} a^3 \quad (10-11)$$

Según la tercera ley de KEPLER, tenemos  $T^2 = (\text{const}) a^3$  para *todos* los planetas y ello significa que  $K/m$  debe ser igual para todo planeta de masa  $m$ . Si utilizamos  $F_r = -K/r^2 = -GM_s m/r^2$ , podemos ver que  $K/m$  no es sino  $GM_s$ . La tercera ley de KEPLER implica, por tanto, que  $G$  sea una constante universal. Esto completa la deducción de la ley de la Gravitación a partir de las leyes de KEPLER.

**10-5 Órbitas en el campo de fuerzas gravitatorio.** En el apartado anterior partimos de una trayectoria elíptica dada de un cuerpo y a partir de ella demostrábamos que la fuerza que se ejercía sobre el cuerpo era del tipo  $(1/r^2)$ . Si invertimos el problema y buscamos la trayectoria de un cuerpo que se mueve en un campo gravitatorio dado, es evidente que una de las posibles soluciones debe ser una elipse. Sin embargo, también son posibles otras órbitas.

Ya vimos en el capítulo 7 que el carácter de la órbita depende esencialmente de la energía mecánica total. Recordemos que con una energía potencial  $V$  ele-

gida nula en el infinito, tenemos  $V = -K/r$  y que la energía mecánica total es, entonces,

$$H = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{K}{r} \quad (10-12)$$

donde  $K = GmM$  ( $M$  es la masa del generador del campo y  $m$  es la masa del cuerpo móvil). Según se ilustró en la figura 7-6, hallamos que las órbitas atrapadas del cuerpo están caracterizadas por  $H < 0$ , mientras que cuando  $H > 0$  el cuerpo puede escapar. Dejaremos para el apéndice D el problema matemático detallado de deducir las órbitas a partir del campo de fuerzas, y allí se demostrará que las únicas órbitas atrapadas son elipses (o circunferencias) ( $H < 0$ ) y las órbitas de escape son hipérbolas ( $H > 0$ ) o parábolas ( $H = 0$ ).

Un problema de interés especial es el que se refiere a la determinación de la órbita de un satélite lanzado a una velocidad conocida desde una posición conocida en el campo gravitatorio. Vamos a considerar el caso en que  $H < 0$ , es decir, cuando tenemos una órbita elíptica. En la figura 10-7 puede verse una órbita elíptica ordinaria. Cuando la partícula pasa por uno de los extremos  $B$  del eje menor de la elipse, la distancia al centro de fuerzas es  $r = a$  (véase fig. 10-5). Representemos por  $v_a$  la velocidad de la partícula en ese punto. La velocidad areolar constante de la partícula puede ponerse en la forma  $v_a b/2$ , donde  $b$  es el semieje menor. Como el área de la elipse es  $\pi ab$ , el período del movimiento resulta ser

$$T = \frac{\pi ab}{(v_a b/2)} = \frac{2\pi a}{v_a} \quad (10-13)$$

Este resultado pone de manifiesto la interesante propiedad del movimiento de que el período, expresado en función de  $v_a$ , no depende de la longitud del eje menor ni de la excentricidad de la elipse. *Todas las* órbitas elípticas (incluidas las circulares), cuyos ejes mayores sean iguales y para las cuales  $v_a$  sea la misma,

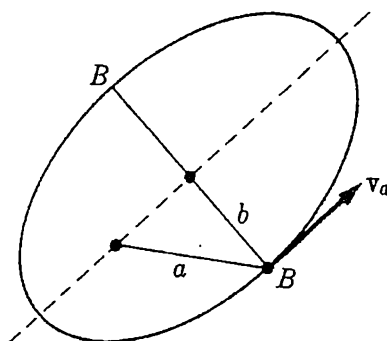


Fig. 10-7. Expresado en función de  $v_a$  el período del movimiento orbital es  $T = 2\pi a/v_a$ , es decir, es independiente del eje menor.

tienen periodos iguales. Con órbitas circulares podemos, desde luego, calcular este período aplicando  $mv_a^2/a = K/a^2$ , para obtener

$$T = 2\pi\sqrt{m/K} a^{3/2} = 2\pi (GM)^{1/2} a^{3/2} \quad (10-14)$$

Así pues, el período orbital alrededor de una masa  $M$  sólo depende del eje mayor de la elipse. [Compárese con la tercera ley de KEPLER y también con la ecuación (10-11).]

La energía potencial de la partícula en un punto  $B$ , donde  $r = a$ , es  $V_a = -K/a$ , y la energía mecánica total constante del movimiento puede expresarse en la forma  $H = (-K/a) + (mv_a^2/2)$ . Introduciendo el valor de  $v_a$  hallado a partir de (10-13) y (10-14), o directamente de  $mv_a^2/a = K/a^2$ , obtenemos

$$H = -\frac{K}{2a} \quad (10-15)$$

En otras palabras, la energía mecánica total del movimiento queda determinada unívocamente por el eje mayor de la elipse. Inversamente, las longitudes de los ejes mayores de todas las órbitas elípticas de igual energía mecánica total son iguales e iguales a

$$a = -\frac{K}{2H} = -\frac{GMm}{2H} \quad (10-16)$$

(Recordemos que  $H$  es negativa para órbitas atrapadas, por lo que  $-K/2H$  es una cantidad positiva).

Para obtener el eje menor de una órbita elíptica, observaremos que el momento cinético constante es  $l = mv_a b$ , lo cual da  $b = l/mv_a$ . Introduciendo  $v_a = \sqrt{K/ma} = \sqrt{-2H/m}$ , tenemos

$$b = \frac{l}{\sqrt{-2Hm}} \quad (10-17)$$

Así hemos determinado las propiedades fundamentales de la órbita elíptica en función de las dos constantes del movimiento: la energía mecánica total  $H$  y el momento cinético  $l$ . Éstas se obtienen fácilmente a partir de las condiciones iniciales de la partícula. Por ejemplo si, como en la figura 10-8, se lanza una partícula desde un punto  $P$  con una velocidad  $v_1$  en una dirección que forme un ángulo  $\phi_1$  con el radio vector  $r_1$  trazado desde el centro de fuerzas (p. e. la Tierra), tenemos

$$H = \frac{-K}{r_1} + \frac{mv_1^2}{2} \quad \text{y} \quad l = mv_1 r_1 \sin \phi_1 \quad (10-18)$$



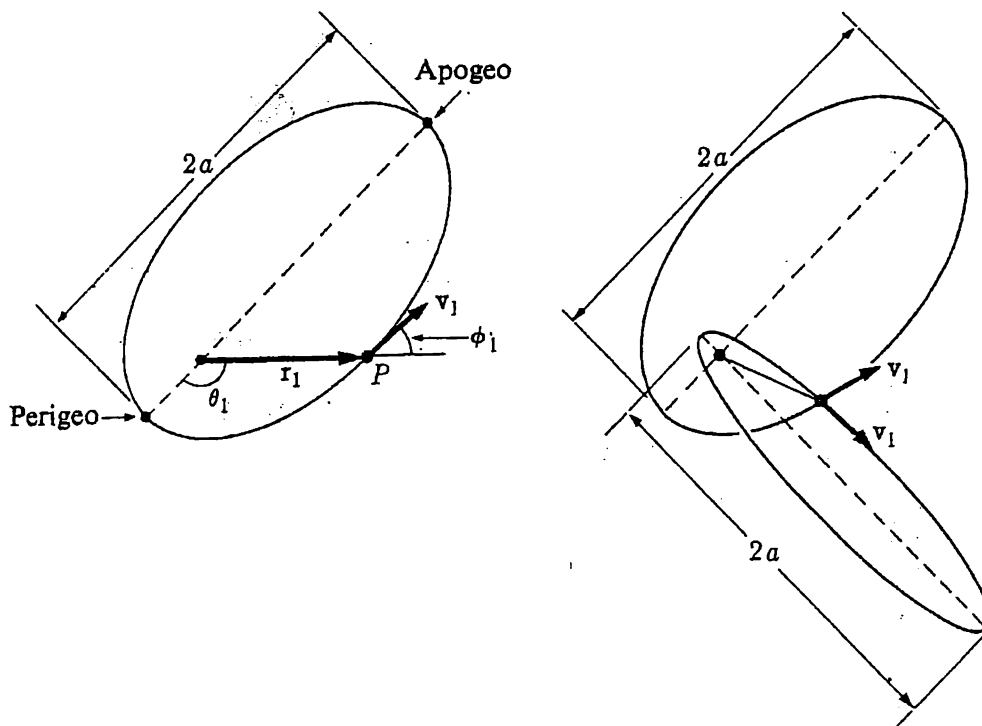


Fig. 10-8. Las longitudes de los ejes mayores sólo dependen de la magnitud y no de la dirección de la velocidad inicial.

Queda por determinar la orientación de los ejes de la elipse. Podemos hacerlo con ayuda de la expresión 10-7 de la elipse. Midiendo el ángulo  $\theta_1$  de la figura 10-8, obtenemos

$$r_1 = \frac{b^2/a}{1 + e \cos \theta_1} \quad \text{o sea} \quad \cos \theta_1 = \left( \frac{b^2}{ar_1} - 1 \right) \frac{1}{e} \quad (10-19)$$

Así pues, a partir de los valores iniciales dados de  $v_1$ ,  $r_1$  y  $\phi_1$ , obtenemos las constantes del movimiento  $l$  y  $H$  de las ecuaciones (10-18), los ejes mayor y menor de la elipse de las ecuaciones (10-16) y 10-17), y por último la orientación de la elipse de la ecuación (10-19) (prob. 10-17).

**10-6 Dispersión de Rutherford.** En el apartado anterior hemos estudiado el movimiento de una partícula sometida a la influencia de una fuerza atractiva que disminuye al aumentar la distancia, siendo inversamente proporcional al cuadrado de ésta. Vamos a considerar ahora ciertos aspectos del problema correspondiente en el que interviene la repulsión de dos partículas de igual carga eléctrica.

Hacia 1910 se estableció sin lugar a dudas la naturaleza atómica de la materia. Se conocían (por Química) las masas atómicas y se sabía (tanto por Química

como por la Teoría Cinética de los gases) que las dimensiones de los átomos eran del orden de  $10^{-8}$  cm. Se habían medido la masa y la carga del electrón y se sabía que los electrones eran uno de los constituyentes de los átomos. Se conocían algunos hechos experimentales que indicaban que el número de electrones de un átomo era aproximadamente igual a la mitad de su masa atómica. Recordemos que las masas atómicas se basan en asignar 12 al carbono, con lo que el hidrógeno (que es el más ligero de los átomos) tenía un valor muy aproximadamente igual a 1. Se conocía la desintegración radiactiva de los átomos y a los rayos emitidos se les llamó rayos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ . Vamos a ocuparnos solamente de los rayos  $\alpha$ , de los cuales sabemos tienen una carga eléctrica positiva igual al doble del valor absoluto de la carga del electrón, y que tiene una masa cuádruplo de la del átomo de hidrógeno, muy aproximadamente.

Quedaban sin contestar, desde luego, muchas preguntas acerca de los átomos, y aún hoy en día las hay. Algunas de las preguntas más interesantes en 1910 eran las siguientes:

(a) Los átomos son, de ordinario, eléctricamente neutros. Se sabía que los electrones, únicos constituyentes de los átomos identificados y estudiados, tenían carga negativa. ¿Qué había en el átomo que tuviera carga positiva?

(b) Se sabía que la masa del electrón era unas 2000 veces menor que la del átomo de hidrógeno. ¿Qué había en un átomo que le hiciera tener una masa relativamente tan grande?

(c) ¿Cómo estaban distribuidos en el átomo los electrones, la carga positiva y la masa? ¿Ocupaban los electrones posiciones fijas definidas? ¿Era el átomo una pasta homogénea de carga y masa? En pocas palabras, ¿cuál sería un *modelo* satisfactorio para el átomo?

Durante varios años el Profesor ERNEST RUTHERFORD y sus colaboradores y alumnos de la Universidad de Manchester, en Inglaterra, habían estudiado la desintegración radiactiva de los átomos y los rayos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  emitidos. En uno de sus experimentos figuraba un dispositivo análogo al representado esquemáticamente en la figura 10-9. Se vio que la mayoría de las partículas se desviaban muy poco al atravesar la hoja. Sin embargo, se hallaban a veces partículas desviadas un ángulo muy grande que, en algunas ocasiones constituían un verdadero retroceso de la partícula a la cual correspondía un valor de  $\theta$  próximo a los  $180^\circ$ .

Hemos visto en los capítulos 4 y 5 que una partícula pesada que choque elásticamente con otra ligera no será desviada un ángulo grande. La partícula ligera será empujada simplemente, mientras que la pesada proseguirá su movimiento desviándose muy poco. Luego, si las partículas  $\alpha$  se desvían un ángulo grande, es porque a veces deben chocar con algo muy pesado, que podemos pensar son las partes masivas del átomo a que antes hicimos referencia.

Si el átomo fuera una pasta homogénea de masas y cargas, la fuerza eléctrica tendría que ser muy débil en todos los puntos, ya que los efectos de las cargas

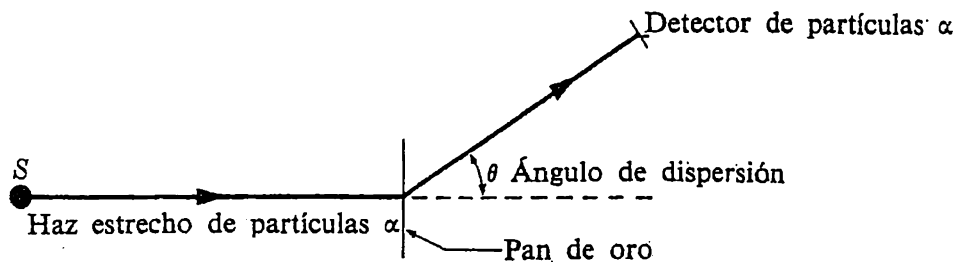


Fig. 10-9. Dispersión de las partículas  $\alpha$ . Un haz estrecho de partículas  $\alpha$  originadas por el material radiactivo  $S$  atraviesa una hoja delgada de oro. Se desvía la trayectoria de algunas de las partículas  $\alpha$  y se detectan las partículas desviadas con un detector apropiado para partículas  $\alpha$ .

positivas y negativas tenderían a compensarse. RUTHERFORD arguyó que la carga positiva debe estar separada de algún modo de la negativa y como modelo atómico adoptó el constituido por un *núcleo* muy pequeño y masivo, cargado positivamente y rodeado por los electrones atómicos. La fuerza eléctrica en el exterior del átomo era muy débil, pero *en su interior*, en el interior de la corteza de electrones, la fuerza era muy grande. A continuación RUTHERFORD pasó a calcular la ley de la dispersión que podía esperarse de este modelo atómico.

Se supuso que la fuerza ejercida entre el núcleo de oro y la partícula  $\alpha$  estaba descrita correctamente por la ley de Coulomb. En realidad, ni la ley de COULOMB ni la Mecánica newtoniana se había comprobado que fueran válidas a las distancias tan pequeñas que intervienen en este problema, pero estas hipótesis eran las más razonables. Estudios posteriores han demostrado que la ley de Coulomb es válida a distancias atómicas, si bien la Mecánica newtoniana no lo es. Por casualidad, la dispersión de RUTHERFORD es uno de los pocos procesos atómicos que pueden tratarse correctamente con la Mecánica newtoniana.

Recordemos que la fuerza eléctrica de COULOMB es del tipo  $(K/r^2)$  y que para partículas de carga eléctrica de igual signo es repulsiva. El problema resulta ser enteramente análogo al del movimiento planetario estudiado en el apartado 10-5. Ahora, sin embargo, la energía mecánica total de la partícula  $\alpha$  es siempre positiva y ésta describe una trayectoria hiperbólica en vez de elíptica. Podríamos aplicar a este problema los resultados de nuestro sistema planetario, pero será más sencillo e ilustrativo realizar un estudio directo.

Evidentemente, la desviación de la partícula  $\alpha$  depende de lo lejos que pase del núcleo. Si pasa lejos del núcleo, el ángulo de dispersión será pequeño y si pasa muy cerca del núcleo, el ángulo de dispersión será grande. Intentaremos, pues, establecer una relación entre el ángulo de dispersión y el parámetro de impacto o distancia característica  $a$ , según se indica en la figura 10-10. Supondremos que el núcleo dispersor tiene una masa mucho mayor que la de la partícula  $\alpha$  y, según vimos, en estas condiciones el núcleo adquiere solamente una can-

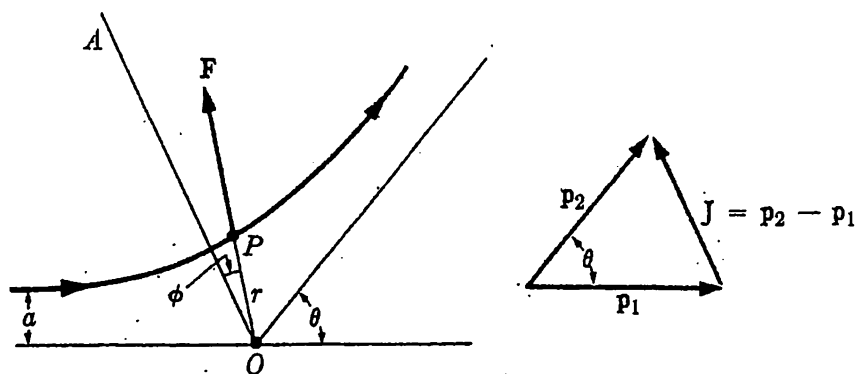


Fig. 10-10. Si no estuviera cargada la partícula  $\alpha$ , pasaría a una distancia  $a$  del núcleo. La partícula  $\alpha$  está cargada y, por tanto, es repelida por el núcleo y desviada un ángulo  $\theta$ . La trayectoria es simétrica respecto a la recta  $OA$ . A la distancia  $a$  se le llama parámetro de impacto.

tividad muy pequeña de energía cinética. Podemos considerar, por tanto, que la energía cinética de la partícula  $\alpha$  es la misma después del choque que antes de él. Además, como la fuerza que se ejerce entre el núcleo y la partícula  $\alpha$  es una fuerza central, el momento cinético del sistema debe permanecer constante y como hemos tomado la masa del núcleo mucho mayor que la de la partícula  $\alpha$ , puede considerarse constante el momento cinético de la partícula  $\alpha$  respecto al núcleo. Al acercarse la partícula  $\alpha$  al núcleo desde la izquierda, la fuerza que se ejerce sobre ella, que es siempre radial y dirigida en el sentido de alejamiento del núcleo, se hace cada vez mayor. La partícula  $\alpha$  pierde continuamente energía cinética ganando energía potencial, pero el momento cinético se mantiene constante. Cuando se aleje del núcleo la partícula  $\alpha$ , recuperará su energía cinética inicial. Las cantidades de movimiento inicial y final de la partícula  $\alpha$  serán iguales, pues, en magnitud y el efecto resultante del encuentro con el núcleo es un cambio de dirección de la partícula  $\alpha$ . El impulso  $J = p_2 - p_1$  tiene una magnitud  $J = 2p \sin \theta/2$ . El impulso  $J$  se debe a la componente de la fuerza coulombiana según la dirección  $OA$ , ya que las contribuciones al impulso de las otras componentes, se destruyen entre sí. La componente según  $OA$  de la fuerza es

$$F_a = F \cos \phi = \frac{Kq_\alpha q_n}{r^2} \cos \phi$$

donde  $q_\alpha$  y  $q_n$  son las cargas de la partícula  $\alpha$  y del núcleo, respectivamente. El impulso es la integral de  $F_a dt$  extendida desde mucho antes hasta después del instante del encuentro nuclear:

$$J = \int \frac{Kq_\alpha q_n}{r^2} \cos \phi dt \quad (10-20)$$

Esta integral no se puede calcular directamente, porque  $r$  y  $\phi$  varían ambos con el tiempo en forma desconocida hasta ahora. En cambio, sabemos que el momento cinético  $l = pa = mr^2\omega$ , es constante. Como podemos escribir  $l$  en la forma  $m_\alpha r^2 (d\phi/dt)$ , tenemos

$$J = \int_{-(\pi-\theta)/2}^{(\pi-\theta)/2} \frac{Kq_\alpha q_n}{l} m_\alpha \cos \phi d\phi \quad (10-21)$$

Podemos realizar ahora la integración anterior, porque sólo  $\cos \phi$  depende de  $\phi$ . Los límites de integración corresponden a  $\phi$  mucho antes y  $\phi$  mucho después del choque. Cuando se realiza la integración indicada, hallamos que

$$J = \frac{2Kq_\alpha q_n}{m_\alpha v a} m_\alpha \cos \frac{\theta}{2} \quad (10-22)$$

donde  $m_\alpha v a$  es el momento cinético constante de la partícula  $\alpha$ . Como sabemos que  $J$  puede escribirse en la forma  $J = 2p \sin \theta/2$ , tenemos

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{Kq_\alpha q_n}{m_\alpha v^2 a} \quad (10-23)$$

donde  $v = p/m_\alpha$  es la velocidad de las partículas  $\alpha$ . Esta es la relación buscada entre el ángulo de dispersión y la distancia  $a$ . Cuando  $a$  es grande el ángulo de dispersión es pequeño, porque la fuerza que se ejerce sobre la partícula  $\alpha$  es pequeña al pasar ante el núcleo.

La relación (10-23) no se puede comparar directamente con los resultados experimentales porque cuando una partícula  $\alpha$  incide, por ejemplo, sobre una hoja de oro, no hay manera de conocer de antemano la distancia  $a$  que caracterizará su choque. No podemos «apuntar» las partículas  $\alpha$  hacia un núcleo particular, sino que lo que se hace es bombardear uniformemente con ellas una cierta área  $A$  de la hoja. Supongamos que en este área sólo hubiera un núcleo de oro. Si la hoja fuera bombardeada uniformemente con 1000 partículas  $\alpha$ , podríamos esperar que pasaran  $1000\pi a^2/A$  a una distancia del núcleo de oro no superior a la distancia  $a$ . Análogamente, podríamos esperar que pasaran  $1000 \cdot 2\pi a da/A$  a distancias del núcleo de oro comprendidas entre  $a$  y  $a+da$ . Si en el área  $A$  de la hoja hubieran  $N$  núcleos de oro, podríamos esperar que pasaran a distancias comprendidas entre  $a$  y  $a+da$  de algún núcleo de oro  $1000N2\pi a da/A = 1000n2\pi a da$  partículas  $\alpha$ . En esta expresión  $n = N/A$  es el número de núcleos de oro por unidad de superficie de la hoja. En otras palabras,  $2\pi n a da$  es la fracción del número total de partículas  $\alpha$  que nos interesa, es decir, el número de partículas  $\alpha$  que pasan a distancias comprendidas entre  $a$  y  $a+da$  de algún núcleo de la hoja, expresado en tanto por uno del número total de partículas  $\alpha$  lanzadas.

La expresión (10-23) nos permite predecir el valor  $\theta$  del ángulo de dispersión correspondiente a un parámetro de impacto  $a$ . Análogamente, podemos predecir el ángulo de dispersión  $\theta + d\theta$  correspondiente a un parámetro de impacto  $a + da$ . Todas las partículas  $\alpha$  con parámetros de impacto comprendidos entre  $a$  y  $a + da$  tendrán ángulos de dispersión comprendidos entre  $\theta$  y  $\theta + d\theta$ . Por tanto, como  $2\pi na da$  es el número (expresado en tanto por uno del número total de partículas  $\alpha$  lanzadas) de partículas  $\alpha$  cuyo parámetro de impacto está comprendido entre  $a$  y  $a + da$ ,  $2\pi na da$  expresado en función de  $\theta$  y  $d\theta$ , en vez de en función de  $a$  y  $da$ , representará la fracción del número total de partículas  $\alpha$ , que se dispersa según un ángulo comprendido entre  $\theta$  y  $\theta + d\theta$ . Podemos suponer que la hoja es tan delgada que sea despreciable la probabilidad de que una partícula  $\alpha$  sea dispersada por más de un núcleo según un ángulo apreciable. Para la fracción  $f$  tendremos, entonces,

$$f = \pi n \left( \frac{Kq_\alpha q_n}{m_\alpha v^2} \right)^2 \frac{\cos \theta/2}{\sin^3 \theta/2} d\theta \quad (10-24)$$

En la práctica se utilizaba un detector de partículas  $\alpha$  que cubría un *ángulo sólido* dado. Como el elemento de ángulo sólido es  $2\pi \sin \theta d\theta = d\Omega$ , la fracción  $f$  del número total de partículas  $\alpha$ , dispersada según el ángulo  $\theta$  por el interior del ángulo sólido  $d\Omega$  es

$$f = \frac{n}{4} \left( \frac{Kq_\alpha q_n}{m_\alpha v^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \theta/2} \quad (10-25)$$

Esta es la expresión hallada por RUTHERFORD y con ella comparó sus resultados experimentales. La manera de depender  $f$  del ángulo de dispersión  $\theta$ , el número  $n$  de átomos por unidad de superficie de la hoja y la velocidad  $v$  de las partículas  $\alpha$  fueron medidos todos experimentalmente y se vio que los valores concordaban con los previstos. Cómo depende  $f$  de la carga nuclear  $q_n$  no se pudo comprobar directamente, por no existir, en aquel tiempo, medidas de la carga nuclear que fueran independientes. Sin embargo, se utilizaron hojas de distintos elementos y se encontró que la carga nuclear (medida en cargas electrónicas), deducida del experimento y de las predicciones (10-25) del modelo atómico supuesto, era aproximadamente igual a la mitad de la masa atómica. Recordemos que ya existía alguna evidencia de que el número de electrones de un átomo era aproximadamente igual a la mitad de la masa atómica. Pocos años después se vio que la carga nuclear y el número de electrones de un átomo eran iguales al *número atómico* que, para la mayoría de los átomos, es aproximadamente igual a la mitad de la masa atómica.

Otra deducción de la máxima importancia, obtenida de los resultados experimentales y del modelo propuesto se refería al tamaño del núcleo (véase el prob. 10-19).

## PROBLEMAS

10-1. Partiendo del valor de la constante  $G$  de la gravitación, de la aceleración  $g$  de la gravedad local, y del radio de la Tierra, determinar la densidad media de ésta.

10-2. ¿Con qué precisión habría que medir el período de un péndulo si se quisiera poner de manifiesto una variación de  $g$  entre dos estaciones separadas 10 m en altura?

10-3. Indicar, al menos en principio, cómo podría «pesarse» la Tierra comparando el período de un péndulo cuando se coloca al lado de una montaña de masa conocida, con el período que tiene cuando se coloca en la cumbre. Este método se empleó por los primeros investigadores para determinar la constante  $G$  de la Gravitación.

10-4. Júpiter tiene doce lunas conocidas, cuatro de las cuales fueron descubiertas por Galileo y la última se descubrió en 1951. Consignamos a continuación los radios de las órbitas y los períodos de las cuatro primeras.

$r$ , kilómetros	$T$ , días
180 000	0,498
422 000	1,769
671 000	3,551
1 072 000	7,155

(a) ¿Obedecen estos cuatro satélites a la tercera ley de Kepler? (b) Con los datos anteriores y el valor de  $G$ , hallar la masa de Júpiter. (c) El diámetro de Júpiter es de 142 900 km. ¿Cuál es su densidad media?

10-5. Dos esferas de plomo, de 1 m de radio, están en contacto. (a) ¿Cuál es su fuerza atractiva mutua? (b) ¿Cuál es

su energía potencial? (c) ¿Qué velocidad tendrían en el instante de contacto si partieran de posiciones muy separadas en el espacio y «cayeran» una contra otra?

10-6. Demostrar que el período de un satélite que se mueva alrededor de un planeta y muy próximo a su superficie, sólo depende de la densidad del planeta y no de su radio. ¿Cuál es su período si  $\rho = 5 \text{ g/cm}^3$ ?

10-7. Un satélite artificial debe recorrer una trayectoria circular 320 km por encima de la superficie terrestre. ¿Cuál debe ser su velocidad? ¿Con qué frecuencia girará alrededor de la Tierra? Si pasa por encima de nosotros, ¿cuánto tardará en desaparecer bajo el horizonte?

10-8. ¿En qué punto situado entre la Tierra y el Sol se compensan las fuerzas gravitatorias debidas a estos dos cuerpos? ¿Existe algún punto en que las energías potenciales sean iguales? ¿Se contrarrestarán en algún punto las energías potenciales gravitatorias?

10-9. El perigeo, punto más próximo de la órbita de un satélite, se halla a 320 km de la superficie terrestre, y el apogeo o punto más alejado, a 2400 km. (a) ¿Cuál es el semieje mayor de la órbita del satélite? (b) ¿Cuál es la excentricidad de su órbita? (c) Si el satélite tiene una masa de 15 kg, ¿cuál es su energía total? (d) ¿Cuál es su velocidad en el apogeo? (e) ¿Cuál es su velocidad en el perigeo? (f) ¿Cuál es su momento cinético?

10-10. Algunos cometas forman parte del sistema solar y tienen períodos de unos 100 años. En general, los cometas tienen órbitas relativamente excéntricas. Dibújese una órbita de cometa de excen-

tricidad 0,8 e inclúyanse las órbitas aproximadas de los planetas. ¿Por qué suele ser muy difícil predecir exactamente cuándo dicho cometa pasará a la mínima distancia de la Tierra?

10-11. Hacemos referencia a lo visto en el apartado 10 — 3. Imaginemos un túnel recto exento de rozamientos, que pase por el centro de la Tierra y una dos puntos de su superficie. Consideremos un cuerpo que se haya soltado partiendo del reposo desde uno de los extremos del túnel. Demostrar que el movimiento del cuerpo es armónico y que el período será el mismo en cualquier túnel, independientemente de cuál sea la posición de sus extremos. En el caso de un túnel que pase por el centro de la Tierra, determinar la velocidad del cuerpo cuando pasa por el centro.

10-12. Los primeros investigadores intentaron determinar la constante  $G$  de la Gravitación comparando los períodos de dos péndulos exactamente iguales, uno en la superficie terrestre y otro en el fondo de una mina de profundidad conocida. Indicar cómo se procedería para hallar la constante  $G$ . ¿Qué otros datos serían necesarios?

10-13. Las órbitas de dos satélites terrestres  $A$  y  $B$  son elípticas, siendo  $R$  y  $4R$ , respectivamente, sus ejes mayores (a) ¿Cuál es el cociente entre sus energías mecánicas totales? (b) ¿Cuál es el cociente entre sus períodos? (c) ¿Qué puede decirse acerca del cociente entre sus momentos cinéticos?

10-14. ¿Depende la velocidad de escape de una partícula de la dirección en que sea lanzada desde la Tierra? Razonar la respuesta.

10-15. Consideremos un proyectil a una distancia  $r = 2R$  del centro de la Tierra ( $R$  = radio terrestre). Se lanza el proyectil perpendicularmente al radio.

Indicar esquemáticamente la naturaleza de las órbitas que se obtienen al hacer variar la velocidad inicial desde cero hasta infinito. Indicar los dominios de velocidades que son característicos de las trayectorias elípticas, parabólicas e hiperbólicas.

10-16. Realizar el mismo análisis del problema anterior, pero tómese un ángulo de  $120^\circ$  entre  $v$  y  $r$ .

10-17. Un satélite artificial recorre una órbita circular a una altura de 320 km sobre la superficie terrestre. Imagínese que se lanza otro satélite igual desde la misma posición y con igual celeridad, pero según un ángulo que se desvía  $20^\circ$  hacia afuera de la órbita circular dada (el ángulo entre  $v$  y  $r$  es de  $70^\circ$ ). Determinar esta órbita y sus ejes mayor y menor. Hallar las posiciones del apogeo y del perigeo respecto al punto de partida. Cada satélite tiene una masa de 100 kg.

10-18. ¿Por qué, en la dispersión de RUTHERFORD, la trayectoria de la partícula  $\alpha$  es simétrica respecto a la recta  $OA$ ?

10-19. Algunos de los primeros experimentos de RUTHERFORD se realizaron con hojas de oro y partículas  $\alpha$  de energía 4 MeV (4 millones de electron-volt). (Una energía de un electrón-volt equivale a  $1,6 \cdot 10^{-19}$  J). De la observación de que algunas partículas  $\alpha$  rebotaban hacia atrás ( $\theta = 180^\circ$ ), hallar un límite superior del radio del núcleo de oro. ¿Qué evidencia existe de que esta dispersión de gran ángulo no se deba a un nuevo tipo de fuerza no eléctrica? (En el *Philosophical Magazine* 6, 21, 1911, puede hallarse uno de los artículos originales de RUTHERFORD.)

10-20. En la dispersión de RUTHERFORD y en el movimiento planetario interviene el movimiento de partículas so-



metidas a fuerzas inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia. Puede esperarse que el movimiento de los electrones alrededor del núcleo atómico sea análogo al movimiento de los planetas alrededor del Sol. ¿Cuál sería la energía de un electrón que se hallara a  $10^{-8}$  cm del núcleo de un átomo de hidrógeno?

10-21. (a) ¿Cuál debe ser el parámetro de impacto para que una partícula  $\alpha$  de 4 MeV sea dispersada a  $90^\circ$  por un núcleo de oro? (b) ¿Cuántos núcleos deberían haber por centímetro cuadrado de hoja, para que una partícula entre  $10^4$  se disperse más de  $90^\circ$ ? ¿Qué espesor tiene esta hoja, en cm?

## SISTEMAS MÓVILES DE COORDENADAS Y FUERZAS DE INERCIA

*Resumen.* Muchos fenómenos físicos se describen y analizan mejor refiriéndolos a un sistema de coordenadas en movimiento. Como ejemplo importante del empleo de un sistema de coordenadas en movimiento a velocidad constante, se estudia la interacción de dos cuerpos referida al sistema de coordenadas del centro de masa. Las relaciones entre fuerzas de interacción y movimiento (las leyes ordinarias del movimiento), que hemos obtenido y estudiado hasta ahora en un sistema de coordenadas en reposo, también son aplicables a sistemas de coordenadas que se muevan con velocidades constantes (sistemas inerciales de referencia). En cambio, en un sistema de coordenadas acelerado o en rotación, deberán introducirse fuerzas de inercia que hagan compatibles los resultados obtenidos con los de los sistemas inerciales de referencia. Se ilustra la utilización de las fuerzas de inercia con varios ejemplos entre los que se cuentan los movimientos de los planetas, de la Luna y de las mareas. Se trata brevemente el principio de EINSTEIN de la equivalencia.

Hemos visto que el primer principio de la Mecánica era el enunciado por GALILEO que decía que cuando un cuerpo no ejerce interacciones con otros, se mueve con velocidad constante (o nula). A partir de este principio vimos cómo se desarrollan los diversos principios de conservación y el concepto de fuerza. En todas nuestras consideraciones suponíamos implícitamente que nosotros, como observadores, y nuestros sistemas de coordenadas estábamos en reposo. Existen muchos casos en la Naturaleza en los que es más natural y más fácil desde el punto de vista conceptual y de cálculo, considerar un problema desde el punto de vista de un sistema de coordenadas en movimiento. En particular, cuando se mueve un sistema de coordenadas con la velocidad del centro de masa de un grupo de cuerpos en interacción, el problema resulta mucho menos complicado que cuando el sistema de coordenadas se halla en reposo.

En cambio, consideremos ahora la situación alterada que se obtiene cuando se describe y analiza el movimiento en un sistema de coordenadas acelerado. Sólo necesitamos imaginar unos cuantos experimentos sencillos realizados en un coche que acelera, en un coche que corra por una carretera ondulada o en un coche de atracción de feria que gire rápidamente, para darnos cuenta de que los prin-

cipios fundamentales de la Mecánica precisan de una revisión cuando se describe el movimiento con referencia a sistemas de coordenadas acelerados o en rotación.

Una bola situada sobre el suelo horizontal de un coche que se mueve con velocidad constante permanece en reposo (en un sistema de coordenadas solidario al coche) pero de pronto rueda hacia adelante (cuando el coche frena) o hacia atrás (cuando el coche acelera) o empieza a botar (cuando el coche tropieza con una irregularidad de la carretera).

Un disco que deslice sin rozamiento sobre una plataforma giratoria, se mueve en línea recta respecto al sistema  $S$  de coordenadas solidario a tierra. Pero respecto al sistema  $S'$  de coordenadas que gira solidario a la plataforma, el disco recorre una trayectoria en espiral. Además, hallamos que, incluso en el caso de que el disco se halle en reposo respecto a  $S'$ , habrá que aplicarle una fuerza de interacción resultante dirigida hacia el centro de la plataforma giratoria. Este hecho no es compatible con las leyes del movimiento que conocemos para sistemas de coordenadas en reposo, en los cuales la fuerza de interacción resultante que se ejerce sobre un cuerpo en reposo debe ser nula.

Por tanto, los principios de la Mecánica formulados en función de las fuerzas de interacción no pueden utilizarse directamente en sus formas originales al aplicarlos a sistemas de coordenadas acelerados o en rotación. Podríamos preguntarnos: ¿Por qué preocuparnos de lo raros que puedan parecernos estos fenómenos referidos a sistemas de coordenadas acelerados o en rotación, mientras podamos predecir con toda confianza los resultados de los experimentos cuando los referimos a un sistema de coordenadas en reposo? Sólo recordaremos que la Tierra gira alrededor de su eje y tiene su movimiento de traslación alrededor del Sol el cual, a su vez, gira alrededor del centro de la galaxia junto con las otras  $10^{11}$  estrellas que la constituyen. Tanto si nos gusta como si no, nos hallamos

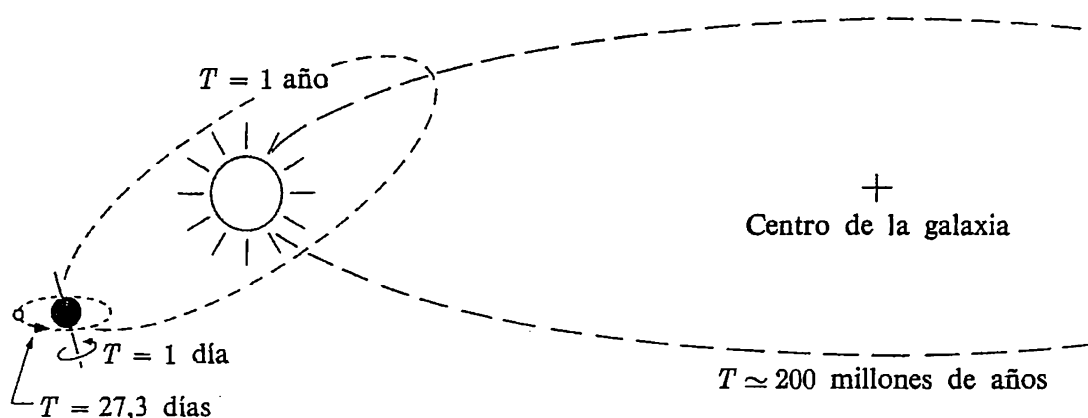


Fig. 11-1. Un sistema de coordenadas fijo a la superficie terrestre no se halla en reposo en modo alguno. (El Sol se halla a unos 30 000 años-luz del centro de la galaxia.)

en uno de los sistemas de coordenadas en rotación más complicados (fig. 11-1) y veremos que existen consecuencias observables muy importantes. Esto plantea la delicada cuestión de qué queríamos significar, en nuestro anterior estudio, al decir alegremente que los observadores situados en la Tierra podíamos suponerlos en reposo. Cuando consideramos todas estas rotaciones, ¿es posible que un observador se halle en reposo? Si es así, ¿con relación a qué lo está?

Las respuestas a estas preguntas no se conocen, o al menos no han tenido aceptación general. En la práctica, no obstante, los efectos de dichas rotaciones suelen ser pequeños. Por ejemplo, para los fines de nuestros experimentos de choque con discos y carritos, el efecto de la rotación terrestre tiene consecuencias que no pueden apreciarse por lo pequeñas que son. De dichos experimentos dedujimos las leyes de NEWTON de la Mecánica y estudiamos las propiedades de diversas fuerzas de interacción. Si pueden aplicarse estas leyes para la predicción correcta del movimiento en otro sistema de coordenadas, sin introducir más fuerzas que las de interacción, a este sistema de coordenadas se le da el nombre de *sistema inercial de referencia*. Por ejemplo, un sistema de coordenadas que gire con la Tierra es un sistema inercial a efectos de los experimentos de choque antes mencionados, pero no lo es si queremos basar en él un estudio del movimiento de la Luna o de un satélite. (Recuérdese que la Luna da una vuelta a la Tierra en 27,3 días y sale cada 24 horas aproximadamente a causa del movimiento de rotación de la Tierra.) Para tales consideraciones, pues, podríamos tomar un sistema de coordenadas centrado en la Tierra y cuyos ejes fueran fijos respecto a las estrellas. Pero ni siquiera este sistema sería inercial para el estudio del movimiento planetario, ya que el origen del sistema da una vuelta alrededor del Sol cada año. Luego, para el movimiento planetario encontramos que el sistema inercial debería estar centrado en el Sol. Tal vez, el último sistema inercial esté fijo respecto al centro de masa de todas las estrellas del Universo.

**11-1 Movimiento respecto a un sistema de coordenadas que se mueve con velocidad constante.** Un sistema  $S$  de coordenadas se halla en reposo y otro sistema  $S'$  se mueve con velocidad constante respecto a  $S$ . ¿Cuál será la relación existente entre las descripciones del movimiento de un cuerpo respecto a  $S$  y  $S'$ ? Concretando, imaginemos que se marca el sistema de coordenadas  $S$  en un gran bloque de vidrio y que el sistema  $S'$  se marca sobre el carrito que puede moverse bajo el vidrio. Para evitar complicaciones inútiles, supongamos que los ejes de coordenadas de  $S$  y de  $S'$  son paralelos, que la velocidad  $V_x$  de  $S'$  está dirigida a lo largo del eje  $x$  de  $S$  y que en el instante  $t = 0$  coinciden los dos sistemas de coordenadas. De la figura 11-2 tenemos, para las coordenadas de un punto  $P$

$$x' = x - V_x t, \quad y' = y \quad (11-1)$$

Si  $P$  se mueve con una velocidad  $\mathbf{v}$  (componentes  $v_x$  y  $v_y$ ) respecto a  $S$ , las componentes de la velocidad respecto a  $S'$  son

$$v'_x = v_x - V_x, \quad v'_y = v_y \quad (11-2)$$

Luego las cantidades de movimiento de una partícula de masa  $m$ , asignadas por los dos sistemas de coordenadas, están relacionadas por

$$p'_x = p_x - mV_x, \quad p'_y = p_y \quad (11-3)$$

(Hemos supuesto tácitamente que las medidas de la masa, longitud y tiempo no se hallan afectadas por el movimiento de  $S'$ . Esta hipótesis no está justificada cuando  $V_x$  es muy grande y, en realidad, estamos suponiendo que  $V_x$  es mucho menor que la velocidad de la luz.) A las relaciones (11-1) y (11-2) se les da el nombre de transformaciones de GALILEO, por haber sido este físico uno de los primeros, si no el primero, que describió correctamente el movimiento visto desde un sistema móvil de coordenadas.

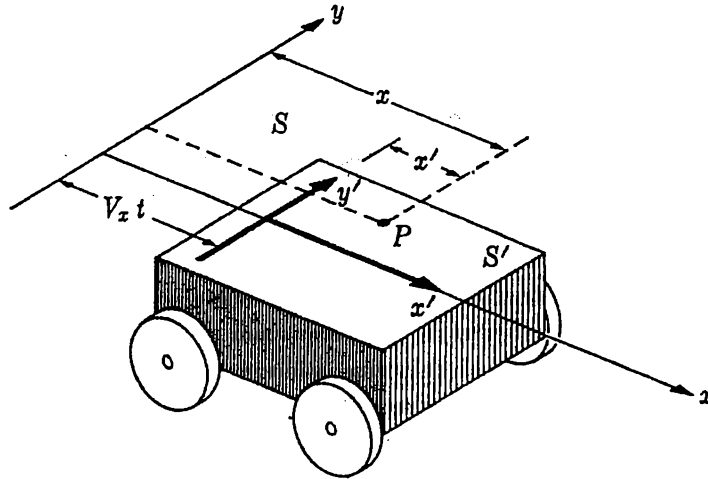


Fig. 11-2. El sistema  $S$  de coordenadas está en reposo y el sistema  $S'$  se mueve a lo largo de  $x$  con velocidad  $V_x$ . En el instante  $t = 0$  coinciden los ejes; pero en el instante  $t$ ,  $S'$  ha recorrido una distancia  $X = V_x t$  a lo largo de  $x$ .

Basándonos en la ecuación (11-3), ¿cuál es la relación entre las fuerzas medidas respecto a  $S$  y a  $S'$ ? De acuerdo con  $S$ , la fuerza es, desde luego,  $d\mathbf{p}/dt$  y, correspondientemente, de acuerdo con  $S'$  es  $d\mathbf{p}'/dt$ . Pero, según (11-3), vemos que  $dp'_x/dt$  y  $dp_x/dt$  son iguales, ya que  $m$  y  $V_x$  son ambas constantes. Además,  $dp'_y/dt$  y  $dp_y/dt$  son iguales y sacamos, por tanto, la conclusión de que las fuerzas respecto a  $S$  y  $S'$  son las mismas:

$$F'_x = F_x, \quad F'_y = F_y \quad (11-4)$$

Si  $S$  es un sistema inercial de referencia, todos los sistemas de coordenadas que se muevan con velocidad constante respecto a  $S$  son también sistemas inerciales de referencia.

**EJEMPLO 1.** Uno de los ejemplos de GALILEO que también nos resulta instructivo a nosotros, se refiere al movimiento de un cuerpo que se deja caer desde lo alto del mástil de una embarcación en movimiento. Para un observador situado sobre la embarcación, el objeto cae en línea recta y va a parar a la base del mástil. Se halla en un sistema inercial (suponiendo que la velocidad de la embarcación sea una constante  $v_0$  y que no haya giro ni balanceo) y la velocidad del objeto en la dirección  $x'$  es nula en la parte alta del mástil y nula también durante la caída. En cambio, un observador situado en la orilla diría que el objeto se soltó desde una embarcación en movimiento y que, por tanto, tenía una velocidad inicial  $v_0$  dirigida según  $x$ . La trayectoria del cuerpo será, pues, una parábola ( $y = h - gt^2/2$ ,  $x = v_0 t$ ) y el que el cuerpo vaya a parar a la base del mástil no es sino una consecuencia del hecho de que tanto la embarcación como el cuerpo tienen la misma velocidad  $v_0$  según  $x$ .

**EJEMPLO 2.** Sobre un tren que se mueve hacia el norte por una vía recta horizontal se monta un cañón, tal como se indica en la figura 11-3. La velocidad de salida de los disparos realizados por el cañón es  $v$ . Si se coloca éste formando un ángulo  $\theta'$  con la dirección de la vía, ¿cuál será la dirección de la trayectoria de un proyectil disparado horizontalmente por el cañón?

Las componentes de la velocidad respecto al sistema de coordenadas móvil son  $v'_x = v \cos \theta'$  y  $v'_y = v \sin \theta'$ , respectivamente. Las componentes correspondientes de la velocidad respecto al sistema fijo son  $v_x = v \cos \theta' + V_0$  y  $v_y = v'_y = v \sin \theta'$ . En otras palabras, el ángulo  $\theta$  que forma la trayectoria con el eje  $x$  se obtendrá de

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v \sin \theta'}{v \cos \theta' + V_0} = \frac{\sin \theta'}{\cos \theta' + \beta}$$

donde  $\beta$  es  $V_0/v$ .

**11-2 Movimiento respecto al centro de masa.** En el apartado anterior hemos llegado a la conclusión de que la fuerza que se ejerce sobre un cuerpo referida a un sistema de coordenadas que se mueve a velocidad constante es igual que la fuerza medida desde un sistema de coordenadas en reposo. Además, hemos visto cómo están relacionadas las coordenadas, velocidades y cantidades de movimiento en uno y otro sistema. En el presente apartado estudiaremos el importante caso particular en que el sistema  $S'$  se mueva con la velocidad constante del centro de masa de un grupo de partículas que sólo se ejercen interacciones entre ellas. Al sistema de coordenadas que se mueve con el centro de masa, con su origen en el centro de masa, se le suele llamar *sistema del centro de masa* (sistema C) y al sistema de coordenadas en reposo se le llama *sistema del laboratorio* (sistema L).

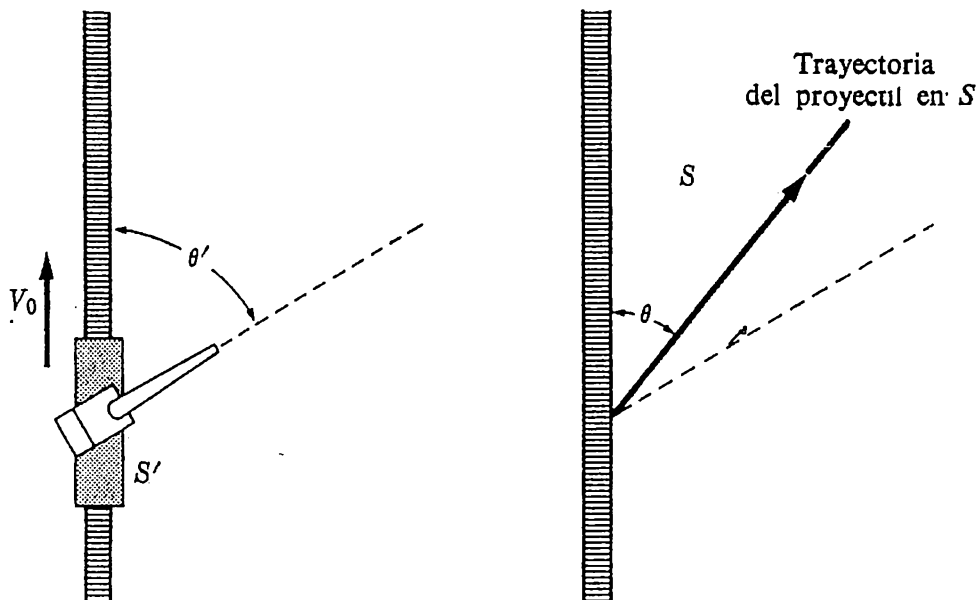


Figura 11-3

*Cantidad de movimiento total respecto al centro de masa.* Consideraremos solamente dos partículas que se ejerzan interacciones mutuas. La extensión a sistemas de mayor número de partículas es inmediata.

Por lo visto anteriormente sabemos que la coordenada y velocidad del centro de masa son

$$X = \frac{m_a x_a + m_b x_b}{m_a + m_b} \quad \text{y} \quad V_x = \frac{m_a v_{ax} + m_b v_{bx}}{m_a + m_b} \quad (11-5)$$

Las coordenadas  $x_a^*$  y  $x_b^*$  de  $A$  y  $B$ , respecto al sistema  $C$  son, pues,  $x_a^* = x_a - X$  y  $x_b^* = x_b - X$ . La coordenada del centro de masa en el sistema  $C$  es, evidentemente,  $X^* = 0$  y tenemos

$$m_a x_a^* + m_b x_b^* = 0 \quad (11-5a)$$

Análogamente, tenemos  $V_x^* = 0$  y

$$m_a v_{ax}^* + m_b v_{bx}^* = 0. \quad (11-5b)$$

Para las componentes  $y$  y  $z$  se obtienen expresiones enteramente análogas. También podemos obtener la ecuación (11-5b) de la manera siguiente: Respecto al sistema  $C$ , el cuerpo  $A$  tendrá una velocidad  $v_{ax}^* = v_{ax} - V_x$  y el cuerpo  $B$  tendrá una velocidad  $v_{bx}^* = v_{bx} - V_x$ . La cantidad de movimiento total respecto al sistema  $C$  es, pues,

$$\begin{aligned} p_{ax}^* + p_{bx}^* &= m_a(v_{ax} - V_x) + m_b(v_{bx} - V_x) \\ &= m_a v_{ax} + m_b v_{bx} - (m_a + m_b)V_x = 0 \end{aligned}$$

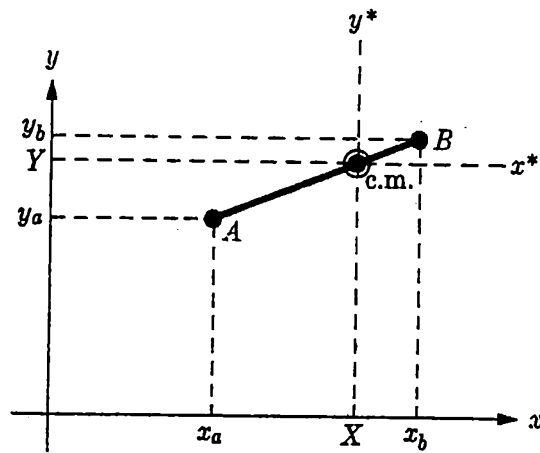


Figura 11-4

porque el último término, en virtud de (11-5), es igual a la suma de los dos primeros. Para las componentes  $y$  y  $z$  existen relaciones enteramente análogas y sacamos la conclusión de que *la cantidad de movimiento total respecto al centro de masa es nula*. Es decir,

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{p}_a^* + \mathbf{p}_b^* = 0 \quad (11-6)$$

Las cantidades de movimiento individuales  $\mathbf{p}_a^*$  y  $\mathbf{p}_b^*$  son siempre iguales y opuestas y si chocan los cuerpos, se irán aproximando uno a otro a lo largo de una misma recta, cuando se observan desde el centro de masa. Análogamente, des-

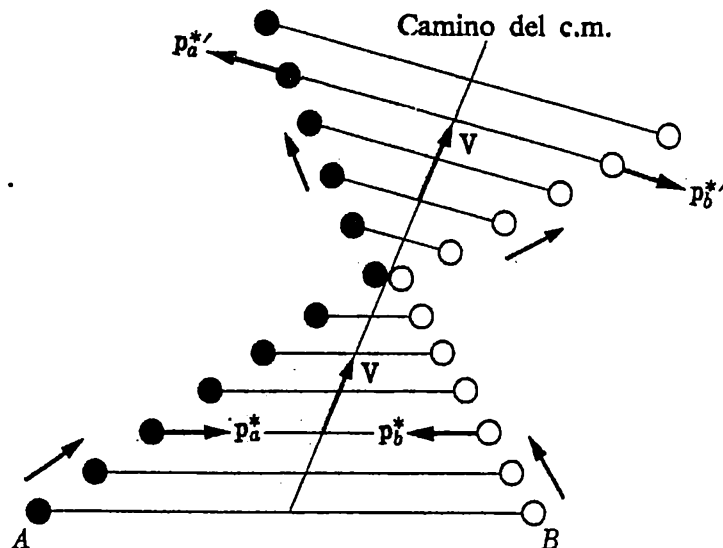


Fig. 11-5. Cuando se observa desde el centro de masa el choque de dos cuerpos, éstos tienen cantidades de movimiento iguales y opuestas  $\mathbf{p}_a^* = -\mathbf{p}_b^*$ . El movimiento tiene lugar a lo largo de las rectas que unen los cuerpos.



pués de chocar los cuerpos deberán abandonar el centro de choque siguiendo una línea recta. En general, estas rectas de antes y después del choque no coincidirán, según puede verse en la figura 11-5.

**Energía cinética total.** La energía cinética total respecto al sistema C es, desde luego,  $E^* = m_a v_a^{*2}/2 + m_b v_b^{*2}/2$ . ¿Cómo está relacionada  $E^*$  con la energía cinética en el sistema L,  $E = m_a v_a^2/2 + m_b v_b^2/2$ ? Vamos a considerar, de nuevo, sólo dos partículas puesto que la extensión a tres o más no lleva consigo nada que sea esencialmente diferente. Para las componentes  $x$  de la velocidad, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m_a v_{ax}^2 + \frac{1}{2}m_b v_{bx}^2 &= \frac{1}{2}m_a (v_{ax}^* + V_x)^2 + \frac{1}{2}m_b (v_{bx}^* + V_x)^2 \\ &= \frac{1}{2}m_a (v_{ax}^{*2} + V_x^2 + 2v_{ax}^* V_x) + \frac{1}{2}m_b (v_{bx}^{*2} + V_x^2 + 2v_{bx}^* V_x) \\ &= (\frac{1}{2}m_a v_{ax}^{*2} + \frac{1}{2}m_b v_{bx}^{*2}) + \frac{1}{2}(m_a + m_b)V_x^2 + V_x(m_a v_{ax}^* + m_b v_{bx}^*)\end{aligned}$$

Según la ecuación (11-5b), el último término es nulo.

Para las componentes  $y$  y  $z$  de la velocidad se obtienen expresiones análogas y por adición, aplicando  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ , obtenemos

$$E = \frac{1}{2}MV^2 + E^* \quad (11-7)$$

donde  $M = m_a + m_b$  es la masa total del sistema. En otras palabras, para el sistema L la energía cinética no es más que la suma de la energía cinética de traslación  $MV^2/2$  del centro de masa más la energía cinética  $E^*$  respecto al sistema C. El resultado de la ecuación (11-7) es aplicable a un número cualquiera de partículas, según puede demostrarse de manera totalmente análoga a la utilizada en la deducción anterior para dos partículas (véase el prob. 11-9).

En un *choque perfectamente elástico*, la energía cinética total del sistema antes del choque es igual a la energía cinética total después del choque. De la conservación de la cantidad de movimiento del sistema, se deduce que la velocidad del centro de masa permanece constante, y, por tanto, tampoco varía  $MV^2/2$ . Por consiguiente, en el choque perfectamente elástico, la energía cinética respecto al centro de masa también será la misma antes y después del choque  $E^* = E^{*'}$ . En el caso de dos partículas  $A$  y  $B$  que choquen, la energía cinética respecto al centro de masa es  $E^* = (p_a^{*2}/2m_a) + (p_b^{*2}/2m_b)$ , y como tenemos  $p_a^{*2} = p_b^{*2}$  esta energía puede expresarse en la forma  $E^* = p_a^{*2}/2\mu$ , donde  $\mu = m_a m_b / (m_a + m_b)$  es la masa reducida del sistema. Entonces, como  $E^* = E^{*'}$ , se deduce que la magnitud de la cantidad de movimiento de la partícula  $A$  respecto al sistema C es la misma antes que después del choque,  $p_a^* = p_a^{*'}$ . Análogamente se obtiene  $p_b^* = p_b^{*'}$ . En otras palabras, en un choque perfectamente elástico de dos partículas descrito respecto al sistema C, la magnitud de la cantidad de movimiento y de la velocidad de cada partícula, es la misma antes que después del choque. El efecto total del choque perfectamente elástico en el sistema C es, pues, un simple cambio de dirección del movimiento de las partículas en colisión.

En cambio, en un *choque totalmente inelástico*, las partículas quedan unidas después del choque, con lo que es nula la energía cinética respecto al centro de masa,  $E^{*'} = 0$ . Sin embargo, la velocidad del centro de masa y en consecuencia la energía cinética de traslación  $MV^2/2$ , después del choque, es la misma que antes. Luego, en un choque totalmente inelástico la energía cinética inicial  $E = (MV^2/2) + E^*$  se reduce a  $E' = MV^2/2$ ; es decir, en el choque se pierde la energía cinética inicial respecto al centro de masa. Queda claro, no obstante, que en ningún choque se podrá reducir la energía cinética en el sistema L a un valor inferior a  $MV^2/2$ .

La velocidad relativa entre dos partículas A y B que se mueven en el espacio es  $\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b$ . Si introducimos la velocidad V del centro de masa de las partículas, tenemos  $\mathbf{v}_a^* = \mathbf{v}_a - \mathbf{V}$  y  $\mathbf{v}_b^* = \mathbf{v}_b - \mathbf{V}$ . Se deduce que la velocidad relativa  $\mathbf{v}_a^* - \mathbf{v}_b^*$  en el sistema L es la misma que la velocidad relativa en el sistema C:

$$\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b = \mathbf{v}_a^* - \mathbf{v}_b^*$$

Según hemos visto, en un choque perfectamente elástico las magnitudes de las velocidades relativas en el sistema C son las mismas antes y después del choque (el choque no hace más que variar la dirección del movimiento rectilíneo de las partículas que chocan, pero no altera las magnitudes de las velocidades). En consecuencia, en un choque perfectamente elástico, las magnitudes de las velocidades relativas también se mantienen constantes respecto al sistema L y  $|\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b| = |\mathbf{v}_a^* - \mathbf{v}_b^*|$ .

**EJEMPLO.** Un cuerpo A de 2 kg se aproxima al origen con una velocidad de 3 m/s dirigida en el sentido negativo de las y, mientras que otro cuerpo B de 4 kg se aproxima al origen con una velocidad de 2 m/s dirigida en el sentido negativo de las x. Chocan los cuerpos en el origen y a consecuencia del choque se reduce a la mitad su velocidad relativa. Para un sistema de coordenadas en reposo, ¿cuál es la energía cinética total final?

Las dos componentes y la magnitud de la velocidad del centro de masa están dadas por

$$V_x = \frac{2 \cdot 0 - 4 \cdot 2}{2 + 4} = -\frac{4}{3} \text{ m/s}, \quad V_y = \frac{-2 \cdot 3 + 4 \cdot 0}{2 + 4} = -1 \text{ m/s},$$

$$|V| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \frac{5}{3} \text{ m/s}$$

Las velocidades, respecto al sistema C, serán pues,

$$v_{ax}^* = 0 - (-\frac{4}{3}) = \frac{4}{3} \text{ m/s}, \quad v_{bx}^* = -2 - (-\frac{4}{3}) = -\frac{2}{3} \text{ m/s},$$

$$v_{ay}^* = -3 - (-1) = -2 \text{ m/s}, \quad v_{by}^* = 0 - (-1) = 1 \text{ m/s},$$

$$|\mathbf{v}_a^*| = \sqrt{\frac{52}{9}} \text{ m/s}, \quad |\mathbf{v}_b^*| = \sqrt{\frac{13}{9}} \text{ m/s}$$

La energía cinética en el sistema del centro de masa es, antes del choque,

$$E^* = \frac{1}{2}m_a v_a^{*2} + \frac{1}{2}m_b v_b^{*2} = \frac{26}{3} \text{ joules}$$

A consecuencia del choque se reduce a la mitad la magnitud de la velocidad relativa así como las magnitudes de las velocidades en el sistema C de cada uno de los cuerpos. Por tanto, la energía cinética en el sistema C se reducirá a la cuarta parte:

$$E^{*'} = \frac{E^*}{4} = \frac{13}{6} \text{ joules}$$

La energía cinética en el sistema L vendrá dada, pues, por

$$E = \frac{1}{2}MV^2 + E^* = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{25}{9} + \frac{26}{3} = 17 \text{ joules} \quad (\text{antes})$$

$$E' = \frac{1}{2}MV^2 + E^{*'} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{25}{9} + \frac{13}{6} = 10,5 \text{ joules} \quad (\text{después})$$

Podríamos haber obtenido la energía cinética  $E = m_a v_a^2/2 + m_b v_b^2/2 = 17 \text{ J}$  directamente, y restarle  $MV^2/2 = 25/3 \text{ J}$  para obtener  $E^* = 26/3 \text{ J}$ . Entonces, sabiendo que la energía cinética según el observador móvil se reduce a la cuarta parte, obtendríamos  $E^{*'} = 13/6 \text{ J}$  y  $E' = MV^2/2 + E^{*'} = 10,5 \text{ J}$ .

**11-3 Movimiento respecto a un sistema de coordenadas acelerado.** Del apartado anterior podemos sacar la conclusión de que cuando consideramos el movimiento relativo a un sistema de coordenadas que se mueve con velocidad constante, no surge nada esencialmente nuevo. Los cuerpos que se mueven con velocidad constante respecto a un sistema de coordenadas en reposo, se mueven con velocidad diferente, pero también constante, respecto a un sistema de coordenadas en movimiento. Además, las variaciones de cantidad de movimiento y las fuerzas son las mismas en uno y otro sistema.

No obstante, cuando el sistema móvil de coordenadas está acelerado surgen características esencialmente nuevas. El razonamiento siguiente nos indica que así debe ocurrir. Cuando un cuerpo tiene una velocidad  $v$  respecto a un sistema de coordenadas  $S$  en reposo, tiene una velocidad  $v' = v - V$  respecto a un sistema  $S'$  de coordenadas que se mueva con velocidad  $V$ . La cantidad de movimiento respecto a  $S'$  es, pues,  $mv' = mv - mV$ . Si  $V$  varía (si  $S'$  está acelerado), la cantidad de movimiento del cuerpo variará de acuerdo con  $S'$  y, por tanto, deberá ejercerse una fuerza sobre el cuerpo; en cambio, de acuerdo con  $S$  sólo se ejerce una fuerza sobre el cuerpo cuando varía su cantidad de movimiento respecto a  $S$ . Desde luego, esta cantidad de movimiento  $mv$  no tiene nada que ver con la aceleración de  $S'$ .

Consideremos un caso sencillo en que la aceleración de  $S'$  tenga la dirección  $x$ . De la figura 11-2 y de su estudio, tenemos para las cantidades de movimiento respecto a  $S'$  y  $S$ ,

$$p'_x = p_x - mV_x, \quad p'_y = p_y \quad (11-8)$$

Como antes, la relación entre las fuerzas en ambos sistemas, por definición; son las velocidades de variación de las cantidades de movimiento. Como ahora no es constante  $V_x$  tenemos

$$F'_x = F_x - mA_x, \quad F'_y = F_y \quad (11-9)$$

donde  $A_x = dV_x/dt$  es la aceleración del sistema de coordenadas  $S'$ . Recordemos ahora que la componente  $x$  de la fuerza en el sistema  $S$  de coordenadas  $dp_x/dt = F_x$ , es una fuerza atribuible a la presencia de algún otro cuerpo. La fuerza puede ser de contacto, gravitatoria, eléctrica, etc., y es una fuerza de interacción. En cambio, la fuerza  $F'_x = dp'_x/dt$  correspondiente a  $S'$ , consta de dos partes, la primera de las cuales es la misma fuerza de interacción  $F_x$ , observada por  $S$ , y la segunda es  $F_{ix} = -mA_x$ .

Este nuevo tipo de fuerza no es una fuerza de interacción. Recibe el nombre de fuerza de inercia y aparece a causa de la aceleración del sistema  $S'$  de coordenadas. Un sistema de coordenadas acelerado no es un sistema inercial. Las fuerzas de inercia sólo aparecen en los sistemas de coordenadas acelerados y en rotación, nunca en los sistemas inerciales. Tenemos, pues

$$F'_x = F_x + F_{ix} \quad (11-10)$$

$$F_{ix} = -mA_x \quad (11-11)$$

Es decir, si queremos predecir correctamente el movimiento de un cuerpo respecto a un observador situado en un sistema de coordenadas acelerado  $S'$ , deberán introducirse no sólo las fuerzas de interacción (gravedad, contacto, etc.) sino también la fuerza de inercia  $F_{ix} = -mA_x$ . Sólo entonces serán compatibles las variaciones observadas de cantidad de movimiento con las fuerzas conocidas. Desde luego, deberá conocerse la aceleración  $A_x$  del sistema  $S'$  de coordenadas.

En general, las fuerzas de inercia se diferencian claramente de las de interacción, en que éstas aparecen por parejas; es decir, siempre existe una fuerza de reacción que se ejerce sobre algún otro cuerpo. Esto no ocurre con las fuerzas de inercia.

Antes de estudiar algunos ejemplos de movimiento y fuerzas en sistemas de coordenadas acelerados, extendamos nuestras consideraciones unidimensionales al caso más general en el que la magnitud y aceleración de  $S'$  no sean necesariamente constantes.

La posición  $r'$  de  $P$ , respecto a  $S'$ , es  $r' = r - R$ . Las velocidades en los dos sistemas de coordenadas están; pues, relacionadas por  $v' = v - V$ , con lo que, para la cantidad de movimiento, tenemos

$$p' = p - mV \quad (11-12)$$

Como antes, la fuerza asignada por  $S'$  se obtiene por la velocidad de variación de la cantidad de movimiento y, al igual que en nuestro estudio anterior, tenemos

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_i \quad (11-13)$$

donde  $\mathbf{F}_i = -m\mathbf{A}$  y  $\mathbf{A}$  es el vector aceleración del sistema de coordenadas  $S'$ . Obsérvese que  $\mathbf{A}$  es la aceleración *de traslación* del sistema de coordenadas; es decir, los ejes de coordenadas de  $S'$  son siempre paralelos a los de  $S$ . La rotación de  $S'$  introduce fuerzas de inercia adicionales, según veremos. Como  $\mathbf{A}$  no es necesariamente constante, la fuerza de inercia  $\mathbf{F}_i = -m\mathbf{A}$  podrá variar con el tiempo.

**EJEMPLO 1.** En el interior de un ascensor se halla un muchacho que sostiene una maleta. El ascensor tiene una aceleración  $\mathbf{A}$  que puede estar dirigida hacia arriba ( $\mathbf{A}$  positiva) o hacia abajo ( $\mathbf{A}$  negativa). ¿Qué fuerza ejerce la maleta sobre la mano? Consideremos el problema desde dos puntos de vista.

*De acuerdo con  $S$ :* Respecto al sistema  $S$  de coordenadas solidario a tierra, la maleta, así como el muchacho y el ascensor, está acelerada, y por tanto, la fuerza resultante de interacción  $\mathbf{F} - m\mathbf{g}$  (contacto y gravedad) debe ser igual a la velocidad de variación de la cantidad de movimiento observada  $m\mathbf{A}$ ; es decir,

$$\mathbf{F} - m\mathbf{g} = m\mathbf{A} \quad \text{o sea} \quad \mathbf{F} = m(\mathbf{g} + \mathbf{A})$$

Si es positiva  $\mathbf{A}$  (ascensor acelerado hacia arriba), la fuerza de contacto que ejerce la mano sobre la maleta es mayor que el peso de ésta, y parecerá más pesada. En cambio, cuando  $\mathbf{A}$  es negativa (ascensor acelerado hacia abajo) la maleta parece más ligera, y

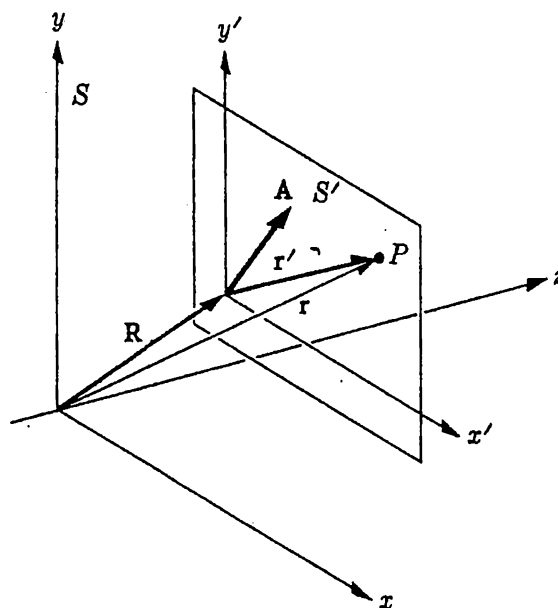


Fig. 11-6. Los ejes de los sistemas de coordenadas  $S$  y  $S'$  son siempre paralelos, pero el origen de  $S'$  tiene una aceleración  $\mathbf{A}$ .

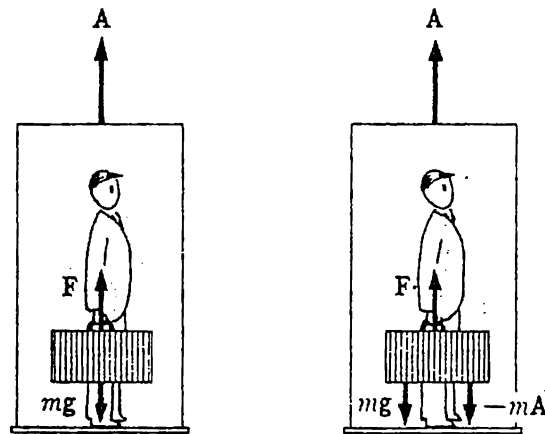


Fig. 11-7. Respecto a un sistema de coordenadas en reposo, la velocidad de variación de la cantidad de movimiento de la maleta es  $mA$ , por lo que sobre ella se ejercerá una fuerza resultante  $F - mg = mA$ . Respecto a un sistema de coordenadas del ascensor, la maleta se halla en equilibrio bajo la acción de tres fuerzas, las dos de interacción  $F$  y  $mg$  y la fuerza de inercia  $F_i = -mA$ .

si  $A$  fuera igual a  $-g$ , la maleta no ejercería fuerza alguna sobre la mano. El ascensor, el muchacho y la maleta tendrían todos el movimiento de caída libre.

*De acuerdo con  $S'$ :* Respecto a un sistema de coordenadas solidario al ascensor, la maleta se halla en reposo relativo a dicho sistema y, por tanto, se saca la conclusión de que la maleta se halla en equilibrio. Pero se halla en equilibrio bajo la influencia de las dos fuerzas de interacción (fuerza  $F$  ejercida por la mano y peso  $mg$ ) y de la fuerza de inercia  $F_i = -mA$ . Como la aceleración respecto a  $S'$  es nula, tenemos

$$F - mg - mA = 0 \quad \text{o sea} \quad F = m(g + A)$$

En otras palabras, el peso aparente de un cuerpo en un ascensor acelerado es  $m(g + A)$  y para un observador situado en el sistema de coordenadas del ascensor, no hay manera de distinguir si el peso aparente de los cuerpos se debe a la fuerza gravitatoria o a una aceleración uniforme del sistema de coordenadas.

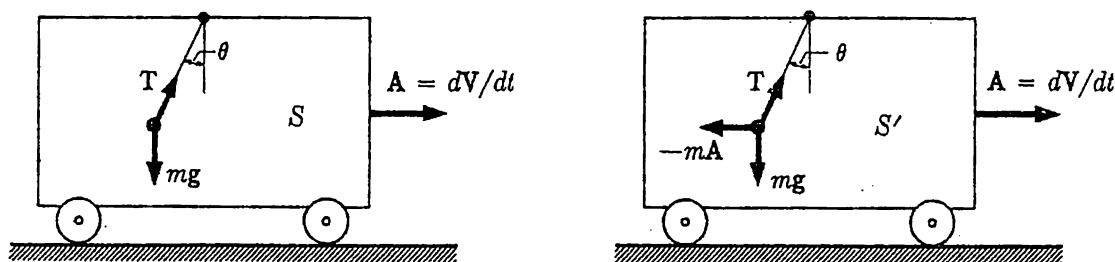


Fig. 11-8. En el interior de un coche acelerado pende del techo una pesa de masa  $m$ . Para  $S$ , la masa está acelerada hacia la derecha, por lo que deberá ejercerse sobre ella una fuerza resultante. Para  $S'$ , la masa no está acelerada, por lo que deberá estar en equilibrio bajo la acción de las fuerzas  $mg$ ,  $T$  y de la fuerza de inercia  $-mA$ . Desde luego, tanto  $S$  como  $S'$  predicen el mismo ángulo  $\theta$ .

EJEMPLO 2. Del techo de un coche acelerado pende una pesa mediante un hilo. ¿Cuál será el ángulo de equilibrio de la pesa colgante?

De acuerdo con  $S$ : El observador que describe el movimiento respecto a tierra razona que la masa  $m$  se halla en equilibrio en la dirección  $y$ , acelerándose en la dirección  $x$  bajo la acción de dos fuerzas de interacción: la tensión de la cuerda representada por  $T$  y el peso  $mg$ . Por tanto,

$$T \cos \theta - mg = 0, \quad T = \frac{mg}{\cos \theta}$$

y

$$T \sin \theta = mA.$$

Para el ángulo  $\theta$  tendremos, pues,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{A}{g}$$

La masa deberá hallarse a la izquierda del centro del coche, ya que sólo en este caso tendrá  $T$  una componente según el semieje  $+x$ .

De acuerdo con  $S'$ : Una persona en reposo en el sistema  $S'$  de coordenadas del coche diría que la masa estaba en equilibrio, ya que está en reposo respecto a ella. Supondremos que la persona situada en  $S'$  sabe que ella y su coche están acelerados. Las fuerzas de interacción son la tensión del hilo y el peso, como antes, y la fuerza de inercia es  $-mA$ . Por tanto, de acuerdo con  $S'$ ,

$$T \cos \theta - mg = 0, \quad -mA + T \sin \theta = 0$$

y para el ángulo  $\theta$  queda, como antes,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{A}{g}$$

El lector debe darse cuenta de que, aún cuando los pasos algebraicos utilizados en ambos métodos de análisis parecen ser análogos, el razonamiento es totalmente diferente.

Hemos visto que en el análisis del movimiento respecto a un sistema de coordenadas acelerado, podemos tener en cuenta esta aceleración y considerar en reposo el sistema de coordenadas introduciendo una fuerza de inercia  $-mA$  aplicada a un cuerpo de masa  $m$  cuyo movimiento queremos estudiar. Si es  $A$  una aceleración constante, la fuerza de inercia es proporcional a la masa inerte del cuerpo que se estudia, que es lo que ocurre en el caso de una fuerza gravitatoria local (suponiendo iguales las masas inerte y pesante). Este hecho importantísimo se estudiará más adelante. De momento, observemos que cuando un sistema de coordenadas tiene una aceleración constante, la fuerza de inercia  $-mA$ , por

ser análoga a la fuerza de la gravedad, puede tratarse de igual manera. En otras palabras, todos los métodos conocidos como, por ejemplo, el teorema de las fuerzas vivas y el concepto de energía potencial, pueden utilizarse sin alteración alguna.

**EJEMPLO.** Se monta una varilla ligera de longitud  $2r$  sobre un eje vertical que, a su vez, está montado sobre un carrito que tiene una aceleración constante  $A$  dirigida hacia la derecha, según se indica en la figura 11-9. La varilla lleva un encaje en su centro que le permite girar libremente en un plano horizontal. A los extremos de la varilla se fijan dos masas  $m$  y  $M$ , en la forma indicada. ¿Cuál es el movimiento de la varilla respecto a un sistema móvil de coordenadas solidario al carrito?

Las fuerzas de la gravedad no intervienen por tratarse de un movimiento en un plano horizontal. Sin embargo, las dos masas están sometidas a fuerzas de inercia  $mA$  y  $MA$ , dirigidas hacia la izquierda. Si son iguales las masas  $m$  y  $M$ , la varilla no tiene tendencia a girar. Si son desiguales las masas, la mayor se moverá hacia la izquierda (hacia las  $x$  negativas).

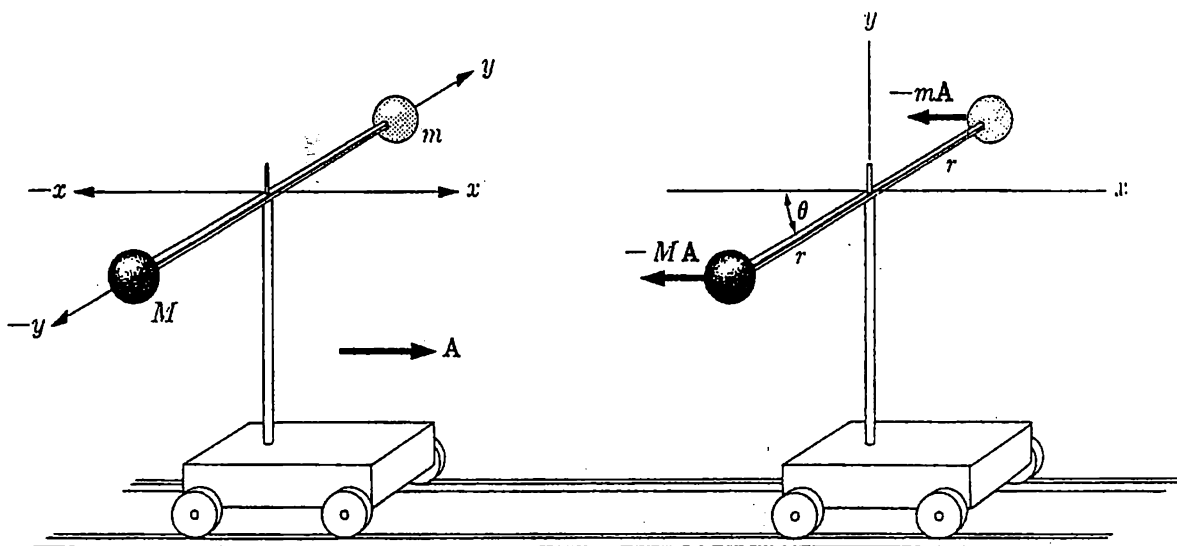


Figura 11-9

Más generalmente, la varilla oscila como un péndulo en torno al semieje negativo de las  $x$ . Cuando la varilla forma un ángulo  $\theta$  con este semieje, habrá un momento  $\tau = -(M - m)Ar \sin \theta$ , o bien  $-(M - m)Ar\theta$  para valores pequeños de  $\theta$ . Este momento debe ser igual a la velocidad de variación del momento cinético; es decir,  $I_0 d^2\theta/dt^2 = -(M - m)Ar\theta$ , y como  $I_0 = Mr^2 + mr^2$ , la varilla oscilará en torno a la posición  $\theta = 0$  con un período

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Mr^2 + mr^2}{(M - m)rA}}$$



El sistema tiene una energía potencial  $(M - m)Ar(1 - \cos \theta)$  y si se suelta desde  $\theta_0$ , la energía cinética en  $\theta = 0$  será

$$E = (M - m)Ar(1 - \cos \theta_0)$$

**11-4 Fuerzas de inercia en los movimientos planetario y lunar.** *Fuerza gravitatoria ejercida sobre la Luna.* Si bien la Luna se halla del Sol a una distancia 390 veces mayor que de la Tierra, la masa de ésta sólo es  $1/330\,000$  de la de aquél. En consecuencia, la fuerza gravitatoria que el Sol ejerce sobre la Luna es 2,2 veces mayor que la que le ejerce la Tierra. ¿Por qué, en estas condiciones, no cae la Luna sobre el Sol?

Un observador situado en un sistema  $S$  de coordenadas fijo respecto al Sol y cuyos ejes tienen direcciones fijas respecto a las estrellas, ve caer la Luna hacia el Sol, en el mismo sentido que ve caer la Tierra. Es decir, un observador situado en el Sol ve que la Luna, al igual que la Tierra, recorre una trayectoria aproximadamente circular alrededor del Sol y que la fuerza gravitatoria que éste ejerce sobre la Luna es la precisa para mantenerla en su órbita circular. En la trayectoria de la Luna se aprecia un pequeñísimo culebreo debido al movimiento de la Luna alrededor de la Tierra, pero el movimiento global de la Luna es, muy aproximadamente, el mismo que el de la Tierra.

Un observador situado en un sistema de coordenadas  $S'$  fijo respecto a la Tierra y tal que las direcciones de sus ejes sigan siendo fijas respecto a las estrellas, ve las cosas de manera diferente. Para él, el movimiento global de la Luna es el que le hace recorrer la órbita en torno a la Tierra cada 27,3 días. En el capítulo 10 vimos que puede predecirse correctamente el comportamiento de la Luna ignorando la gran fuerza que le ejerce el Sol. ¿Cómo puede ser esto?

En el estudio del movimiento lunar que realizamos anteriormente, ignorábamos la fuerza que ejerce el Sol sobre la Luna y el hecho de que el sistema de coordenadas solidario a la Tierra está acelerado. Habría que haber incluido las fuerzas de inercia. Aparentemente, las dos fuerzas que se ignoraron se contrarrestan, según vamos a ver.

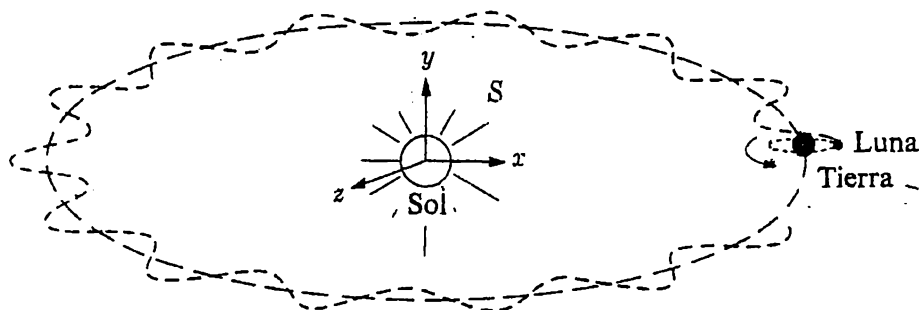


Fig. 11-10. La Luna se mueve alrededor del Sol siguiendo una órbita casi coincidente con la de la Tierra. La distancia Tierra-Luna sólo es un 0,4 % de la distancia Tierra-Sol y en la figura se ha exagerado mucho el culebreo de la Luna en su órbita.

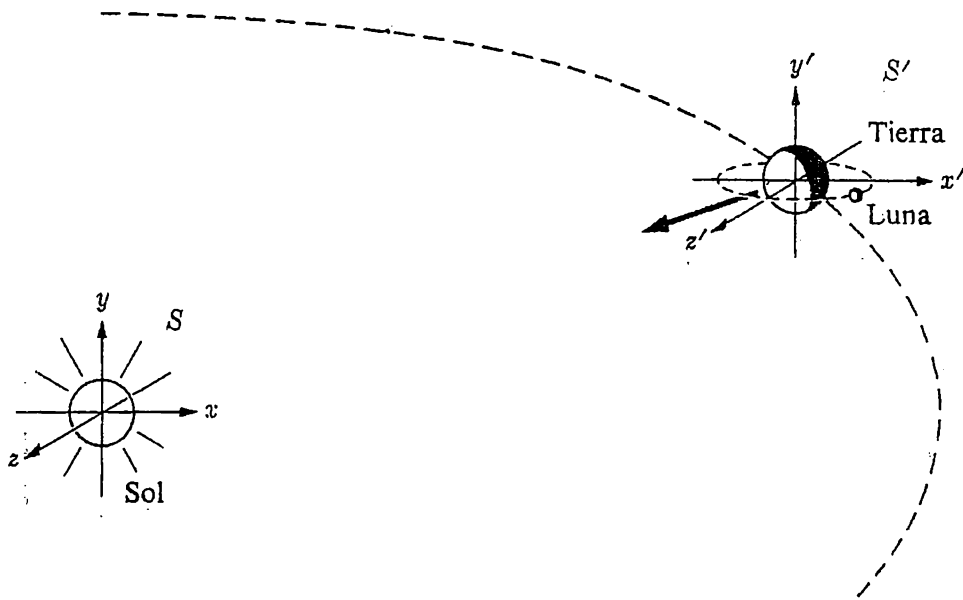


Fig. 11-11. Un sistema de coordenadas  $S'$  solidario a la Tierra *no* es un sistema inercial, ya que la Tierra está acelerada hacia el Sol continuamente. (Téngase en cuenta que los ejes de  $S$  y  $S'$  se mantienen paralelos. Es el origen de  $S'$  el que está acelerado).

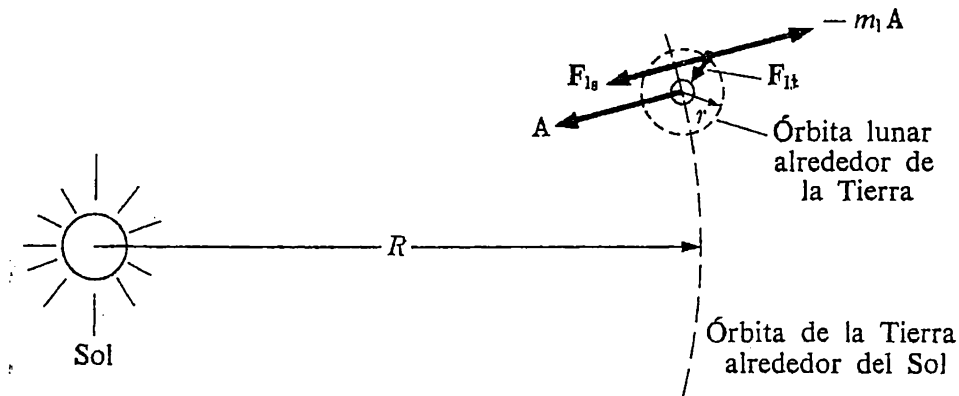


Fig. 11-12. La aceleración  $A$  está dirigida desde el centro de la Tierra hacia el Sol, y, por tanto, la fuerza de inercia  $-m_l A$  que se ejerce sobre la Luna está dirigida casi radialmente en el sentido de alejamiento del Sol.

La Tierra está acelerada continuamente hacia el Sol. Si es  $A$  esta aceleración, deberemos suponer que existe una fuerza de inercia  $F_i = -m_l A$  que se ejerce sobre la Luna, siendo  $A$  la aceleración del sistema de coordenadas en el centro de la Tierra. Esta aceleración está dirigida a lo largo de la recta Tierra-Sol. La fuerza de inercia  $F_i$  sobre la Luna no está dirigida exactamente radial y en el sentido de alejamiento del Sol porque, salvo durante un eclipse, el Sol, la Tierra y la Luna no están alineados. Desde luego, la fuerza de inercia que actúa

sobre la Luna es casi radial porque la distancia Tierra-Sol es mucho mayor que la distancia Tierra-Luna. La magnitud de la fuerza de inercia es  $m_l \omega^2 R$ , donde  $\omega$  es la velocidad angular de la Tierra alrededor del Sol y  $R$  es la distancia Tierra-Sol. Hemos supuesto circular la órbita de la Tierra.

Sobre la Luna se ejercen dos fuerzas de interacción: la fuerza gravitatoria del Sol y la fuerza gravitatoria de la Tierra. La fuerza gravitatoria solar está dirigida hacia el Sol. Si despreciamos la pequeña diferencia existente entre las distancias Luna-Sol y Tierra-Sol, la fuerza gravitatoria solar es

$$F_{ls} = \frac{Gm_l m_s}{R^2}$$

La fuerza de inercia  $m_l \omega^2 R$  y la fuerza atractiva del Sol son, muy aproximadamente, de igual magnitud y dirección, pero de sentidos contrarios. Por tanto, en la ecuación de fuerzas de  $S'$ ,

$$F' = F_{lt} + F_{ls} + F_i$$

estos dos términos se destruyen y tenemos

$$F' = G \frac{m_l m_t}{r^2}$$

donde la fuerza está dirigida hacia la Tierra. En otras palabras, un sistema de coordenadas fijo respecto a la Tierra, pero con ejes de direcciones fijas respecto a las estrellas constituye, con muy buena aproximación, un sistema inercial para el estudio del movimiento lunar, ya que la fuerza gravitatoria que ejerce el Sol sobre la Luna contrarresta casi exactamente a la fuerza de inercia resultante de la aceleración de la Tierra hacia el Sol.

*Mareas.* El origen de las mareas, al igual que tantos fenómenos «mecánicos» de la Naturaleza, fue explicado por NEWTON. Enunciados brevemente, los hechos observados en las mareas son:

- (1) El nivel de la superficie de los océanos se eleva y desciende periódicamente.
- (2) Por término medio, existen dos mareas altas y dos mareas bajas cada día y el tiempo medio transcurrido entre dos pleamares (mareas altas) es de 12 horas y 25 minutos.
- (3) Las magnitudes de las mareas varían sobre la superficie terrestre y también con el tiempo. En muchos lugares se alternan las magnitudes de las mareas. Una pleamar será algo más alta que la que le sigue. Ocasionalmente, existen mareas especialmente altas (vivas) y especialmente bajas (muertas).

Desde hace tiempo se sospechaba que la Luna influye en las mareas, porque el período medio de revolución de la Luna en su movimiento *aparente* alrededor

de la Tierra se veía que era de 24 horas y 50 minutos, exactamente igual que el tiempo que transcurre entre pleamares alternas (véase fig. 11-13). Además, se sabía que las mareas vivas se producían en el tiempo de luna nueva y luna llena, mientras que las mareas muertas tenían lugar durante los cuartos creciente y menguante. Esta sospecha ha resultado totalmente válida, así como la conjetura popular de que la fuerza gravitatoria que ejerce la Luna «tira hacia arriba» del agua de un lago de la Tierra. La dificultad, el hecho que queda por explicar, es que hay *dos* pleamares cada día. Evidentemente, el agua de los lados de la Tierra se halla sometida a «apilamientos» hacia la Luna y en el sentido opuesto. Existe un «apilamiento» adicional del agua atribuible al Sol, pero de momento sólo consideraremos las mareas debidas a la Luna y el sistema Tierra-Luna.

Con el razonamiento cualitativo siguiente podremos ver la causa fundamental de los dos «apilamientos» del agua. Según nuestras hipótesis, la Luna cae libremente hacia la Tierra y ésta cae libremente hacia la Luna. Desde el punto de vista de un observador en reposo, el hecho de que Tierra y Luna recorran órbitas una alrededor de la otra, carece de importancia. Las fuerzas de interac-

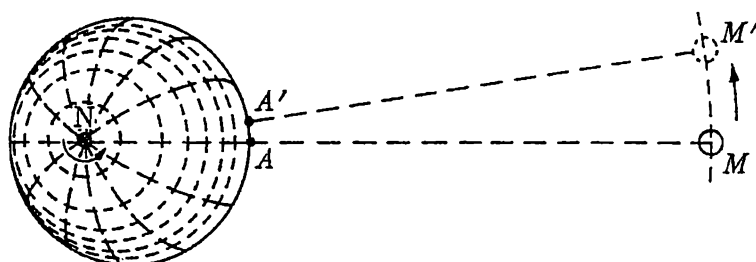


Fig. 11-13. La Luna gira alrededor de la Tierra una vez cada 27,3 días y la Tierra gira alrededor de su eje una vez cada día. En el instante representado, un observador en *A* ve la Luna en el meridiano. En 24 horas, el observador habrá girado con la Tierra y vuelto a *A*, pero la Luna se habrá movido a *M'*. Cincuenta minutos más tarde, el observador encontrará a la Luna en *M'*, la cual vuelve a hallarse en su meridiano. (El meridiano es un gran círculo en la esfera celeste, que pasa por los polos Norte y Sur y por el cenit del observador.)

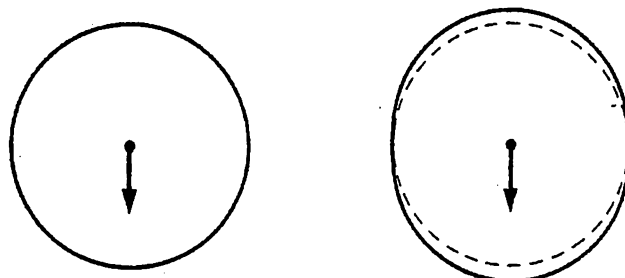


Fig. 11-14. Si la Tierra cayera hacia la Luna en un campo gravitatorio uniforme, el agua mantendría una forma esférica. Pero como el campo gravitatorio lunar disminuye al crecer la distancia, la esfera mencionada se deforma.

ción no dependen de la velocidad y para un observador en reposo no hay fuerzas de inercia. Si fuera uniforme el campo gravitatorio en el que cae la Tierra, todos los elementos de masa, incluyendo las aguas superficiales de la Tierra, estarían sometidos a la misma fuerza exterior y caerían con la misma aceleración, con lo que el agua de la superficie terrestre mantendría la forma esférica. Sin embargo, el campo gravitatorio lunar no es uniforme, ejerciéndose sobre los elementos de agua más próximos a la Luna una fuerza algo mayor y sobre los más alejados una fuerza algo menor. Damos a continuación un estudio más detallado de los dos apilamientos de agua.

---

Aun cuando ordinariamente decimos que la Luna gira alrededor de la Tierra, es más correcto decir que la Tierra y la Luna giran alrededor de su centro de masa común. La masa  $m_t$  de la Tierra es unas 81 veces mayor que la masa  $m_l$  de la Luna. Luego el centro de masa se halla a una distancia  $r_1 = rm_l/(m_t + m_l) \approx r/82$  del centro de la Tierra, siendo  $r$  la distancia Tierra-Luna. Como la distancia a la Luna es de unos 60 radios terrestres, el centro de masa se halla en el interior de la Tierra a sólo  $3R/4$  del centro. En la mayoría de los estudios cualitativos, este desplazamiento del centro de masa respecto al centro de la Tierra carece de importancia. En cambio, en el estudio del movimiento de las mareas, este desplazamiento es de importancia primordial, puesto que la Tierra gira en realidad alrededor del centro de masa. Así pues, un sistema de coordenadas solidario a la Tierra, aunque tenga los ejes de direcciones fijas en el espacio, está acelerado y, por tanto, no es un sistema inercial. Para mayor claridad, hemos representado en la figura 11-15 a la Tierra y un sistema de coordenadas solidario que giran alrededor de un punto  $P$  exterior. Obsérvese que no tenemos en cuenta aquí el movimiento de rotación de la Tierra en torno a su eje. El sistema de coordenadas tiene ejes de direcciones fijas en el espacio, con el eje  $y'$ , por ejemplo, dirigido siempre hacia una estrella lejana. Este sistema de coordenadas está acelerado hacia el punto  $P$  y la magnitud de la aceleración es

$$A = \omega^2 r_1$$

donde el radio  $r_1$  de la circunferencia que recorre el sistema de coordenadas es la distancia del centro de la Tierra al centro de masa situado en  $P$ . La cantidad  $\omega = 2\pi/T$  es la velocidad angular de la Luna y de la Tierra alrededor de su centro de masa y  $T$  es igual a 27,3 días. A consecuencia de la aceleración existe una fuerza de inercia  $F_i = -mA$  que se ejerce sobre toda masa cuyo movimiento estudiemos respecto a este sistema de coordenadas acelerado. En el centro de masa de la Tierra, esta fuerza queda compensada totalmente por la fuerza gravitatoria de la Luna, pero en los demás puntos esta compensación no es total. Por ejemplo, el punto  $C$  de la figura 11-16 está algo más cerca de la Luna que el centro  $O$  de la Tierra y, por tanto, la fuerza gravitatoria  $F_g$  que se ejerce sobre una masa  $m$  situada en aquel punto será algo mayor que la fuerza de inercia  $F_i$ . En cambio, el punto  $D$  está algo más alejado de la Luna que el punto  $O$  y por tanto la fuerza de inercia será la mayor de las dos. En otros puntos

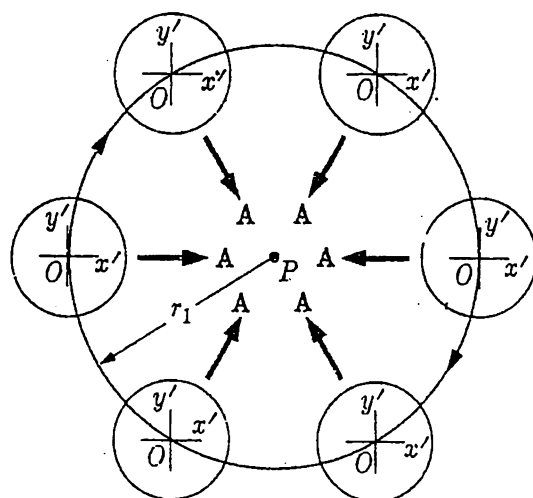
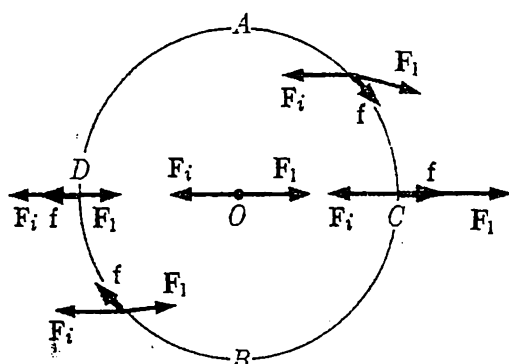


Fig. 11-15. Un sistema de coordenadas solidario a la Tierra y con ejes de direcciones fijas en el espacio, está acelerado. La aceleración está dirigida hacia  $P$  y tiene por magnitud  $4\pi^2 r_1 / T^2 = \omega^2 r_1$ . En el caso del sistema Tierra-Luna, el punto  $P$  se halla en el interior de la Tierra y en el caso del sistema Tierra-Sol,  $P$  se halla mucho más lejos de la Tierra de lo que pudiera representarse en el dibujo.



Luna

Fig. 11-16. Origen de la fuerza lunar de las mareas. La fuerza gravitatoria de la Luna es  $F_g$  y  $F_i$  es la fuerza de inercia resultante de la rotación de la Tierra en torno al centro de masa del sistema Luna-Tierra. Estas dos fuerzas sólo se contrarrestan en el centro de la Tierra. En otros puntos,  $F_g$  y  $F_i$  tienen una resultante  $f$ .

de la superficie terrestre ocurre lo mismo, pero en ellos las fuerzas de inercia y gravitatoria no tienen la misma dirección. Resumiendo; la fuerza resultante  $f$  de las dos fuerzas  $F_i$  y  $F_g$  sólo es nula en el centro de la Tierra. En el lado de la Tierra situado frente a la Luna, la resultante tiende a estar dirigida hacia ésta, mientras que en el lado opuesto de la Tierra tiende a estar dirigida en el sentido de alejamiento de la Luna. Un fluido en equilibrio presenta una superficie que forma una superficie equipotencial. Luego, la superficie del agua en un cubo es un plano horizontal y la superficie de los océanos, prescindiendo de los efectos de las mareas, es esférica. Acabamos de ver que la fuerza *resultante* (incluida la fuerza gravitatoria terrestre) que se ejerce so-

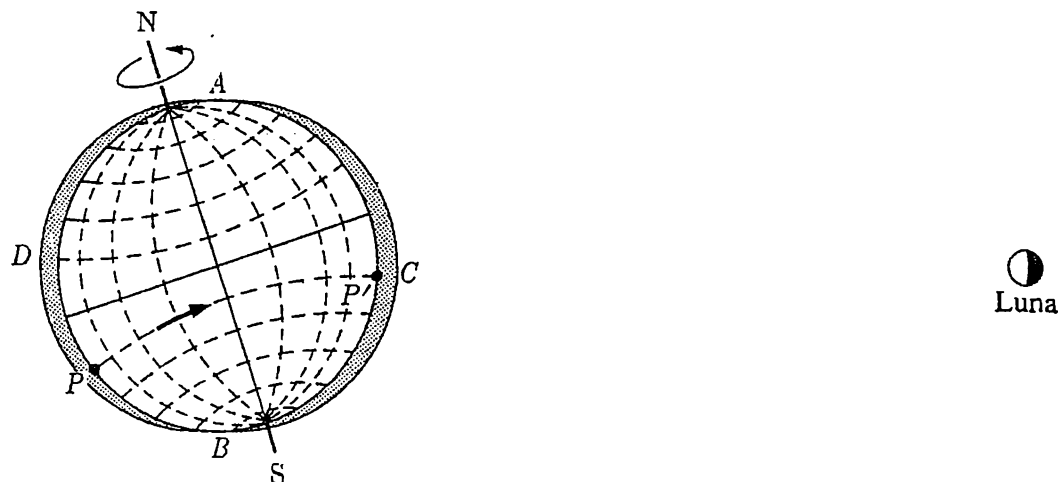


Fig. 11-17. Los dos apilamientos de agua (muy exagerados) se deben a la fuerza gravitatoria lunar y a la rotación de la Luna alrededor de la Tierra. En el instante representado, habrían mareas altas en  $P$  y  $P'$ . Unas 12 horas después (12 horas 25 minutos)  $P$  habrá avanzado a consecuencia de la rotación terrestre hasta  $P'$  donde habrá una pleamar algo más alta.

bre una masa de 1 g en el punto  $C$  o  $D$  es algo *menor* que en  $A$  y en  $B$  (véase fig. 11-17). Una superficie equipotencial estará, pues, más apartada del centro de la Tierra en  $C$  y  $D$  que en  $A$  y  $B$ . Como la superficie del agua coincide con una superficie equipotencial, habrá un apilamiento de agua en  $C$  y también en  $D$ . Al girar la Tierra alrededor de su eje, en realidad gira bajo esos apilamientos de agua y por ello en un punto dado de la superficie terrestre se producen diariamente dos mareas altas. Obsérvese también que, por no ser perpendicular el eje de la Tierra el plano de la órbita lunar, las dos mareas no son de igual magnitud.

Aun cuando la fuerza que ejerce el Sol sobre la Tierra es unas 180 veces mayor que la que ejerce la Luna, la fuerza elevadora de las mareas que ejerce el Sol sólo es la mitad de la que ejerce la Luna. Esto se debe a que el Sol está mucho más lejos que la Luna y la *diferencia* entre las fuerzas solares en distintos puntos de la superficie terrestre es menor que la de las fuerzas lunares. Cuando hay novilunio o plenilunio, la Tierra, el Sol y la Luna se hallan, más o menos, en línea recta. (En el novilunio, la Luna se halla entre la Tierra y el Sol, y en el plenilunio es la Tierra la que se encuentra entre el Sol y la Luna.) Por tanto, en tales casos, las mareas producidas por el Sol y la Luna están en fase y se ayudan para dar origen a una marea especialmente alta (mareas vivas). En cambio, cuando la Luna se halla en cuarto creciente o menguante, se halla sobre una recta más o menos perpendicular a la recta Tierra-Sol y, en estos casos, las mareas originadas por el Sol y la Luna están en oposición dando lugar a mareas muertas.

El comportamiento detallado de las mareas es enormemente complicado a causa de la inercia del agua y del hecho de que las aguas oceánicas deben fluir sobre el fondo del mar por entre los continentes y rodeando las masas de tierra. Por tanto, las mareas altas no se mantienen coincidentes con la posición de las fuerzas elevadoras de las mareas, sino que van retrasadas tiempos que pueden ser de varias horas.

*Principio de la equivalencia.* En nuestros estudios anteriores hemos observado que el efecto de una aceleración constante es igual, en todos los aspectos, al de un campo gravitatorio uniforme. Esta observación casi incidental resulta tener consecuencias muy interesantes.

Antes de estudiar más a fondo esta cuestión, recalcaremos que la masa que interviene en el término  $-mA$  de la fuerza de inercia es la *masa inerte*, masa que, en principio, surge de experimentos tales como los de los choques de carritos y de discos, en los cuales se comparan las inercias de los cuerpos. La masa que interviene en la fuerza gravitatoria es, en cambio, la *masa pesante*, la cual surge, en principio, de experimentos tales como medidas de pesos en las que se comparan fuerzas gravitatorias que se ejercen sobre cuerpos. Según se vio en el capítulo 3, las escalas de masas que evolucionan a partir de estos conceptos tan diferentes de la masa, son equivalentes, al menos dentro de los límites de precisión de los experimentos realizados acerca del particular. El BARÓN ROLAND EÖTVÖS, físico húngaro que estudió diversos aspectos de la fuerza gravitatoria terrestre, realizó alrededor de 1909 una serie de experimentos de precisión que pusieron de manifiesto que la razón de la masa pesante a la inerte era la misma para todas las sustancias ensayadas, con un error inferior a uno entre  $10^8$ .

En la Teoría de la Relatividad Generalizada, postulaba EINSTEIN que las masas pesante e inerte son *estrictamente* proporcionales. Por ejemplo, un observador situado en el ascensor de la figura 11-7 no podría, según el postulado de EINSTEIN, *ni siquiera en principio* decir si el peso aparente de su maleta se debía a un campo gravitatorio uniforme, a una aceleración uniforme, o a una combinación de ambas causas. Según el postulado de EINSTEIN de la equivalencia, el observador hipotético podría realizar libremente cualquier tipo de medida física que él prefiriera, con todo y no poder determinar ninguna diferencia entre los efectos de la gravedad y de la aceleración uniforme. En su medida podrían intervenir fenómenos mecánicos, eléctricos, magnéticos, nucleares o de cualquier otro tipo. (Desde luego, un observador que pueda mirar al exterior por una ventana, no está en el espíritu del postulado.)

El postulado de la equivalencia, sugerido por los resultados de experimentos de Mecánica, conduce a la sorprendente predicción de que la luz debe curvarse en un campo gravitatorio. El razonamiento no es difícil y vamos a estudiarlo a causa de su importancia y también porque constituye un bello ejemplo de la delicada conexión entre dos ramas diferentes del saber.

Imaginemos en primer lugar un ascensor aislado que se mueva con velocidad constante  $V_0$  en el sentido indicado en la figura 11-18. Un observador exterior al ascensor ve que un rayo de luz penetra por  $P_1$  en el ascensor y sale de él por  $P_2$ . Durante el tiempo  $\Delta t$  que tarda el frente del haz luminoso en atravesar el ascensor, éste habrá recorrido una distancia  $V_0 \Delta t$ . En cambio, un observador situado en el ascensor saca correctamente la conclusión de que, según él, el haz



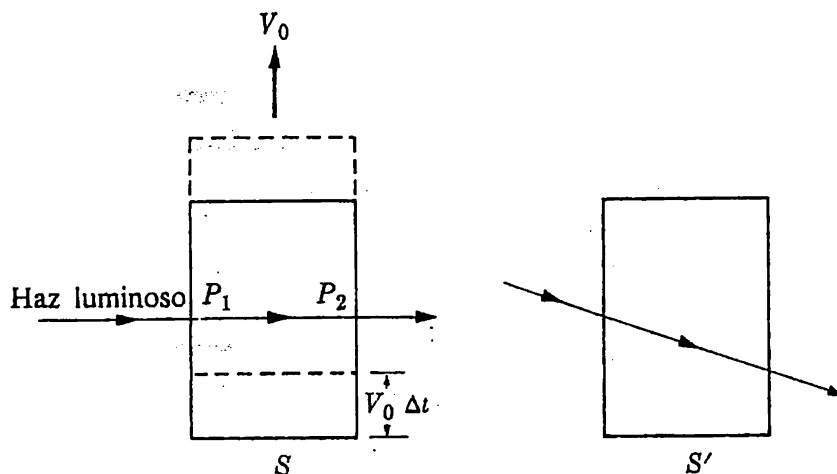


Fig. 11-18. El ascensor se mueve hacia arriba con velocidad constante. De acuerdo con  $S$  y  $S'$ , el haz luminoso sigue un camino rectilíneo.

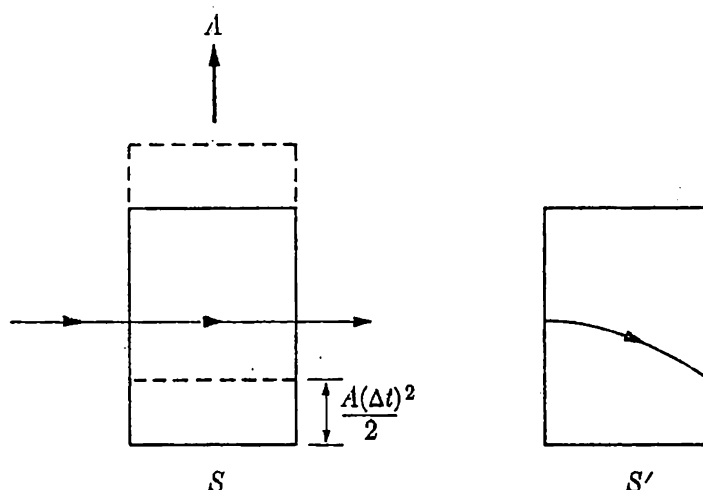


Fig. 11-19. El ascensor está acelerado hacia arriba, pero tiene velocidad nula cuando penetra el haz luminoso en el ascensor. Un observador situado en el ascensor ve el haz luminoso curvado hacia abajo.

luminoso ha recorrido una trayectoria inclinada y que, por tanto,  $P_1$  y  $P_2$ , que son los puntos de entrada y salida, se hallan a diferentes distancias sobre el suelo. A pesar de todo, la luz ha recorrido una trayectoria rectilínea según ambos observadores.

Imaginemos ahora acelerado el ascensor, pero que siga aislado en el espacio. Sea cero la velocidad del ascensor cuando penetra en él el frente del haz luminoso. Cuando salga éste del ascensor, éste habrá recorrido una distancia  $A(\Delta t)^2/2$ . El observador exterior al ascensor sigue viendo que el haz luminoso se mueve horizontalmente, pero el observador situado en el ascensor ve ahora que el haz luminoso se curva hacia el suelo. El haz luminoso, según el observador acelera-

do, ya no se mueve en línea recta, sino que se curva. Recordemos que, según el postulado de la equivalencia, el observador situado en el ascensor no podría, ni siquiera en principio, distinguir entre una aceleración uniforme y un campo gravitatorio independientemente del tipo de fenómeno o experimento que se trate. Luego, si un haz luminoso «cae» en un ascensor acelerado aislado, también deberá caer en un ascensor en reposo, en presencia de un campo gravitatorio.

Desde luego, este razonamiento no *prueba* que los campos gravitatorios curven a los rayos luminosos. Pero si pudiera demostrarse experimentalmente que los rayos luminosos no se curvan, se habría demostrado la falsedad del postulado de EINSTEIN antes enunciado. En el campo gravitatorio terrestre, un rayo luminoso «caería» de igual manera que un objeto material cualquiera, siendo  $gt^2/2$  la distancia caída en un tiempo  $t$ . En este sentido, la luz tendría masa. Pero

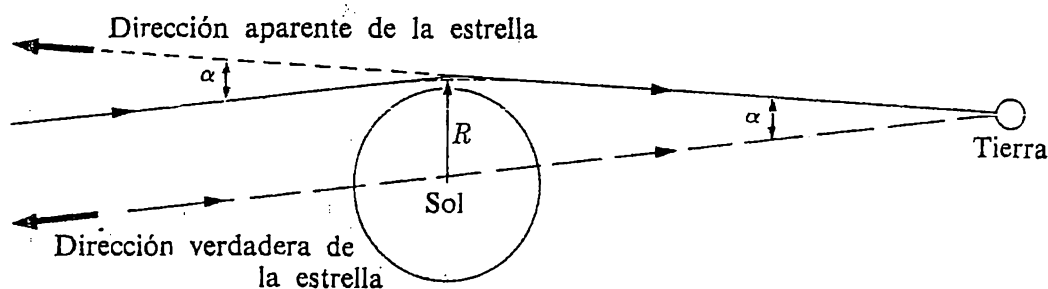


Fig. 11-20. La luz de una estrella resulta desviada un ángulo  $\alpha$  por el campo gravitatorio solar. Para un observador situado en la Tierra la estrella está aparentemente desviada un ángulo  $\alpha$ . El valor de Einstein para  $\alpha$  es  $2Gm_s/Rc^2$ , donde  $G$  es la constante de la Gravitación,  $m_s$  la masa del sol,  $R$  la distancia mínima al centro del Sol, y  $c$  la velocidad de la luz en el vacío.

la velocidad de la luz es tan grande ( $3 \cdot 10^8$  m/s) y los tiempos de recorrido tan pequeños, que no se ha podido medir nunca esta curvatura de la luz originada por la Tierra. En una de sus primeras publicaciones acerca de Relatividad, EINSTEIN predijo cuál debía ser la curvatura sufrida por la luz procedente de una estrella al pasar cerca del Sol. Incluso en este caso es muy pequeña la curvatura y durante muchos años se han sentido atraídos los astrónomos a medirla con precisión. Las medidas deben realizarse durante un eclipse de Sol y en el lugar en que pueda apreciarse como tal, ya que de otra manera no pueden verse ni fotografiarse las estrellas a causa de la luz solar que se difunde en la atmósfera terrestre. Debe realizarse un conjunto de medidas análogas (varios meses después), por la noche, con las mismas estrellas. Se comparan después los dos conjuntos de medidas. Según el postulado de la equivalencia (Relatividad Generalizada) la posición angular de las estrellas debería haber variado 0,87 segundos de arco. Hasta ahora, las medidas (realizadas en 1922, 1929 y 1951) concuerdan satisfactoriamente con el postulado, si bien no podemos considerarlo definitivamente establecido.

**11-5 Movimiento respecto a un sistema de coordenadas en rotación.** Hasta ahora hemos evitado los sistemas de coordenadas cuyos ejes giren. En varios ejemplos, los sistemas de coordenadas estaban animados de movimiento de traslación que seguía una trayectoria circular, pero las *direcciones* de los ejes eran siempre fijas. En realidad, todo sistema de coordenadas solidario a la superficie terrestre gira, ya que lo hace la Tierra. Por ejemplo, la dirección de un borde de esta página apunta ahora hacia un lugar fijo de la esfera celeste, pero dentro de diez minutos (aunque no hayamos tocado el libro) su dirección habrá variado.

Para la mayoría de los fines, según veremos, el efecto de la rotación terrestre sobre los experimentos de laboratorio es muy pequeño.

Con un experimento imaginario sencillo podemos ver que cuando gira un sistema de coordenadas, surgen complicaciones esenciales. Imaginemos una pla-

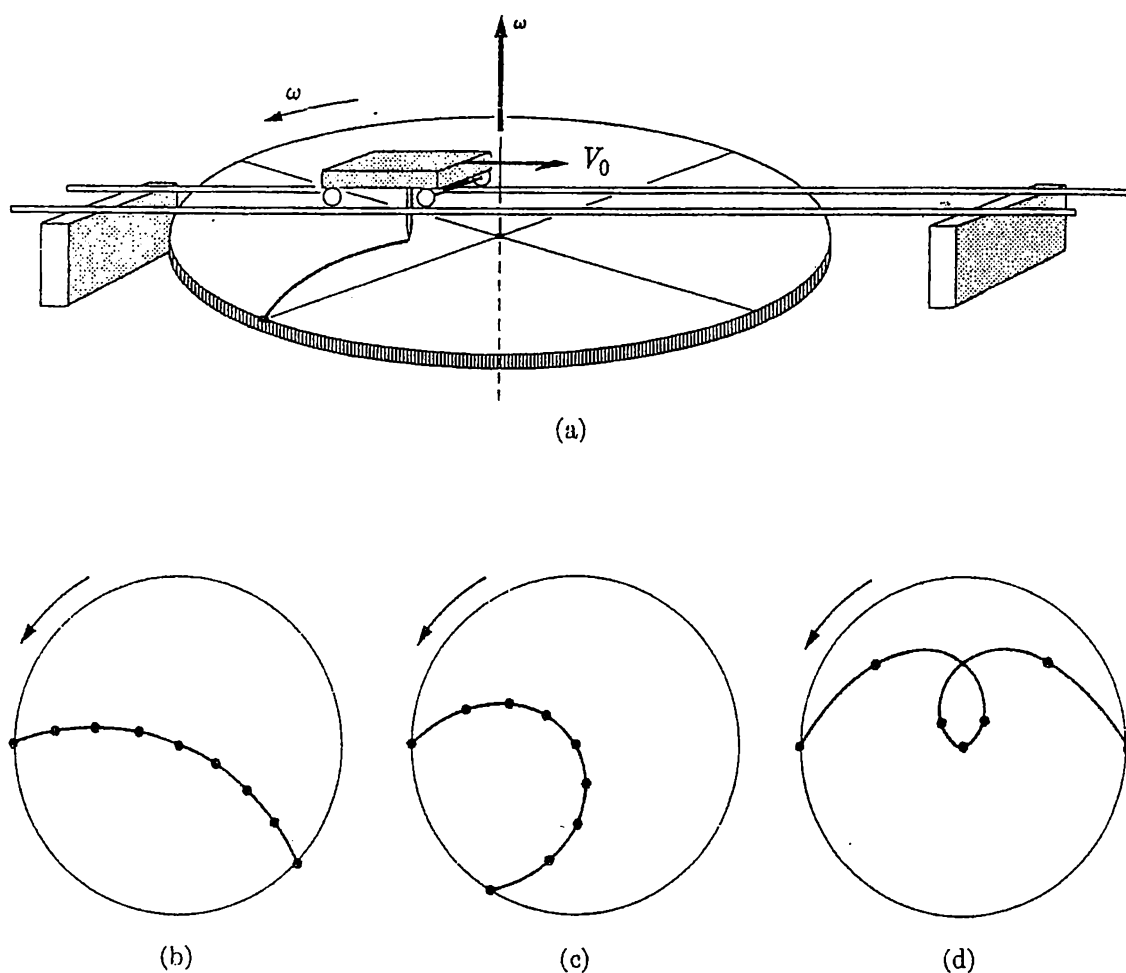


Fig. 11-21. Un cuerpo que se mueva en línea recta con celeridad constante respecto a un sistema de coordenadas fijo, traza trayectorias curvas como las indicadas en (a) y (b) cuando gira el sistema de coordenadas. Cuando aumenta la velocidad angular  $\omega$  de la plataforma, la trayectoria adopta la forma indicada en (c); y cuando aumenta aún más, la trayectoria adopta la forma de (d).

plataforma giratoria sobre la que se haya montado una vía horizontal, según se indica en la figura 11-21. Se fija un estilete inscriptor a un carrito que recorra la vía con la celeridad constante  $V_0$  respecto a un sistema fijo de coordenadas. Al girar la plataforma en sentido contrario al de las agujas del reloj con velocidad angular  $\omega$ , el estilete traza una curva de la forma indicada en las partes (a) y (b) de la figura. Cuando aumenta  $\omega$ , la trayectoria adopta la forma representada en (c) y cuando aumenta aún más, la representada en (d). Obsérvese que las trayectorias son un tanto complicadas y que la velocidad según  $S'$ , según indican las separaciones entre puntos, no es constante ni en magnitud ni en dirección. En el sistema de coordenadas  $S'$ , en rotación, llegamos a la conclusión de que sobre el objeto deben ejercerse fuerzas de inercia. Nuestro propósito actual es determinar cuáles son éstas.

Velocidad según  $S'$  y  $S$ . Como primer paso hacia nuestra meta de determinar las fuerzas de inercia que intervienen en nuestro experimento imaginario, veamos cómo están relacionadas las velocidades según  $S$  y según  $S'$ . Un cuerpo en reposo en  $S'$  a una distancia  $r'$  del centro recorrerá una circunferencia de radio  $r'$  con una celeridad  $\omega r'$  según  $S$ . Si consideramos  $\omega$  como cantidad vectorial ( $\omega$  está dirigido hacia afuera del papel en la fig. 11-22) podemos expresar esta velocidad según  $S$  en forma concisa mediante  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ , donde  $\mathbf{r}'$  es el vector de posición

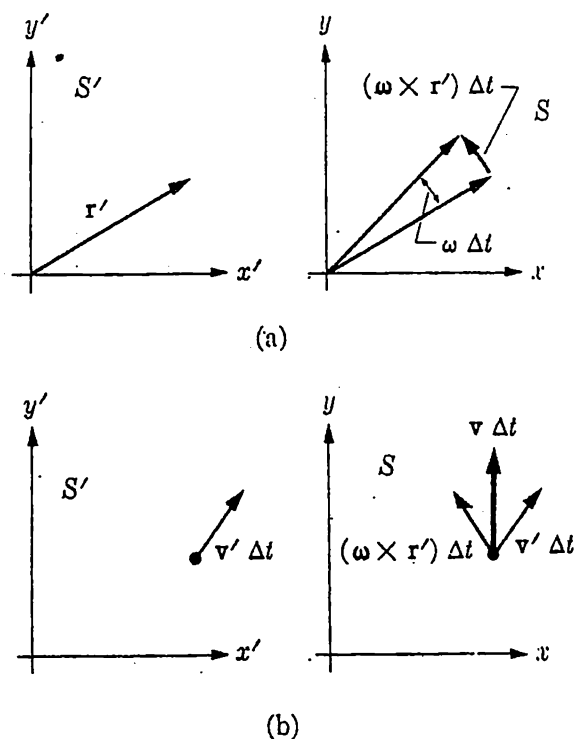


Fig. 11-22. En (a) se tiene un cuerpo en reposo en el sistema de coordenadas  $S'$  y por tanto tiene una velocidad  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$  en el sistema de coordenadas  $S$ . En (b) el cuerpo tiene una velocidad  $\mathbf{v}'$  en el sistema de coordenadas  $S'$ .

según  $S'$ . Un objeto en reposo según  $S'$  tiene una velocidad  $\omega \times r'$  según  $S$ , y si un objeto tiene una velocidad  $v'$  según  $S'$ , su velocidad según  $S$  es, simplemente,

$$\underline{v = v' + \omega \times r'} \quad (11-14)$$

Esto puede verse de la manera siguiente. Haciendo referencia a la figura 11-22(b), durante un tiempo  $\Delta t$ , el cuerpo recorre  $v' \Delta t$  según  $S'$ . Pero, también durante  $\Delta t$ , el sistema  $S'$  de coordenadas ha girado un ángulo  $\omega \Delta t$  con lo que el vector desplazamiento  $v \Delta t$  según  $S$  es el vector suma  $v' \Delta t + (\omega \times r') \Delta t$ . La velocidad según  $S$  será, pues, la dada anteriormente por la expresión (11-14). De otra manera, la velocidad según  $S'$  es

$$\underline{v' = v - \omega \times r'} \quad (11-15)$$

ya que, sobre un cuerpo en reposo en el sistema  $S$  de coordenadas, el efecto de una rotación es originar un movimiento en el sentido de las agujas del reloj (cuando  $\omega$  tiene el sentido contrario) según  $S'$ .

Podemos obtener de otra manera la importante relación existente entre las velocidades  $v$  y  $v'$ . Imaginemos los dos sistemas de coordenadas  $S$  y  $S'$  en el instante en que  $S'$  haya girado un ángulo  $\theta = \omega t$ . Un punto  $P$  que tenga las coordenadas  $(x, y)$  en  $S$ , tiene las coordenadas  $(x', y')$  en  $S'$ , estando dadas  $x'$  e  $y'$  por

$$\underline{x' = x \cos \theta + y \sin \theta} \quad \text{y} \quad \underline{y' = y \cos \theta - x \sin \theta} \quad (11-16)$$

Estas expresiones, que resultan evidentes en la figura 11-23, se pueden derivar respecto al tiempo  $t$ . El ángulo  $\theta$  debe considerarse variable y  $d\theta/dt$  es  $\omega$ . Realizadas estas derivaciones, se obtiene

$$\underline{v'_x = v_x \cos \theta + v_y \sin \theta + \omega y'} \quad \text{y} \quad \underline{v'_y = v_y \cos \theta - v_x \sin \theta - \omega x'} \quad (11-17)$$

para las dos componentes del vector velocidad  $v'$ . Es evidente que las expresiones anteriores concuerdan con (11-15) porque  $v_x \cos \theta + v_y \sin \theta$  es la componente  $x'$  del vector  $v$  y  $\omega y'$  es la componente  $x'$  del vector  $-\omega \times r'$ . Análogamente,  $v_y \cos \theta - v_x \sin \theta$  es la componente  $y'$  del vector  $v$  y  $-\omega x'$  es la componente  $y'$  del vector  $-\omega \times r'$ . Los detalles de esta demostración se presentarán como problema al final de este capítulo.

**EJEMPLO.** Con referencia a la figura 11-21, supongamos que el carrito cruza la plataforma en 8 s y sea el diámetro de ésta 29,3 m. La velocidad según  $S$  será, pues,  $29,3/8 = 3,7$  m/s dirigida a lo largo del eje  $y$ . La plataforma da una vuelta cada 8 s. con lo que su velocidad angular es  $\omega = 2\pi/8 = (\pi/4)$  rad/s dirigida según el eje  $z$  (hacia afuera del papel). ¿Cuál es la velocidad del carrito según  $S'$  en el instante  $t = 0$  y en el  $t = 1$  s?

La velocidad según  $S'$  es  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ . Según se indica en la figura 11-24, en el instante  $t = 0$ ,  $\mathbf{v}$  está dirigida a lo largo del eje  $y'$  y tiene una magnitud de 3,7 m/s. El vector de posición  $\mathbf{r}'$  se extiende desde el origen hasta el punto  $P_0$  y tiene una magnitud de 14,65 m, que es el radio de la plataforma. Por tanto, el vector  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$  tiene la dirección indicada y una magnitud de  $(\pi/4)14,65 = 3,7\pi$  m/s. La velocidad  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$  tiene una magnitud de

$$v' = \sqrt{3,7^2 + (3,7\pi)^2} = 3,7\sqrt{1 + \pi^2} = 12,2 \text{ m/s}$$

y el ángulo  $\theta_0$  viene dado por

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{3,7}{3,7\pi}, \quad \theta_0 = 17,7^\circ$$

En el instante  $t = 1$  s, el carrito se ha desplazado al punto  $P_1$  que se halla a  $14,65 - 3,7 = 11,0$  m del origen y  $\mathbf{r}'$  se extiende desde el origen hasta  $P_1$ , habiendo girado el sis-

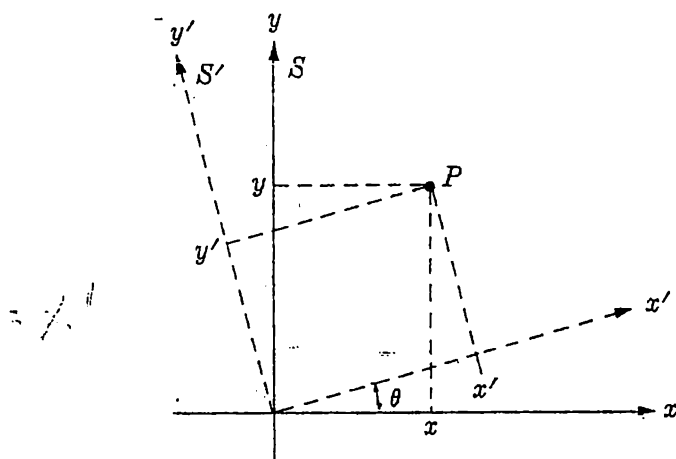


Fig. 11-23. El sistema  $S'$  de coordenadas ha girado un ángulo  $\theta = \omega t$ .

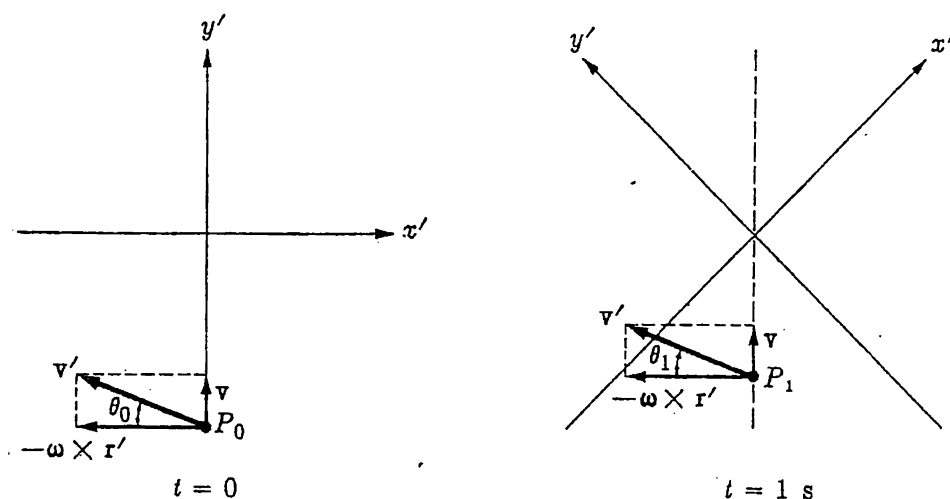


Fig. 11-24. La velocidad  $\mathbf{v}'$  según  $S'$  en los instantes  $t = 0$  y  $t = 1$  s para el movimiento que se ilustra en la figura 11-21.

tema de coordenadas  $45^\circ$ . La velocidad  $\mathbf{v}$  sigue teniendo por magnitud  $3,7$  m/s, pero ahora está dirigida siguiendo la línea de trazos de la figura. El vector  $-\omega \times \mathbf{r}'$  tiene por módulo  $(\pi/4)11 = 2,75\pi$  m/s y es perpendicular a la línea de trazos. La velocidad según  $S'$  tendrá, pues, una magnitud de

$$v' = \sqrt{3,7^2 + (2,75\pi)^2} = 9,40 \text{ m/s}$$

y el ángulo  $\theta_1$  viene dado por

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{3,7}{2,75\pi}, \quad \theta_1 = 23^\circ$$

Aceleración según  $S'$  y según  $S$ . Ha quedado bien claro que cuando se describe el movimiento de un cuerpo respecto al sistema de coordenadas  $S'$  en rotación, ésta origina variaciones de la velocidad y de la cantidad de movimiento del cuerpo. Como consecuencia aparecen fuerzas de inercia sobre el cuerpo en  $S'$ . Podremos determinar estas fuerzas de inercia si encontramos la manera en que están relacionadas las aceleraciones en los dos sistemas de coordenadas  $S$  y  $S'$ . El producto  $m\mathbf{a}$  de la masa por la aceleración según  $S$ , debe ser igual a la fuerza de interacción resultante, mientras que el producto  $m\mathbf{a}'$  según  $S'$  debe ser igual a la resultante de las fuerzas de interacción y de inercia.

La relación existente entre las aceleraciones se puede hallar fácilmente a partir de las expresiones que hemos desarrollado para relacionar las componentes de la velocidad. Luego, si no hacemos más que derivar y reagrupar términos en las dos expresiones (11-17), obtenemos

$$\underline{a'_x} = a_x \cos \theta + a_y \sin \theta + 2\omega v'_y + \omega^2 x' \quad (11-18a)$$

$$\underline{a'_y} = a_y \cos \theta - a_x \sin \theta - 2\omega v'_x + \omega^2 y' \quad (11-18b)$$

para las dos componentes de la aceleración  $\mathbf{a}'$  según  $S'$ . Los dos primeros términos del segundo miembro de la ecuación (11-18a) constituyen la componente  $x'$  del vector  $\mathbf{a}$ , mientras que  $+2\omega v'_y$  es la componente  $x'$  del vector  $-2\omega \times \mathbf{v}'$ . El último término  $\omega^2 x'$ , es la componente  $x'$  del vector  $\omega^2 \mathbf{r}'$ . Análogamente, los dos primeros términos de (11-18b) constituyen la componente  $y'$  del vector  $\mathbf{a}'$  —  $2\omega v'_x$  es la componente  $y'$  de  $-2\omega \times \mathbf{v}'$ , mientras que  $+\omega^2 y'$  es la componente  $y'$  del vector  $\omega^2 \mathbf{r}'$ . Las expresiones (11-18a y b) pueden escribirse, pues, en la forma vectorial

$$\underline{\mathbf{a}' = \mathbf{a} - 2\omega \times \mathbf{v}' + \omega^2 \mathbf{r}'} \quad (11-19)$$

Esta deducción se ha llevado a cabo para el movimiento en el plano  $xy$ . Cuando el movimiento tiene también componente  $z$ , observamos que  $v'_z$  y  $a'_z$  son paralelas al eje de rotación y por tanto no están influidas por ésta. La ecuación (11-19) será, pues, aplicable a un movimiento arbitrario si sustituimos en el tercer tér-

mino  $\mathbf{r}'$  por la componente del vector en el plano  $xy$ . La magnitud de esta componente es  $r \sin \phi$ , siendo  $\phi$  el ángulo que forman  $\mathbf{r}'$  y  $\boldsymbol{\omega}$ . Por tanto, obtendremos la dirección, sentido y magnitud correctas si sustituimos  $\omega^2 \mathbf{r}'$  por  $-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ . Es decir, la relación general existente entre  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{a}'$  es

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \quad (11-19a)$$

Antes de pasar a estudiar las fuerzas de inercia, consideremos un método algo más físico para llegar a la relación existente entre las aceleraciones  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{a}'$ .

Consideremos un vector arbitrario  $\mathbf{A}$  en el plano  $xy$ .  $\mathbf{A}$  puede ser un vector de posición, un vector desplazamiento, un vector velocidad, etc. Si  $\mathbf{A}$  es constante con relación a  $S'$ , *no* lo será con relación a  $S$  porque la dirección de  $\mathbf{A}$  con relación a  $S$  variará continuamente (fig. 11-25). Si los ejes de coordenadas giran un ángulo  $\Delta\theta = \omega \Delta t$ , la dirección de  $\mathbf{A}$  habrá variado un ángulo  $\Delta\theta$  con relación a  $S$ , aun cuando no haya variado de dirección con relación a  $S'$ . Por haber variado la dirección de  $\mathbf{A}$  con relación a  $S$ , el mismo  $\mathbf{A}$  habrá variado en una cantidad  $|\mathbf{A}|\omega \Delta t$ , estando dirigida esta variación perpendicularmente a  $\mathbf{A}$ . Para  $S$ , parecerá que  $\mathbf{A}$  tiene una derivada respecto al tiempo  $(d\mathbf{A}/dt)_S = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$ . Para  $S'$ , desde luego,  $(d\mathbf{A}/dt)_{S'}$  es nula, si mantenemos nuestra hipótesis inicial.

Si durante el intervalo de tiempo  $\Delta t$  varía  $\mathbf{A}$  con relación a  $S'$  en una cantidad  $\Delta\mathbf{A}$ , la variación de  $\mathbf{A}$  con relación a  $S$  será  $\Delta\mathbf{A} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \Delta t$  (fig. 11-26). La velocidad de variación es, pues,

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{S'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$$

con relación a  $S$ . En otras palabras, el vector  $\mathbf{A}$  varía respecto a  $S$  por dos razones. Primero, varía de dirección aunque sea constante en el sistema en rotación. Este es

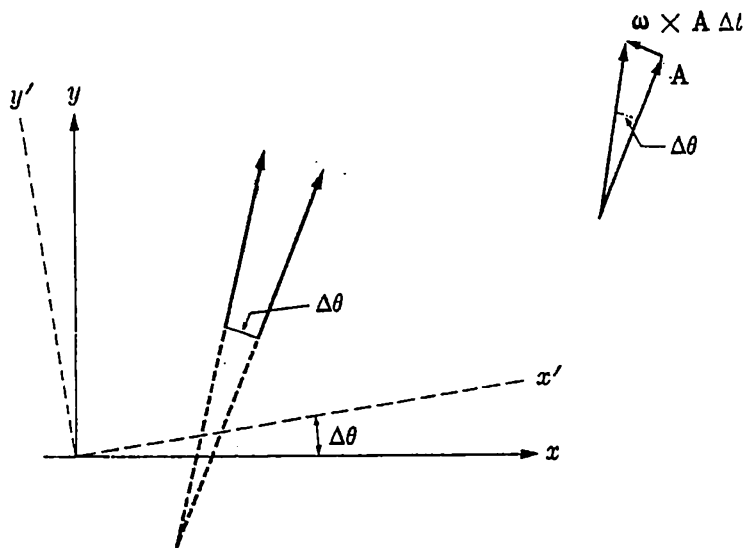


Fig. 11-25. Cuando el sistema  $S'$  de coordenadas gira un ángulo  $\Delta\theta$ , un vector constante en el sistema  $S'$  gira un ángulo  $\Delta\theta$  con relación a  $S$ .



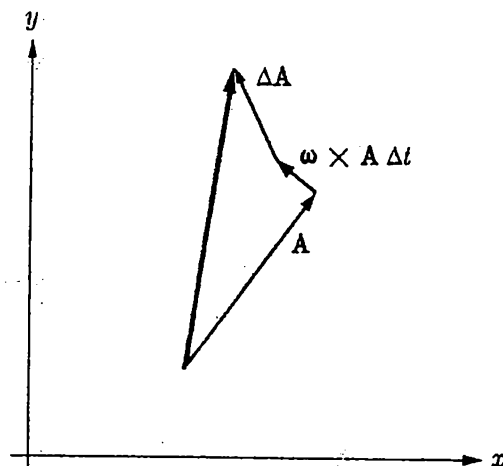


Fig. 11-26. Cuando  $A$  varía en  $\Delta A$  con relación a  $S'$ , varía en  $\Delta A + \omega \times A \Delta t$  con relación a  $S$ .

el origen del término  $\omega \times A$ . Segundo, si es nula  $\omega$  (sistema  $S'$  de coordenadas no gira),  $S$  y  $S'$  deben concordar en la velocidad de variación de  $A$ . Esta es la esencia del término  $(dA/dt)_{S'}$ .

Podemos aplicar esta útil relación al vector de posición  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  de una partícula. Tendremos entonces  $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \omega \times \mathbf{r}'$ , en concordancia con lo hallado anteriormente. Por lo que se refiere a la aceleración, sólo tenemos que aplicar nuevamente la relación a la velocidad  $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \omega \times \mathbf{r}'$ . Obtendremos cuatro términos, ya que debemos derivar  $\mathbf{v}' + \omega \times \mathbf{r}'$  para obtener  $\mathbf{a}' + \omega \times \mathbf{v}'$ , y luego añadir  $\omega \times \mathbf{v}$  para obtener  $\omega \times \mathbf{v}' + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}')$ . Cuando sumamos los dos términos iguales tenemos  $\mathbf{a} = \mathbf{a}' + 2\omega \times \mathbf{v}' + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}')$ , y esto también concuerda con lo hallado anteriormente.

Fuerzas de inercia. Ahora que hemos hallado cómo están relacionadas las aceleraciones  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{a}'$  (con relación a  $S$  y  $S'$ , respectivamente), podemos pasar a hallar las fuerzas de inercia. Si multiplicamos la expresión (11-19) por la masa del cuerpo que queremos considerar, tenemos

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{a}' + 2m(\omega \times \mathbf{v}') + m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}')$$

y trasponiendo

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} - 2m(\omega \times \mathbf{v}') - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}') \quad (11-20)$$

En el primer miembro tenemos  $\mathbf{F}' = m\mathbf{a}' = d\mathbf{p}'/dt$ , que es la fuerza que mediría un observador  $S'$  situado en un sistema de coordenadas en rotación. En el segundo miembro tenemos  $\mathbf{F}$  que es la fuerza que mediría un observador en reposo en un sistema inercial. Esta última fuerza hemos insistido que es una fuerza de

interacción o una resultante de fuerzas de interacción. Los dos restantes términos de 11-20) son las fuerzas de inercia:

$$\mathbf{F}_i = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \quad (11-21)$$

Evidentemente, cuando  $\boldsymbol{\omega}$  es nula,  $S'$  no gira y  $S'$  y  $S$  deberán concordar en las fuerzas. Que así ocurre resulta inmediato en (11-20) porque las dos fuerzas de inercia se anulan cuando se anula  $\boldsymbol{\omega}$ .

El segundo de los términos de las fuerzas de inercia,  $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$  (que puede escribirse en la forma  $m\omega^2 \mathbf{r}'$  cuando el movimiento está confinado a un plano normal a  $\boldsymbol{\omega}$ ), tiene un significado sencillo y de fácil comprensión. Con relación a un observador en reposo, un cuerpo en reposo sobre una plataforma giratoria sigue una trayectoria circular y, por tanto, está acelerado hacia el centro de la circunferencia (fig. 11-27). La fuerza que origina esta aceleración puede ejercerla un bloque fijo a la plataforma, un hilo tenso o cualquier otra fuerza de interacción. Esta fuerza de interacción debe ser igual a  $m\omega^2 \mathbf{r}'$  y dirigida hacia el interior, ya que la aceleración está dirigida hacia el centro de la circunferencia.

En cambio, la masa está en reposo respecto al sistema de coordenadas en rotación y, por tanto, está en equilibrio. La fuerza resultante  $\mathbf{F}'$  deberá, pues, ser nula. El primer término de las fuerzas de inercia es nulo porque  $\mathbf{v}' = 0$ . El segundo término de las fuerzas de inercia  $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ , tiene por módulo  $m\omega^2 r'$  y está dirigido hacia afuera. Por tanto, para que el cuerpo se halle en equilibrio en  $S'$ , deberá existir una fuerza de interacción de magnitud  $m\omega^2 r'$  dirigida hacia el interior. Vemos, pues, que las fuerzas de interacción concuerdan en  $S$  y  $S'$ .

La fuerza de inercia  $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ , que para el movimiento plano es  $m\omega^2 \mathbf{r}'$ , existe solamente en  $S'$  y recibe el nombre de fuerza centrífuga. Está siempre dirigida hacia afuera, es siempre perpendicular al eje de rotación y es proporcional a  $\omega^2$  y a la distancia al eje.

Mientras la fuerza centrífuga  $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$  depende de la posición  $\mathbf{r}'$  pero no de la velocidad  $\mathbf{v}'$ , el primer término de las fuerzas de inercia en (11-21),  $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ , llamado fuerza de Coriolis, depende de la velocidad en  $S'$ , pero no de la posición. Recordemos nuestro estudio de la trayectoria del carrito que recorre la vía situada sobre la plataforma giratoria. Con relación al sistema de coordenadas  $S$ , la trayectoria de una masa sobre la que no se ejercen fuerzas ha de ser rectilínea. Pero con relación al sistema de coordenadas  $S'$  de la plataforma giratoria, la trayectoria es curva. La fuerza de Coriolis es perpendicular a  $\boldsymbol{\omega}$  y a  $\mathbf{v}'$  y en el caso representado en la figura 11-28, tiende a curvar la trayectoria hacia la derecha. Sobre la superficie de la plataforma, la fuerza de Coriolis tiende siempre a desviar hacia la derecha a la masa móvil, es decir, en el sentido de las agujas del reloj.

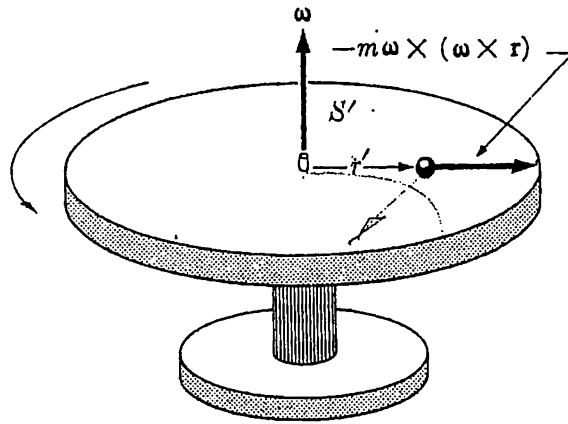


Fig. 11-27. La masa  $m$  está en reposo con relación a  $S'$  y la fuerza centrífuga está dirigida hacia afuera.

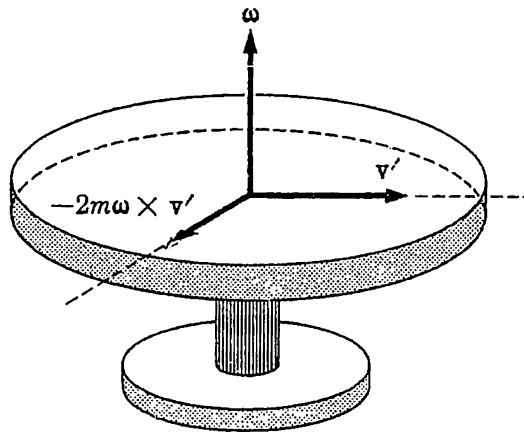


Fig. 11-28. La fuerza de Coriolis es perpendicular a  $\omega$  y a  $v$ .

Es importante que el lector se dé cuenta de que la trayectoria curva, vista desde un sistema de coordenadas en reposo, surge por razones puramente geométricas. Un lápiz que se mueva a velocidad constante sobre una hoja de papel en reposo, trazará una recta. Pero si el papel gira, la línea será curva. Las fuerzas de inercia, centrífuga y de Coriolis, sólo se aplican en la descripción del movimiento respecto a sistemas de coordenadas en rotación.

EJEMPLO 1. Un cuerpo está en reposo con relación a  $S$ . Con relación a  $S'$ , que es un sistema de coordenadas en rotación, el mismo cuerpo gira con velocidad angular  $\omega$  y tiene una celeridad  $\omega r'$ . Como la aceleración de un cuerpo que recorre una trayectoria circular es  $\omega^2 r'$  y está dirigida hacia el centro de rotación, sobre el cuerpo deberá ejercerse una fuerza resultante  $m\omega^2 r'$  dirigida hacia el centro. Para ver que esta conclusión es compatible con las expresiones de las fuerzas de inercia en  $S'$ , observemos que la fuerza centrífuga es  $m\omega^2 r'$  dirigida en el sentido de alejamiento del centro,

$$F_c = m\omega^2 r' \quad F_{\text{Coriolis}} = -2m\omega \times v' \quad F_{\text{centrífuga}} = m\omega^2 r'$$

$$F_{\text{centrífuga}} = m\omega^2 r' \quad F_{\text{Coriolis}} = -2m\omega \times v' \quad F_{\text{resultante}} = m\omega^2 r'$$

y la fuerza de Coriolis es  $2m\omega^2 r'$  dirigida hacia el centro. La fuerza de inercia total, centrífuga más Coriolis, será, pues,

$$\begin{aligned}\underline{F'_i} &= -2m(\omega \times \underline{r'}) - m\omega \times (\omega \times \underline{r'}) \\ &= -2m\omega^2 \underline{r'} + m\omega^2 \underline{r'} = \underline{-m\omega^2 \underline{r'}}\end{aligned}$$

El producto de la masa por la aceleración, según  $S'$ , debe ser igual a la fuerza resultante, es decir, fuerzas de interacción más fuerzas de inercia. El producto de la masa por la aceleración es  $-m\omega^2 \underline{r'}$  y como las fuerzas de inercia dan por sí solas  $-m\omega^2 \underline{r'}$ , no se precisarán fuerzas de interacción. Esta misma conclusión se deduce en  $S$ , puesto que el cuerpo está en reposo respecto a  $S$ .

EJEMPLO 2. Una varilla de longitud  $L$  puede girar alrededor de uno de sus extremos sobre una superficie horizontal exenta de rozamientos, empujando una partícula de masa  $m$ . La varilla gira con velocidad angular  $\omega$  constante y la partícula se halla inicialmente en reposo muy próxima al eje de rotación. ¿Cuál es la fuerza de contacto  $F$  que ejerce la varilla sobre la partícula, y cuál es la energía cinética de la partícula cuando abandona el extremo de la varilla? (Supóngase que desliza sin rozamiento.)

Tomemos el eje  $x'$  a lo largo de la varilla, según se indica en la figura 11-29. Con relación al sistema  $S'$  de coordenadas que se mueve con la varilla, la fuerza centrífuga es  $m\omega^2 x'$  dirigida hacia afuera, y la fuerza de Coriolis es  $2m\omega v'_x$  perpendicular a la varilla, según se indica. Con relación a  $S'$ , la partícula está en equilibrio en la dirección  $y'$ , con lo que la fuerza resultante en la dirección  $y'$  debe ser nula. Por tanto, si es  $F$  la fuerza de contacto que se ejerce sobre la partícula, tenemos  $F - 2m\omega v'_x = 0$  o sea,  $F = 2m\omega v'_x$ .

En el análisis con relación al sistema de coordenadas  $S$  en reposo, se razona de la manera siguiente. La distancia  $x'$  mide la distancia radial de la masa al eje. El momento cinético será, por tanto  $l = mx'^2\omega$ . El momento resultante, o velocidad de variación de la cantidad de movimiento, es

$$\underline{\tau = \frac{dp}{dt} = 2mx'\omega v'_x}$$

pero como el momento debe ser  $\tau = Fx'$ , la fuerza  $F$  debe ser igual a  $2m\omega v'_x$ . Concuerdan las fuerzas de interacción en  $S$  y  $S'$ .

La fuerza centrífuga es  $m\omega^2 x'$  y está dirigida hacia afuera, por lo que al moverse la partícula de  $x' = 0$  a  $x' = L$ , el trabajo realizado sobre ella es

$$\underline{W = \int_0^L m\omega^2 x' dx' = \frac{mL^2}{2} \omega^2}$$

Luego, la energía cinética con relación a  $S'$  es  $mL^2\omega^2/2$ . Como la energía cinética es también  $mv_x'^2/2$ , obtenemos  $v'_x = \omega L$  en  $x' = L$ .

Con relación a  $S$ ,  $v'_x = \omega L$  es una velocidad radial y la masa tiene, además, una velocidad transversa igual a la velocidad del extremo de la varilla. Esta velocidad transversa también vale  $\omega L$ , con lo cual la celeridad de la masa respecto a  $S$  es  $\omega L\sqrt{2}$ , y la energía cinética con relación a  $S$  es  $m\omega^2 L^2$ . En los problemas de este tipo, el movimiento en  $S'$  es, frecuentemente, más sencillo que en  $S$ .

En el ejemplo actual, la trayectoria de la partícula es rectilínea en  $S'$ , mientras que en  $S$  es una espiral relativamente complicada. En el ejemplo siguiente se insistirá sobre esta cuestión.

**EJEMPLO 3.** Una experiencia interesante acerca del movimiento en un sistema de coordenadas en rotación es la siguiente. Sobre una vía recta montada sobre una mesa horizontal que puede girar alrededor de un eje vertical, se mueve un carrito. Éste está sujeto al punto medio de un resorte que se mantiene tenso entre los dos extremos de la vía, según se indica en la figura 11-30. La posición de equilibrio del carrito se halla en el eje de rotación. Cuando no gira la mesa, el período de oscilación del carrito es  $T_0$ . ¿Cuál será el período de oscilación cuando la mesa gire con velocidad angular  $\omega$ ?

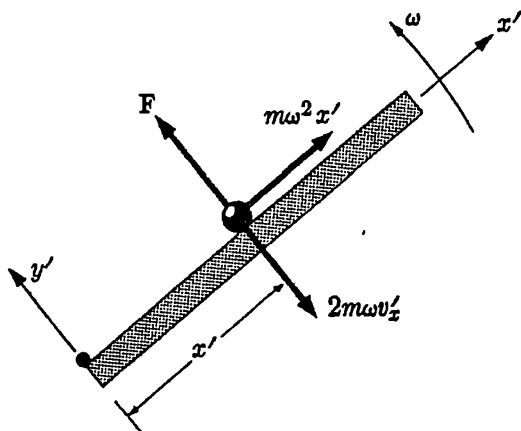


Figura 11-29

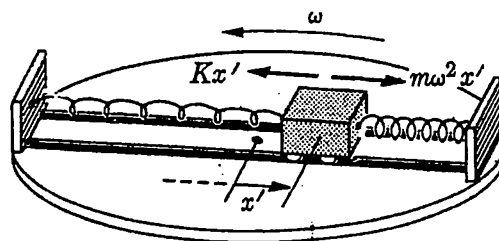


Figura 11-30

Estudiemos el movimiento respecto a un sistema de coordenadas  $S'$  solidario a la mesa giratoria. A una distancia  $x'$  de la posición de equilibrio tendremos dos fuerzas actuando sobre el carrito: la de interacción del resorte  $-Kx'$  y la de inercia (centrífuga)  $m\omega^2 x'$ , donde  $K$  es la constante del resorte y  $m$  la masa del carrito. La ecuación del movimiento es, pues,

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} = -Kx' + m\omega^2 x' = -(K - m\omega^2)x'$$

En otras palabras, la fuerza centrífuga hace disminuir a la fuerza restauradora y la constante del resorte eficaz es  $K - m\omega^2$ . El período de oscilación es, pues,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K - m\omega^2}} = \frac{\omega_0 T_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

donde  $\omega_0 = \sqrt{K/m}$ . Queda claro que cuando  $\omega > \omega_0$  el carrito no oscilará sino que tendrá en todo momento una aceleración positiva y se moverá alejándose del eje de rotación.

*Efecto de la rotación terrestre.* Hemos visto que en un sistema de coordenadas en rotación surgen dos fuerzas de inercia. La fuerza de Coriolis depende de la velocidad del cuerpo pero no de su posición, mientras que la fuerza centrífuga depende de la posición del cuerpo, pero no de su velocidad. La fuerza centrífuga tiene sobre el movimiento de los cuerpos en la superficie terrestre un efecto fácil de calcular, por lo que vamos a considerarlo primeramente.

La fuerza centrífuga tiene por magnitud  $m\omega^2 r'$ , donde  $r'$  es la distancia de la masa  $m$  al eje de rotación; está dirigida en el sentido de alejamiento del eje de rotación. Por tanto, a una latitud  $\lambda$ , donde  $r' = R \cos \lambda$ , la fuerza centrífuga es  $m\omega^2 R \cos \lambda$ . Además de la fuerza centrífuga existe la fuerza gravitatoria que, suponiendo que la Tierra es una esfera uniforme, estará dirigida hacia su centro geométrico. Cuando se mide el peso de un cuerpo, contribuyen las fuerzas gravitatoria y centrífuga y el peso total es su suma vectorial. En el ecuador, donde  $\cos \lambda = 1$ , la aceleración centrípeta es  $\omega^2 R = (7,3 \cdot 10^{-5})^2 (6,4 \cdot 10^6) = 0,034 \text{ m/s}^2$  o sea un 0,35 % de  $g$ . A otras latitudes, la contribución centrífuga es aún menor. En la figura 11-31 podemos ver que la  $g$  medida es

$$g \simeq g' - \omega^2 R \cos^2 \lambda \quad (11-22)$$

donde  $g'$  es la contribución de la fuerza gravitatoria exclusivamente. Los valores de  $g$  medidos sobre la superficie terrestre varían con la latitud. Sin embargo,

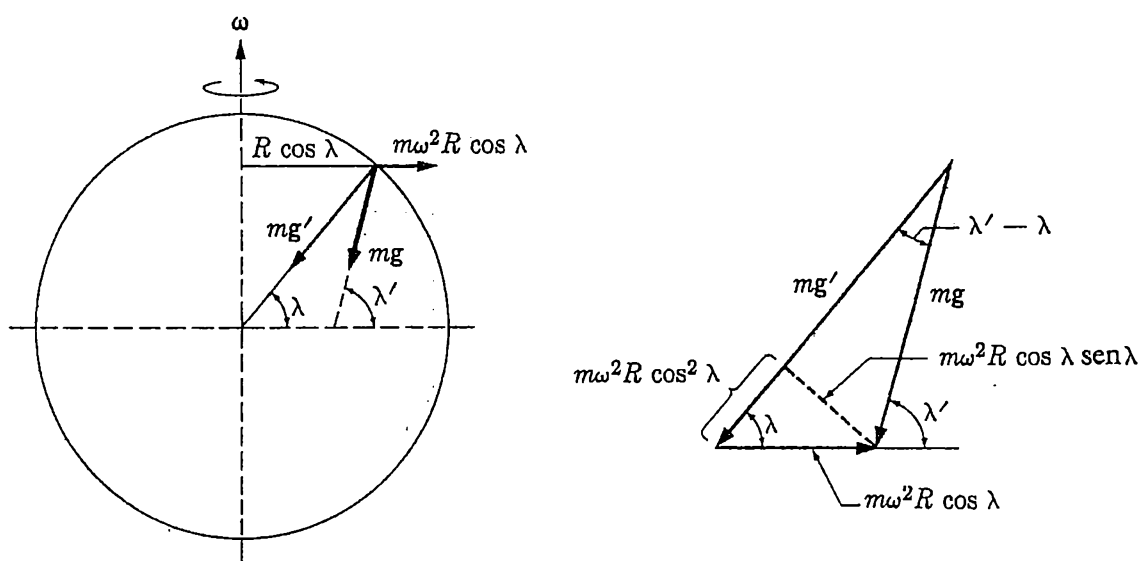


Fig. 11-31. El peso de un cuerpo y la dirección de la plomada están afectados por la fuerza centrífuga.

existe otra variación atribuible al hecho de que la Tierra no es esférica, sino que está algo achatada por los polos.

La fuerza centrífuga también hace que la plomada no indique la vertical «verdadera». La plomada tiene la dirección de  $mg$  y no la de  $mg'$  y el ángulo de desviación, que tiene su valor máximo a  $\lambda = 45^\circ$ , está dado por

$$\lambda' - \lambda \simeq \frac{m\omega^2 R \cos \lambda \sin \lambda}{mg} = \frac{\omega^2 R \sin 2\lambda}{2g} \quad (11-23)$$

La desviación máxima es, aproximadamente,  $0,1^\circ$ .

La fuerza centrífuga crece con la distancia a la Tierra; y en el plano ecuatorial a unos 42 000 km del centro de la Tierra, se hace igual a la fuerza de la gravedad  $Gm_t m/r^2$ . A esta distancia, un satélite estaría en equilibrio bajo la acción de las fuerzas centrífuga y gravitatoria y, para un observador situado en el ecuador, permanecería siempre en la misma posición sobre él. (No habría fuerza de Coriolis porque para un sistema de coordenadas solidario a la Tierra, el satélite no tendría velocidad.) Visto desde un sistema de coordenadas que no gira con la Tierra, el satélite se hallaría en una órbita ordinaria que estaría en el plano ecuatorial. El tiempo que emplearía en dar una vuelta a la Tierra, sería un día. Ordinariamente, los cálculos astronómicos se realizan para un sistema de coordenadas  $S$  fijo en el espacio y a fines de observación, se transforman posteriormente los resultados a un sistema de coordenadas  $S'$  que gire con la Tierra. Este procedimiento suele ser menos engorroso y complicado que el de resolver los problemas para  $S'$ , donde habría que introducir las fuerzas centrífuga y de Coriolis.

El efecto de la fuerza de Coriolis sobre el movimiento de los objetos en la superficie terrestre suele ser muy pequeño. Como la velocidad angular de la Tierra es  $\omega = 2\pi/T = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$ , la velocidad de un cuerpo debe ser al menos  $v = g/2\omega = 1,4 \cdot 10^5 \text{ m/s}$  para que la aceleración de Coriolis sea igual a  $g$ . En cambio, cuando son largos los tiempos de recorrido, como ocurre con los proyectiles de largo alcance y los vientos, incluso estas aceleraciones relativamente pequeñas pueden originar desviaciones grandes.

Consideremos el movimiento en un plano horizontal a una cierta latitud del Hemisferio Norte. El vector velocidad angular  $\omega$  está dirigido hacia el exterior del suelo y, según se indica en la figura 11-32, la fuerza de Coriolis desviará siempre hacia la derecha a todo cuerpo que se mueva en el plano horizontal. En el Hemisferio Sur, el vector velocidad angular está dirigido hacia el interior de la Tierra y la fuerza de Coriolis desviará al cuerpo hacia la izquierda. En general, la fuerza de Coriolis también tendrá componentes normales al plano horizontal. En efecto, la fuerza de Coriolis que se ejerce sobre una partícula que se mueve *sobre* el ecuador es totalmente normal al plano horizontal, estando dirigida hacia arriba cuando la partícula se mueve de oeste a este, y hacia abajo cuan-

do se mueve en sentido contrario. Una partícula que se mueva verticalmente sobre el ecuador no se halla sometida a fuerza de Coriolis alguna porque entonces  $\omega$  y  $\mathbf{v}'$  son paralelos y  $\omega \times \mathbf{v}'$  es nulo.

**EJEMPLO.** Se deja caer una masa  $m$  desde una altura  $h$  sobre la superficie terrestre en rotación. Si la Tierra no girara, la masa caería a lo largo de la dirección de la plomada. Sin embargo, la Tierra gira y por ello la fuerza de Coriolis desviará ligeramente al cuerpo. Para simplificar nuestras consideraciones, consideremos un cuerpo que se deje caer desde un punto sobre el ecuador. Supondremos que en el valor que empleemos de  $g$  está ya incluido el efecto de la fuerza centrífuga.

La fuerza de Coriolis, según se indica en la figura 11-33, está dirigida hacia el Este y para un cuerpo que caiga verticalmente con velocidad  $v$ , vale  $2m\omega v$ . La fuerza de Coriolis es aquí muy pequeña y su efecto sobre la velocidad es tan débil que podemos calcular la desviación de la manera siguiente. La velocidad  $v$  para un cuerpo que cae desde una altura  $h$  es  $gt$ . La fuerza de Coriolis será por tanto  $F = 2m\omega gt$ . La aceleración hacia el Este  $dv_e/dt$ , es

$$\frac{dv_e}{dt} = 2\omega gt$$

y para la velocidad hacia el este  $v_e$ , tenemos

$$v_e = \omega gt^2 \quad \text{o sea} \quad \frac{dx}{dt} = \omega gt^2$$

La desviación hacia el Este en un tiempo  $t$  es, pues,

$$x = \frac{\omega gt^3}{3}$$

Como el tiempo de caída es  $t = \sqrt{2h/g}$ , tenemos para la desviación

$$x = \frac{\omega g}{3} \left( \frac{2h}{g} \right)^{3/2}$$

Para un cuerpo que se suelte desde una altura  $h = 100$  m en el ecuador,  $x$  sólo vale 6 cm. Esta desviación es aún menor a mayores latitudes y es nula en los Polos.

También puede resolverse el problema desde el punto de vista de un observador situado en un sistema fijo de coordenadas (prob. 11-37). Cualitativamente, la desviación hacia el Este de un cuerpo que cae se debe, en este caso, al hecho de que un cuerpo que se deja caer, por ejemplo, desde lo alto de un poste en el ecuador tiene la misma velocidad angular que la base del poste, pero tiene una velocidad hacia el Este ligeramente superior. El extremo más elevado del poste se halla más lejos del centro de la Tierra que la base de dicho poste.



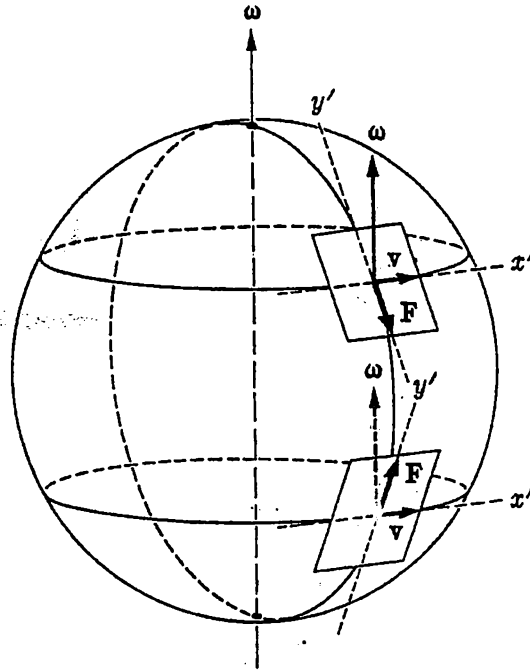


Fig. 11-32. En el hemisferio Norte, la fuerza de Coriolis desvía hacia la derecha a las partículas que se mueven en un plano horizontal. En el hemisferio Sur, la desviación correspondiente es hacia la izquierda. Obsérvese que en cada caso sólo se indica la componente de la fuerza de Coriolis en el plano  $x'y'$ .

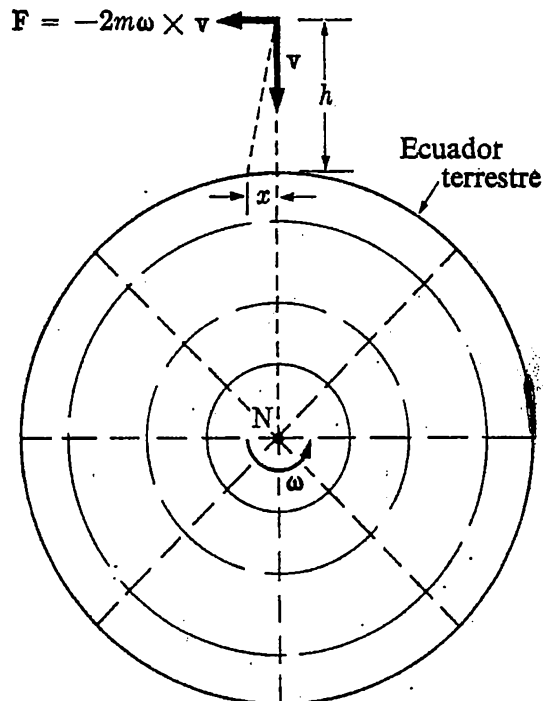


Fig. 11-33. La Tierra vista desde el Polo Norte. Se deja caer un cuerpo desde una altura  $h$  sobre el ecuador. La velocidad angular de la Tierra está dirigida hacia afuera del papel y la fuerza de Coriolis desvía hacia el *Este* al cuerpo que cae.

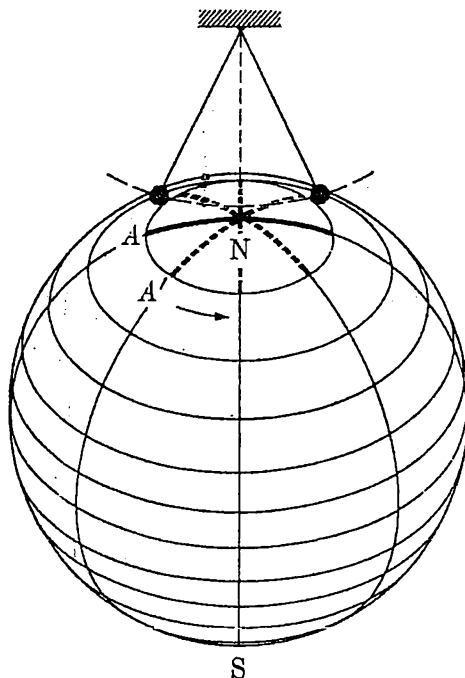


Fig. 11-34. En un sistema de coordenadas que gira con la tierra, el plano de un péndulo de Foucault gira  $360^\circ$  en un día.

*Péndulo de Foucault.* El péndulo de Foucault proporciona una de las pocas experiencias de laboratorio que ponen de manifiesto la rotación de la Tierra. Imaginemos un péndulo suspendido sobre el Polo Norte terrestre (fig. 11-34). Si se ha diseñado y preparado adecuadamente la suspensión del péndulo, al poner éste en marcha seguirá oscilando en un plano fijo respecto a las estrellas. La Tierra da una vuelta bajo el péndulo una vez cada día y por eso el plano de movimiento del péndulo, visto por un observador situado en la Tierra, parece girar. A latitudes diferentes de  $\pm 90^\circ$  (los Polos) gira el plano del péndulo de Foucault, pero la velocidad angular no es  $\omega$ , como en los Polos. Sólo es  $\omega \sin \lambda$ , donde  $\omega$  es la velocidad angular de la Tierra y  $\lambda$  la latitud. A una latitud de  $30^\circ$ , el plano da una vuelta cada 48 horas y en Barcelona ( $\lambda \simeq 41^\circ$ ) el plano da una vuelta cada 36 horas aproximadamente.

## PROBLEMAS

11-1. El origen de un sistema de coordenadas  $S'$  se mueve con velocidad constante  $V = 2$  m/s a lo largo del eje  $x$  de un sistema de coordenadas  $S$ . En  $t = 0$ , coinciden los orígenes de  $S$  y  $S'$ . ¿Cuáles son las coordenadas  $(x', y')$  en  $S'$  de un punto  $x = 4$  m,  $y = 5$  m en  $S$ , en los instantes  $t = 1$  s y  $t = 3$  s?

11-2. Un muchacho anda de un lado al otro de un tren que se mueve lentamente, tardando 3 s en cruzarlo. La anchura del tren es de 3 m y se mueve a lo largo de una vía recta horizontal a 2 m/s. (a) Dibujar un esquema de la trayectoria del muchacho respecto al suelo. (b) ¿Qué distancia recorrerá el muchacho? ¿Cuál era su velocidad relativa a tierra?

11-3. Con referencia al problema 11-2. Si el muchacho pesa 44 kg, ¿cuál es su energía cinética relativa al sistema de coordenadas  $S'$  solidario al tren y relativa al sistema de coordenadas  $S$  solidario a tierra, cuando el muchacho anda con velocidad de 1 m/s (a) a través del tren? (b) hacia adelante? (c) hacia atrás? (d) ¿Con qué velocidad y en qué dirección y sentido debería moverse el muchacho para que su energía cinética respecto a  $S$  fuera nula?

11-4. En nuestro estudio del movimiento de proyectiles (cap. 4), vimos que para lograr el alcance máximo, había que disparar el proyectil en una dirección que forme un ángulo de  $45^\circ$  con la horizontal. Supongamos que se dispara un proyectil (celeridad inicial  $v_0$ ) desde la parte trasera de un tren rápido (celeridad  $V_0$ ) hacia la máquina. Un observador  $A$  dice que el movimiento del tren no influye; el ángulo de tiro correspondiente a alcance máximo sigue siendo  $45^\circ$ . El observador  $B$  dice que eso es falso; hay que consi-

derar la velocidad del tren y el ángulo de tiro ha de ser mayor que  $45^\circ$ . ¿Quién tiene razón y por qué?

11-5. Un cuerpo se mueve a 200 m/s en una dirección que forma un ángulo de  $30^\circ$  con el eje  $x$  de un sistema fijo. ¿Cuál es el ángulo correspondiente medido respecto a un sistema de coordenadas que se mueve a 100 m/s en la dirección  $x$ ?

11-6. Un ascensor sube con velocidad constante de 3 m/s. Un pasajero deja caer una moneda desde una altura de 1 m sobre el suelo del ascensor. Hallar el tiempo transcurrido hasta que la moneda llega al suelo. Resolver el problema primeramente respecto al sistema de coordenadas que se mueve con el ascensor y después respecto al sistema de coordenadas solidario al edificio.

11-7. Un cuerpo de masa  $m_a$  se mueve en línea recta sobre una superficie sin rozamiento con una velocidad  $v_a$ . Realiza un choque perfectamente elástico con un cuerpo de masa  $m_b$  inicialmente en reposo. Supóngase el choque unidimensional. (a) ¿Cuál es la velocidad del centro de masa? (b) ¿Cuáles son las velocidades iniciales y las cantidades de movimiento de los cuerpos  $m_a$  y  $m_b$  para el sistema  $S'$  que se mueve con la velocidad del centro de masa? (c) ¿Cuáles son las velocidades finales para  $S'$ ? (d) ¿Cuáles son las velocidades finales para el sistema  $S$  en reposo? (e) ¿Cuáles son las energías cinéticas finales de cada uno de los cuerpos según  $S'$  y según  $S$ ?

11-8. Un cuerpo  $A$  de masa  $m_a = 10$  kilogramos se mueve en el sentido positivo de las  $x$  con una velocidad  $v_a = 5$  m/s. Otro cuerpo  $B$  de masa  $m_b = 20$  kg recorre una recta que forma un ángulo de  $45^\circ$  con el semieje positivo de las  $x$ , con

una velocidad  $v_b = 5$  m/s. (a) Indicar en un diagrama vectorial, trazado a escala, el vector cantidad de movimiento total y los vectores cantidad de movimiento  $\mathbf{P}_a^*$  y  $\mathbf{P}_b^*$  de los cuerpos respecto al centro de masa. Comprobar que estos vectores tienen igual magnitud y dirección, pero sentidos contrarios. (b) Determinar analíticamente la magnitud, dirección y sentido de la cantidad de movimiento total, la velocidad del centro de masa, y las cantidades de movimiento y velocidades de  $A$  y  $B$  respecto al centro de masa. (c) ¿Cuál es la energía cinética total del sistema respecto al centro de masa y cuál es la energía cinética respecto al sistema del laboratorio?

11-9. Con referencia al problema 11-8. Supongamos que los cuerpos  $A$  y  $B$  chocan en el origen y que el choque es totalmente inelástico. ¿Cuál será la energía perdida en el choque?

11-10. En el texto se ha obtenido la relación energética  $E = MV^2/2 + E^*$  para el caso particular de dos puntos materiales. Extender el análisis del texto y demostrar que esta relación energética es aplicable a un número cualquiera de puntos materiales.

11-11. Un cuerpo  $B$  de masa  $m$  se halla inicialmente en reposo y puede moverse libremente en un plano exento de rozamientos. Otro cuerpo  $A$ , también de masa  $m$ , choca con  $B$ . Después del choque, el movimiento de los cuerpos no tiene lugar a lo largo de la misma recta que antes. Demostrar, analítica y geométricamente con ayuda de un diagrama vectorial que, si el choque es perfectamente elástico, las trayectorias de los dos cuerpos después del choque son perpendiculares.

11-12. Consideremos nuevamente el choque perfectamente elástico del problema anterior, pero siendo ahora di-

ferentes las masas  $M$  y  $m$ . ( $M$  está inicialmente en reposo.) Demostrar que si la masa incidente se desvía un ángulo de valor  $\phi$  medido en el sistema del centro de masa, la magnitud de su velocidad después del choque en el sistema del laboratorio es

$$v' = \frac{\sqrt{M^2 + m^2 + 2Mm \cos \phi}}{m + M} v$$

donde  $v$  es la velocidad antes del choque.

11-13. En el problema anterior se medía el ángulo  $\phi$  en el sistema  $C$ . Si es  $\theta$  el ángulo correspondiente en el sistema  $L$ , demostrar que en un choque perfectamente elástico

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{\cos \phi + m/M}{\sin \phi}$$

11-14. Un ascensor sube con una aceleración constante de  $3$  m/s<sup>2</sup>. Tres segundos después de haber partido del reposo, un pasajero deja caer una moneda desde una altura de  $1$  m sobre el suelo del ascensor. Hallar el tiempo transcurrido hasta que la moneda alcance el suelo. Resolver el problema primeramente desde el punto de vista de un observador en un sistema de coordenadas en reposo, y después desde el punto de vista de un pasajero en el sistema de coordenadas solidario al ascensor.

11-15. Un tren parte del reposo y acelera a  $3$  m/s<sup>2</sup> en la dirección y sentido del semieje  $+x$ . Tres segundos después de arrancar el tren, un pasajero deja caer una moneda desde una altura de  $1$  m sobre el piso del tren. (a) En el sistema de coordenadas  $S'$  solidario al tren, ¿cuál es la dirección y sentido de la fuerza de inercia que se ejerce sobre la moneda? (b) Utilizando el sistema de coordenadas  $S'$ , hallar el tiempo que emplea la moneda en alcanzar el piso y hallar qué distancia recorre la moneda hacia la parte delan-

tera o trasera del tren durante su caída. (c) Resolver el problema desde el punto de vista de un observador situado en un sistema de coordenadas solidario a tierra.

11-16. Un ascensor que baja a  $3 \text{ m/s}$  se detiene en una distancia de  $15 \text{ cm}$ . Una persona situada sobre una báscula de resorte en el interior del ascensor observa que la indicación de la báscula varía durante el período de freno. Si la desaceleración aparente es constante, ¿en qué factor ha variado la indicación del peso por la báscula?

11-17. Una masa  $m$  situada sobre una plataforma horizontal exenta de rozamientos está sujeta a un extremo de un resorte de la manera indicada en la figura 11-35. La constante del resorte es  $K$ . Se pone en movimiento la plataforma con una aceleración constante  $a$  en la dirección horizontal. (a) En el sistema de coordenadas  $S'$  solidario a la plataforma, ¿cuáles son las fuerzas de interacción y las fuerzas de inercia que se ejercen sobre  $m$ ? (b) ¿Cuál es la compresión máxima del resorte originada por la aceleración? (c) ¿Cuál es el movimiento subsiguiente de  $m$  respecto a

la plataforma? (d) Si también es  $m$  la masa de la plataforma, determinar la fuerza necesaria para mantener la aceleración constante de la plataforma.

11-18. Una barra horizontal de longitud  $L$  y peso despreciable puede girar alrededor de un eje vertical que pasa por su punto medio, en la forma que se indica en la figura 11-36. El cojinete del eje mantiene siempre horizontal la barra. En los extremos de ésta se sujetan dos bolas de masas  $m$  y  $3m$ . Inicialmente, la barra y la plataforma que soporta al eje se hallan ambas en reposo. Se da entonces a la plataforma una aceleración horizontal constante  $a$  normal a la barra, según se indica. (a) Determinar las magnitudes, direcciones y sentidos de las fuerzas de inercia que se ejercen sobre las dos bolas. (b) ¿Cuál es la aceleración angular inicial de la barra, originada por el movimiento de la plataforma? (c) ¿Cuál es la velocidad angular de la barra cuando ha girado un ángulo de  $30^\circ$ ? (d) ¿Cuál es el período de oscilación pequeña de las masas alrededor de su posición de equilibrio?

11-19. Del techo de un coche pende

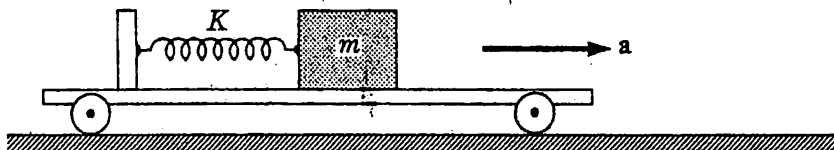


Figura 11-35

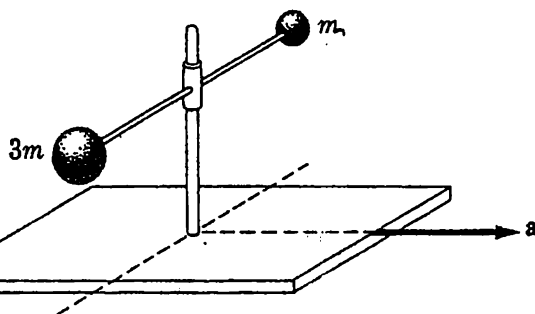


Figura 11-36

una plomada de longitud  $l$  y aquél puede deslizar libremente hacia la parte inferior de un plano inclinado exento de rozamientos. El ángulo de inclinación del plano es  $\theta$ . (a) Indicar en un diagrama todas las fuerzas de interacción y de inercia que se ejercen sobre la plomada (en el sistema de coordenadas  $S'$  que se mueve con el coche). (b) Si se supone que el péndulo forma un ángulo  $\alpha$  con la normal al plano, ¿cuáles son las componentes de todas las fuerzas que se ejercen sobre el plano? (c) ¿Cuál es el ángulo de equilibrio del péndulo? (d) ¿Cuál es la tensión del hilo? (e) Si se suelta el coche partiendo del reposo con el péndulo colgando vertical, ¿cuál será el movimiento subsiguiente del péndulo? (f) ¿Cuál será el período de las oscilaciones (supuestas pequeñas) del péndulo y la amplitud de oscilación?

11-20. ¿En cuánto variará la fuerza que ejerce la Luna sobre una masa  $m$  de la superficie terrestre, con la posición de  $m$  sobre la Tierra?

11-21. Imaginemos un satélite terrestre consistente en dos masas iguales montadas en los extremos opuestos de una varilla sin masa de longitud  $l$ . Si el satélite sigue una órbita circular de radio  $R$  y si el eje de la varilla forma un ángulo  $\theta$  con una recta que vaya al centro de la Tierra, ¿cuál es el momento que actúa sobre el satélite? ¿Cuál es el período del movimiento armónico simple de pequeña amplitud? Compárese este período con el de rotación del satélite alrededor de la Tierra.

11-22. ¿Cuánto caerá la luz al atravesar la longitud de un estadio deportivo?

11-23. Estimar el orden de magnitud de la desviación de un rayo luminoso que pase rozando el Sol, utilizando valores groseramente aproximados para  $g$  y para el tiempo que permanece la luz próxima al Sol.

11-24. ¿Es posible que la luz pueda, como lo hace un planeta o satélite, rodear una estrella muy masiva? ¿Qué propiedades debería tener dicha estrella?

11-25. Un satélite terrestre recorre una trayectoria circular a una altura  $h$  por encima de la superficie terrestre. (a) ¿Cuál es la fuerza gravitatoria terrestre que se ejerce sobre un objeto de masa  $m$ , interior al satélite? (b) ¿Cuál es la fuerza de inercia que se ejerce sobre el objeto? (c) Deben ser siempre iguales y directamente opuestas estas dos fuerzas?

11-26. Sobre la parte trasera de un camión que lleva una velocidad  $V_0$  por una carretera recta, se monta una plataforma giratoria horizontal. Cuando la plataforma gira con una velocidad angular  $\omega$  pequeña, un niño situado sobre la plataforma a una distancia  $R$  de su centro se mueve en uno y otro sentido siguiendo un camino parecido a una senoide respecto al sistema de coordenadas fijo a la carretera. Cuando la velocidad angular de la plataforma es muy grande, el niño parece recorrer una trayectoria que se cierra sobre sí misma. (a) ¿A qué valor de  $\omega$  dejará de producirse este cierre sobre sí misma de la trayectoria? (b) ¿Cuál es la velocidad del niño cuando cruza la línea central del camión?

11-27. Se incrusta una piedra en la pastilla de un neumático de 60 cm de diámetro de un camión que va a 90 km/h. Trazar un diagrama vectorial en el que figure el valor inicial de la velocidad de la piedra si saltara del neumático en cada uno de ocho puntos del neumático igualmente espaciados.

11-28. Una plataforma giratoria de 16 m de radio da una vuelta cada 8 s. Sobre su superficie exenta de rozamientos desliza un cuerpo a 4 m/s con relación a un sistema de coordenadas en reposo y pasa a menos de 4 m del centro. Dibu-

jar la trayectoria del objeto con relación a  $S'$ . Incluir las trayectorias para los casos en que la plataforma diera una vuelta cada 16 s y una vuelta cada segundo.

11-29. ¿A qué velocidad debería girar alrededor de su eje un vehículo espacial cilíndrico de 12 m de diámetro, para que un pasajero tenga su peso normal?

11-30. Referente a la deducción de la aceleración  $\mathbf{a}'$  en el sistema de coordenadas en rotación. (a) Deducir las expresiones para  $x'$  e  $y'$  a partir de la figura 11-23. (b) Derivar una vez las expresiones de  $x'$  e  $y'$  para obtener las expresiones de  $v'_x$  y  $v'_y$ . Comprobar los resultados con la fórmula vectorial  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ . (c) Derivar  $v'_x$  y  $v'_y$  y obtener las expresiones de  $a'_x$  y  $a'_y$ . Comprobar los resultados con la expresión vectorial  $\mathbf{a}' = \mathbf{a} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ .

11-31. ¿Qué velocidad debe tener un cuerpo en el ecuador para que sean iguales su peso y la fuerza de CORIOLIS?

11-32. Si la fuerza centrífuga en el ecuador fuera igual a  $mg$ , ¿cuál sería la duración correspondiente de un «día»? ¿Cómo variarían con la latitud los pesos aparentes de los objetos?

11-33. ¿En qué condiciones tendrán magnitudes comparables las fuerzas centrífuga y de CORIOLIS?

11-34. ¿Cuál es la fuerza centrífuga resultante de la rotación de la Tierra alrededor del Sol? Compárese con la fuerza centrífuga resultante de la rotación de la Tierra alrededor de su eje.

11-35. Una locomotora de 50 toneladas se mueve hacia el norte en Barcelona siguiendo una vía recta a una velocidad de 144 km/h. ¿Cuál es el empuje lateral que ejerce la vía sobre la locomotora a causa de la rotación de la Tierra?

11-36. Utilícese la fuerza de CORIOLIS para determinar la desviación hacia el Este de un cuerpo que se deja

caer a una latitud arbitraria desde una altura  $h$ .

11-37. Se deja caer un cuerpo desde una altura  $h$  sobre el ecuador terrestre. ¿Cuánto se desvía hacia el Este el cuerpo? Resolver el problema respecto a un sistema de coordenadas fijo (no giratorio). (*Sugerencia.* El momento cinético debe conservarse.)

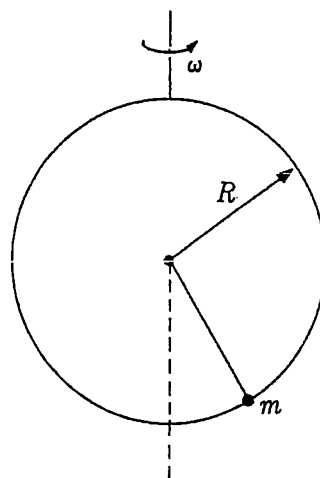


Figura 11-37

11-38. Una pista circular de radio  $R$  gira alrededor de su eje vertical con una velocidad angular constante  $\omega$  (fig. 11-37). Una partícula de masa  $m$  puede deslizarse sin rozamiento sobre la pista. Cuando la velocidad angular  $\omega$  es inferior a un valor crítico  $\omega_1$ , es posible que la partícula describa oscilaciones alrededor del punto más bajo de la pista. (a) Determinar esta velocidad angular crítica. (b) Si  $\omega > \omega_1$ , describir la naturaleza del movimiento y las posibles posiciones de equilibrio.

11-39. En el capítulo 10 considerábamos un ejemplo en el cual se movía una partícula bajo la acción de la gravedad en un túnel imaginario exento de rozamientos que pasaba por el centro de la Tierra. Entonces no considerábamos el efecto del movimiento de rotación

terrestre. Vamos a incluir ahora el efecto de la rotación sobre el movimiento de la partícula. Consideremos el túnel en el plano ecuatorial y determinemos el movimiento de la partícula respecto a un sistema de coordenadas solidario a la Tierra. (a) ¿Cuál es la componente, en la dirección del túnel, de la fuerza total

(fuerza de interacción y de inercia) que se ejerce sobre la partícula? ¿Cuál es la naturaleza del movimiento resultante? (b) ¿Qué tiempo invertirá la partícula en ir de un extremo del túnel al otro? (c) Determinar el valor máximo y la dirección de la fuerza que ejerce la pared lateral del túnel sobre la partícula.



## EJEMPLOS DE FUERZAS Y MOVIMIENTO — IV

*Resumen.* En este capítulo se aplican las ecuaciones del movimiento de un sistema de partículas al estudio del movimiento de un cuerpo rígido. Este movimiento puede describirse como el resultado de la superposición de una traslación y una rotación. La especificación unívoca del movimiento requiere, en general, seis coordenadas independientes que expresen, por ejemplo, la posición del centro de masa y la orientación del cuerpo respecto al centro de masa. Se deducen ecuaciones independientes que relacionan el movimiento del centro de masa y la rotación en torno a él con la fuerza y momento exteriores que se ejercen sobre el cuerpo. Se estudian estas ecuaciones y se demuestra que un sistema cualquiera de fuerzas puede reducirse a una fuerza resultante (que actúe sobre el centro de masa) y a un par de fuerzas. En el estudio cuantitativo detallado de ejemplos específicos siguiente, sólo consideraremos movimiento en un plano. Se estudia el teorema de las fuerzas vivas y se aplica a algunos problemas específicos, entre los cuales estudiamos la influencia de los impulsos sobre los cuerpos rígidos, choques, rodadura y la rotación de un cuerpo alrededor de un eje fijo. Finalmente, se dan algunos ejemplos de Estática.

En los capítulos anteriores hemos estudiado, de vez en cuando, ejemplos de movimiento de cuerpos rígidos con el fin de ilustrar las leyes del movimiento aplicadas a un sistema de partículas. Por ejemplo, hemos considerado el movimiento de traslación y ciertos aspectos de la rotación de un cuerpo rígido. En este capítulo vamos a estudiar el movimiento de un cuerpo rígido de manera más sistemática.

Podemos definir el cuerpo rígido como un conjunto de partículas que mantienen invariables sus distancias recíprocas. En rigor, no existen los cuerpos rígidos, ya que todos los materiales reales son compresibles y siempre se deforman, más o menos, bajo la acción de las fuerzas. En realidad, aun cuando sobre el cuerpo no se ejerza fuerza alguna, los átomos y moléculas que constituyen el cuerpo no ocupan posiciones fijas que mantengan invariables sus distancias mutuas, sino que se hallan continuamente en movimiento de agitación térmica. A pesar de todo, por lo que respecta al movimiento «global» del cuerpo, la hipótesis de cuerpo rígido es satisfactoria para muchos fines.

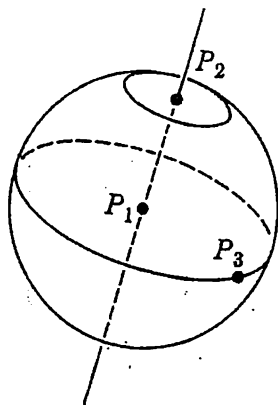


Figura 12-1

### 12-1 Cinemática de un cuerpo rígido.

La descripción completa del movimiento de un sistema arbitrario de partículas exige que se especifique en función del tiempo la posición de cada partícula del sistema. En el caso particular de un cuerpo rígido, en el cual *se mantienen invariables las distancias entre las partículas*, sólo habrá que considerar las posiciones de tres puntos no alineados. Si especificamos la situación de uno solo de los puntos, por ejemplo el  $P_1$  de la figura 12-1, el cuerpo

podrá girar libremente alrededor de dicho punto y, por tanto, no tendremos establecida la orientación del cuerpo. Si especificamos dos puntos, tales como  $P_1$  y  $P_2$ , el cuerpo seguirá pudiendo girar libremente en torno a la recta definida por dichos puntos. En cambio, si especificamos un tercer punto  $P_3$  no alineado con los anteriores, se elimina toda ambigüedad y queda determinada tanto la posición como la orientación del cuerpo rígido y en consecuencia la posición de todas las partículas del cuerpo. Podría parecer que, como para determinar la posición de un punto se necesitan tres números (las tres coordenadas  $x, y, z$ ), para determinar la posición y orientación de un cuerpo rígido se precisarán nueve coordenadas. Sin embargo, esas nueve coordenadas no son independientes sino que están relacionadas por tres ecuaciones de la forma

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = d_{12}^2$$

donde  $d_{12}^2$  es la distancia constante que separa  $P_1$  de  $P_2$ . Por tanto, sólo se precisarán seis números para especificar la situación y orientación de un cuerpo rígido. A estos seis números se les suele llamar los seis grados de libertad del cuerpo. No tienen por qué ser seis coordenadas cartesianas rectangulares; corrientemente, son las tres coordenadas cartesianas rectangulares que determinan la posición del centro de masa y tres ángulos. Por ejemplo, dos de los ángulos determinan la dirección de un eje tal como el  $P_1P_2$ , y el tercer ángulo determina la orientación respecto a este eje.

Si los ángulos son constantes, de manera que la orientación del cuerpo permanece la misma, el movimiento es de *traslación*. Todos los puntos del cuerpo siguen trayectorias paralelas, tal como se indica esquemáticamente en la figura 12-2. En cambio, en una *rotación* pura las coordenadas del centro de masa (o de otro punto) son constantes y sólo varían con el tiempo los ángulos. Estos dos tipos de movimiento son fundamentales, ya que todo movimiento de un cuerpo rígido puede obtenerse por superposición de una traslación y una rotación. Por ejem-

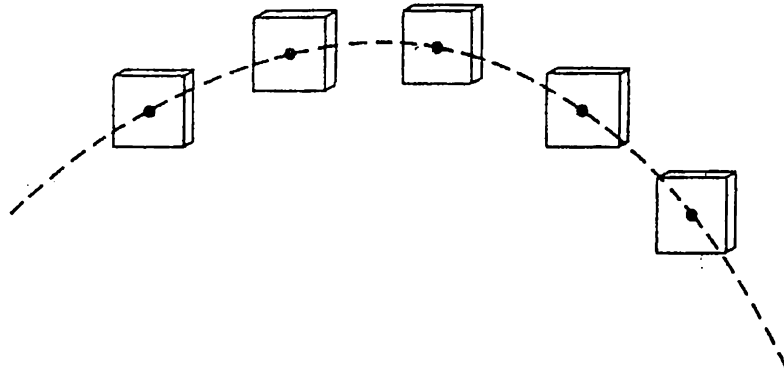


Fig. 12-2. Traslación de un cuerpo rígido.

plo, si queremos llevar un cuerpo de una posición y orientación iniciales a otra posición y orientación finales, podemos trasladar el cuerpo hasta que el centro de masa alcance su posición final y luego girar el cuerpo alrededor del centro de masa hasta darle la orientación final.

**12-2 Ecuaciones del movimiento.** El problema general del movimiento de un cuerpo rígido es determinar la situación y orientación de un cuerpo como funciones del tiempo, relacionándolas con las fuerzas exteriores al cuerpo. En el caso general, habrán seis coordenadas incógnitas y se precisarán seis ecuaciones del movimiento para resolver el problema. Estas ecuaciones se obtienen formalmente de las ecuaciones para las velocidades de variación de la cantidad de movimiento y del momento cinético totales del cuerpo. Al igual que en el caso del movimiento de un sistema de partículas (véanse caps. 4 y 9) obtenemos, para el movimiento de un cuerpo rígido, las ecuaciones vectoriales

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F} \quad (12-1)$$

y

$$\frac{d\mathbf{L}^*}{dt} = \boldsymbol{\tau}^* \quad (12-2)$$

donde  $\mathbf{P} = M\mathbf{V}$  es la cantidad de movimiento total expresada como producto de la masa total  $M$  por la velocidad  $\mathbf{V}$  del centro de masa,  $\mathbf{F}$  es la resultante de las fuerzas exteriores que se ejercen sobre el cuerpo,  $\mathbf{L}^*$  es el momento cinético de spin y  $\boldsymbol{\tau}^*$  es el momento resultante respecto al centro de masa. Cada una de estas ecuaciones vectoriales representa tres ecuaciones correspondientes a las componentes de los vectores que intervienen,  $M dV_x/dt = F_x$ ,  $dL_x^*/dt = \tau_x^*$ , etc., y tenemos entonces las seis ecuaciones requeridas para la solución del problema del movimiento del cuerpo rígido. La solución general de estas ecuaciones es difícil de obtener y sólo se conocen casos particulares del movimiento del cuerpo rígido.

No obstante, de las ecuaciones fundamentales (12-1) y (12-2) surgen inmediatamente ciertas características generales. De la primera ecuación se deduce que el movimiento del centro de masa del cuerpo sólo depende de la magnitud y dirección de la resultante de las fuerzas exteriores, pero no de los puntos de aplicación de dichas fuerzas. De la segunda ecuación vemos, por ejemplo, que si las fuerzas exteriores equivalen a una fuerza única que pase por el centro de masa, lo cual significa que  $\tau^* = 0$ , el momento cinético de spin del cuerpo permanece constante. La fuerza gravitatoria (uniforme) es un ejemplo típico de este caso.

En la figura 12-3 se ilustra esquemáticamente estos resultados. En ella puede verse una barra que desliza sobre un plano horizontal exento de rozamientos bajo la acción de una fuerza constante  $F_0$ . En (a) la fuerza está aplicada al centro de masa, su momento respecto al centro de masa es, entonces, nulo; cuando el momento cinético sea inicialmente nulo, seguirá siéndolo. La barra adquiere

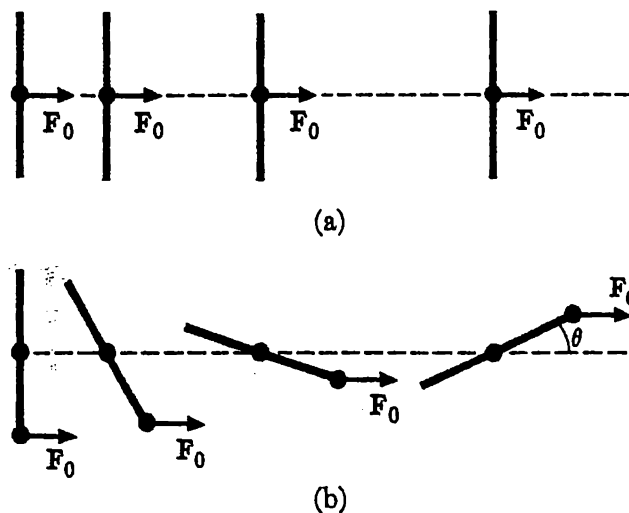


Fig. 12-3. Movimiento de una barra bajo la acción de una fuerza constante. El centro de masa se mueve en línea recta y su movimiento es independiente del punto de aplicación de la fuerza.

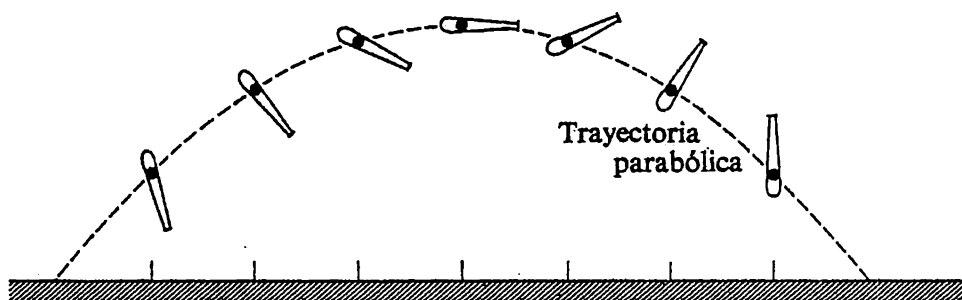


Fig. 12-4. El centro de masa de un cuerpo rígido sometido exclusivamente a la acción de la gravedad sigue la conocida trayectoria parabólica y el momento cinético respecto al centro de masa permanece constante, por ser nulo el momento de la fuerza de la gravedad respecto al centro de masa.

un movimiento de traslación pura con aceleración constante. En (b), la fuerza está aplicada a un extremo de la barra. El movimiento del centro de masa es el mismo de antes. En cambio, ahora la barra está animada de rotación y traslación. Cuando se inicia el movimiento, el brazo de palanca respecto al centro de masa es  $d/2$ , siendo  $d$  la longitud de la barra. Al girar la barra, el brazo de palanca disminuye y se hace eventualmente nulo. La inercia de la barra hace que pase de esta posición cero y el momento invierte su signo. Ello, a su vez, da a la barra una aceleración angular en sentido contrario. En otras palabras, el movimiento es como el de un péndulo.

En el ejemplo de la figura 12-4, un bate de pelota-base se mueve por el aire bajo la influencia de la fuerza gravitatoria. El centro de gravedad, pues, describirá la conocida trayectoria parabólica característica del movimiento de proyectiles. La fuerza de la gravedad resultante (en un campo uniforme) pasa por el centro de masa del cuerpo, por lo que el momento resultante exterior es nulo respecto al centro de masa. En consecuencia, el momento cinético de spin del bate se mantendrá constante durante el movimiento.

*Equivalencia de sistemas de fuerza.* Si intentamos determinar las fuerzas que se ejercen sobre un cuerpo rígido a partir del movimiento conocido, encontraremos que existen muchas combinaciones diferentes de fuerzas exteriores que producen el mismo movimiento. El movimiento del centro de masa (véase cap. 4) sólo depende de la magnitud, dirección y sentido de la resultante de las fuerzas exteriores, pero no del punto de aplicación de las mismas. Análogamente, pueden producirse las mismas velocidades de variación del momento cinético mediante muchas combinaciones de fuerzas que tengan momentos resultantes iguales. Para producir velocidades de variación dadas, tanto de la cantidad de movimiento como del momento cinético, mediante sistemas de fuerzas diferentes, estos sistemas deben tener la misma resultante y el mismo momento resultante. Si sólo hay una fuerza exterior, observamos que podemos mover su punto de aplicación a lo largo de la línea de acción o recta soporte de la fuerza, sin que varíen ni la resultante ni el momento. Análogamente, cuando sobre un cuerpo rígido se ejercen varias fuerzas exteriores, éstas podrán deslizarse a lo largo de sus líneas de acción y si éstas se cortan, podrán sustituirse las fuerzas por una fuerza única que sea su resultante y pase por el punto de intersección, según se indica en la figura 12-5. La resultante aplicada en dicho punto será equivalente al sistema de fuerzas tanto en sus efectos de traslación como de rotación. Así pues, si la resultante obtenida de esta manera pasa por el centro de masa del cuerpo, el sistema de fuerzas sólo comunicará al cuerpo un movimiento de traslación.

Dos fuerzas iguales y opuestas aplicadas a un cuerpo originan una resultante nula y el centro de masa del cuerpo no se acelerará. No obstante, si no coinciden las líneas de acción de las fuerzas, se origina un momento y el cuerpo recibe una aceleración angular. El sistema de fuerzas de este tipo recibe el nombre

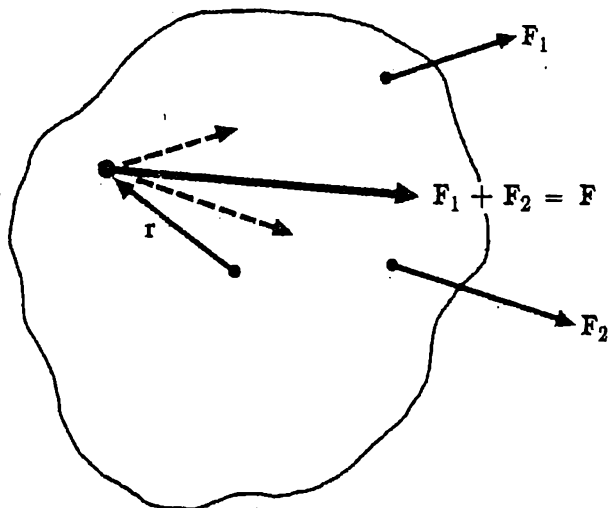


Fig. 12-5. La resultante  $F = F_1 + F_2$  aplicada al punto de intersección de las líneas de acción de  $F_1$  y  $F_2$ , produce el mismo movimiento inicial que el sistema de fuerzas original  $F_1, F_2$ .

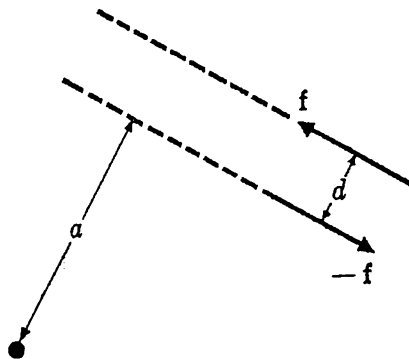


Fig. 12-6. Par de fuerzas. La magnitud del momento del par es  $f(a + d) - fa = fd$ .

de *par de fuerzas*. En la figura 12-6 se han representado las fuerzas del par por  $f$  y  $-f$ , y  $d$  es la distancia que separa las líneas de acción de las fuerzas. Si son  $r_2$  y  $r_1$  los vectores de posición de los puntos de aplicación de las fuerzas, el momento respecto al origen, producido por el par es  $\tau = r_2 \times f - r_1 \times f = (r_2 - r_1) \times f$ . El vector  $r_2 - r_1$  se halla en el plano definido por el par de fuerzas y la magnitud de  $\tau = (r_2 - r_1) \times f$  no es mas que  $fd$ . La dirección de  $\tau$  es perpendicular al plano del par de fuerzas. En la figura 12-6 puede verse un caso en que el punto de referencia se halla en el plano del par de fuerzas.

Cuando un cuerpo rígido se halla sometido a un sistema de fuerzas exteriores, hemos visto que se producen dos efectos esenciales. Por una parte, el vector  $F$  suma de las fuerzas comunica una aceleración al centro de masa y por otra, la suma vectorial de los momentos de las fuerzas respecto al centro de masa produce una velocidad de variación del momento cinético de spin.

Si los momentos de las fuerzas exteriores respecto al centro de masa dan una suma nula, podremos sustituir dichas fuerzas por una fuerza única que pase por el centro de masa. Desde luego, esta fuerza debe ser igual a la suma vectorial de las fuerzas exteriores.

En cambio, si la suma vectorial de las fuerzas exteriores es nula, pero no el momento resultante, el sistema de fuerzas exteriores podrá sustituirse por un par. Análogamente, un sistema arbitrario de fuerzas que tenga resultante de las fuerzas y momento resultante no nulos, también podrá sustituirse por un sistema equivalente. En éste, la fuerza resultante pasará por el centro de masa y existirá un par cuyo momento sea igual al momento resultante de las fuerzas exteriores, *respecto al centro de masa*. La fuerza única comunicará al centro de masa la aceleración requerida, pero no tendrá efecto alguno sobre el momento cinético de spin; el par origina la velocidad de variación requerida del momento cinético de spin, pero no tiene efecto alguno sobre la aceleración del centro de masa.

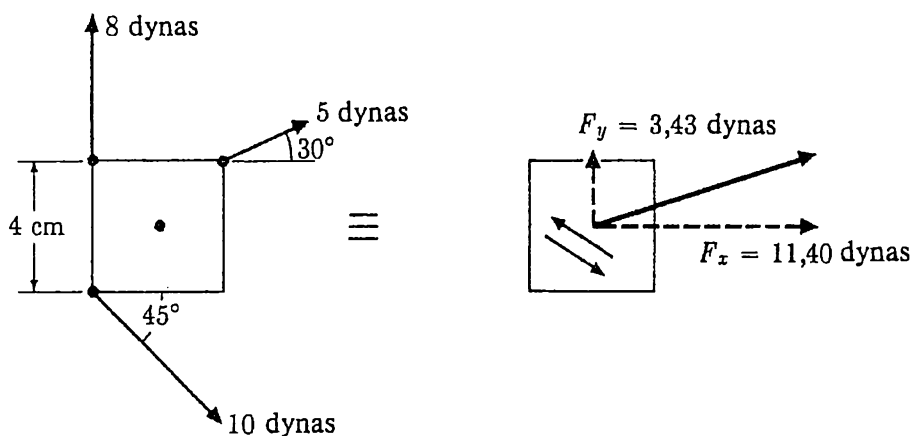


Figura 12-7

**EJEMPLO.** Una placa cuadrada de 4 cm de lado está sometida a las fuerzas que se indican en la figura 12-7. Reducir este sistema de fuerzas a una fuerza única que pase por el centro de masa y a un par de fuerzas.

Las componentes  $x$  e  $y$  de la fuerza resultante son

$$F_x = 0 + 5 \cos 30^\circ + 10 \cos 45^\circ \simeq 11,40 \text{ dynas}$$

$$F_y = 8 + 5 \sin 30^\circ - 10 \sin 45^\circ \simeq 3,43 \text{ dynas}$$

El momento resultante respecto al centro de masa es

$$\begin{aligned} \tau^* &= -2 \cdot 8 - 2 \cdot 5 \cos 30^\circ + 2 \cdot 5 \sin 30^\circ \\ &\quad + 2 \cdot 10 \cos 45^\circ + 2 \cdot 10 \sin 45^\circ \\ &\simeq 8,58 \text{ dyna} \cdot \text{cm} \end{aligned}$$

La fuerza requerida queda determinada por las componentes  $F_x$  y  $F_y$ . Cualquier par que tenga un momento de 8,58 dyna·cm será suficiente. En la figura 12-7 puede verse dicho par, donde cada una de las fuerzas es de 8,58 dynas y su separación es de 1 cm.

**12-3 Movimiento en un plano.** A causa de la complejidad del problema general del movimiento del cuerpo rígido, vamos a limitar un estudio más detallado de las ecuaciones del movimiento (12-1) y (12-2) a tipos especiales de movimiento en un plano. En dicho movimiento, todas las partes de un cuerpo recorren trayectorias paralelas a un plano dado, al que llamaremos plano  $xy$ . La posición y orientación del cuerpo quedan determinadas unívocamente por las dos coordenadas ( $X$ ,  $Y$ ) del centro de masa y un ángulo  $\theta$  que determina la orientación del cuerpo en el plano respecto a un eje fijo en el mismo plano. La velocidad angular del cuerpo es entonces  $\omega = d\theta/dt$  y, según vimos en el capítulo 9, la componente según  $z$  del momento cinético de spin es  $L_z^* = I_0\omega$ , donde  $I_0$  es el momento de inercia respecto al centro de masa. En el capítulo 9 se vio el cálculo del momento de inercia  $I_0 = \int r^2 dm$ , habiéndose incluido en la figura 12-8 los resultados de estos cálculos.

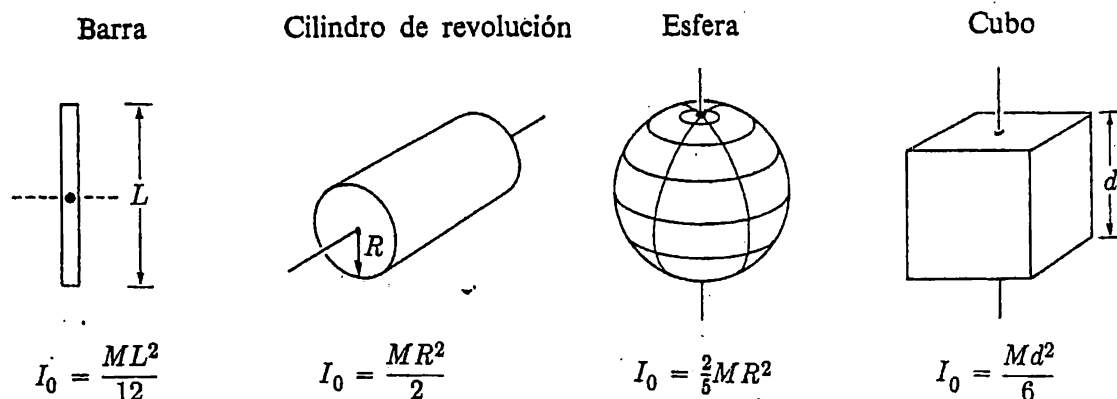


Fig. 12-8. Momentos de inercia de algunos cuerpos conocidos.

Las ecuaciones del movimiento a partir de las cuales pueden determinarse  $X$ ,  $Y$  y  $\theta$  son, pues, de las ecuaciones (12-1) y (12-2),

$$\frac{dP_x}{dt} = F_x, \quad \frac{dP_y}{dt} = F_y, \quad \text{y} \quad I_0 \frac{d\omega}{dt} = \tau_z^* \quad (12-3)$$

donde  $P_x = MV_x = M(dX/dt)$ ,  $P_y = MV_y = M(dY/dt)$ , y  $\omega = d\theta/dt$

**EJEMPLO.** Sobre una superficie horizontal exenta de rozamientos, se tira con una fuerza  $F$  de un disco cilíndrico uniforme de radio  $R$  y masa  $M$ . Se aplica la fuerza me-



diante un hilo arrollado en torno al cilindro, según se indica en la figura 12-9. Determinar el movimiento del disco si parte del reposo en el instante  $t = 0$ .

Se toma el eje  $x$  en la dirección de la fuerza. Las ecuaciones del movimiento son, entonces,

$$M \frac{dV_x}{dt} = F$$

y

$$I_0 \frac{d\omega}{dt} = FR$$

donde  $V_x$  es la velocidad del centro de masa y  $\omega$  su velocidad angular. A partir de estas ecuaciones obtenemos

$$\frac{dX}{dt} = V_x = \frac{F}{M} t, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega = \frac{FR}{I_0} t$$

y

$$X = \frac{F}{M} \frac{t^2}{2}, \quad \theta = \frac{FR}{I_0} \frac{t^2}{2}$$

donde  $X$  es la coordenada del centro de masa.

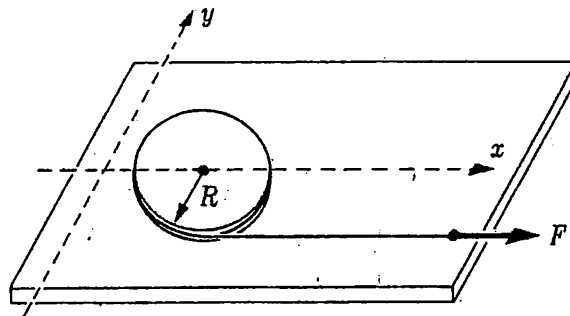


Figura 12-9

Si se mantiene fijo el centro de masa del disco, mediante un eje vertical, el centro de masa permanecerá en reposo y sólo se obtendrá movimiento de rotación. Además de la fuerza de la cuerda, en el eje del disco aparecerá otra fuerza igual y contraria. El momento de ésta será, evidentemente, nulo, pues su línea de acción corta al eje de rotación.

Energía cinética. Como en el caso de un sistema de partículas cualesquiera, la energía cinética total del cuerpo rígido puede expresarse en la forma

$$E = \frac{1}{2} M V^2 + E^* \quad (12-4)$$

donde  $M$  es la masa del cuerpo y  $V$  la velocidad de su centro de masa. El primer término está asociado al movimiento del centro de masa y el segundo con el movimiento respecto al centro de masa. En el caso de un cuerpo rígido, este último movimiento es una rotación y si tiene lugar en el plano  $xy$ , el eje de rotación tiene la dirección  $z$ . La energía cinética de rotación puede expresarse en función del momento de inercia respecto a este eje, de la manera siguiente. Un elemento de masa  $dm$  situado a una distancia  $r$  del eje que pasa por el centro de masa, tiene una velocidad  $v = \omega r$  respecto al centro de masa, donde  $\omega = d\theta/dt$  es la velocidad angular del cuerpo. La energía cinética de este elemento de masa es, pues,  $\frac{1}{2}(\omega r)^2 dm$ , y la energía cinética total de rotación es

$$E^* = \frac{1}{2}\omega^2 \int r^2 dm = \frac{1}{2}I_0\omega^2 \quad (12-5)$$

donde  $I_0 = \int r^2 dm$  es el momento de inercia del cuerpo respecto al eje que pasa por el centro de masa y es normal al plano del movimiento.

La energía cinética total de un cuerpo rígido que se mueve en un plano puede, pues, expresarse en la forma

$$E = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 \quad (12-6)$$

Teorema de las fuerzas vivas. Supongamos que el sistema de fuerzas exteriores se ha reducido a una fuerza resultante  $F$  aplicada al centro de masa y a un par que proporciona el momento resultante. Cuando se desplaza el centro de masa una distancia  $dR$ , el trabajo realizado por la fuerza resultante es

$$F \cdot dR = dR \cdot \left(\frac{dP}{dt}\right) = V \cdot dP = d\left(\frac{MV^2}{2}\right)$$

En otras palabras, el trabajo de la fuerza  $F$  en este desplazamiento del centro de masa es igual al incremento de la energía cinética de traslación,

$$dE_t = d\left(\frac{1}{2}MV^2\right) = F \cdot dR = F_R dR \quad (12-7)$$

Se comprende que un par de fuerzas no contribuirá con ningún trabajo en una traslación pura del cuerpo, puesto que las dos fuerzas son de igual magnitud y dirección, pero de sentidos opuestos. En cambio, si el cuerpo gira un ángulo  $d\theta$  en el plano del par de fuerzas, la perpendicular común a las fuerzas también girará el ángulo  $d\theta$ . Entonces, el trabajo realizado por las fuerzas del par es  $fd_1 d\theta + fd_2 d\theta = (fd) d\theta = \tau^* d\theta$ , donde  $d_1 + d_2 = d$  y  $\tau^* = fd$ , según se indica en la figura 12-10. Como  $\tau^* = I_0 (d\omega/dt)$  [ec. (12-3)], el trabajo realizado por el par puede escribirse en la forma  $\tau^* d\theta = I_0 (d\omega/dt) d\theta = I_0 \omega d\omega =$

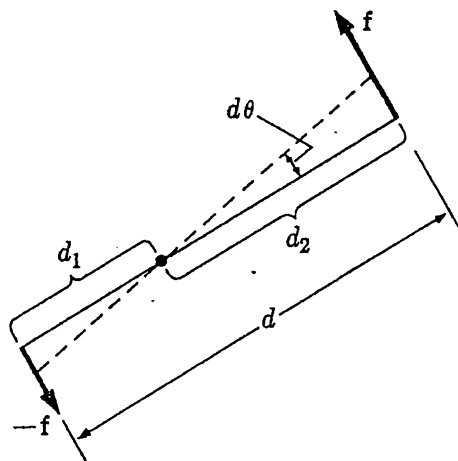


Fig. 12-10. Cuando el cuerpo gira un ángulo  $d\theta$  en el plano del par de fuerzas, el trabajo realizado por el par es  $fd_2d\theta + fd_1d\theta = (fd)d\theta = \tau^*d\theta$ .

$= d(I_0\omega^2/2)$ . En otras palabras, el trabajo realizado por el par de fuerzas es igual al incremento de energía cinética respecto al centro de masa:

$$dE^* = d(\frac{1}{2}I_0\omega^2) = \tau^* d\theta \quad (12-8)$$

Las variaciones totales de  $MV^2/2$  e  $I_0\omega^2/2$  se obtienen por integración de las ecuaciones (12-7) y (12-8).

$$(E_t)_2 - (E_t)_1 = \int_1^2 F_R dR \quad \text{y} \quad (E^*)_2 - (E^*)_1 = \int_1^2 \tau^* d\theta \quad (12-9)$$

La variación de la energía cinética total será igual a la suma de las contribuciones definidas por las ecuaciones (12-7) y (12-8). Esta variación de la energía cinética total puede expresarse también como suma de las contribuciones al trabajo de las diferentes fuerzas que se ejercen sobre el cuerpo rígido. Consideremos una de las fuerzas exteriores  $\mathbf{F}_1$  aplicada en un punto de posición  $\mathbf{r}_1^*$  respecto al centro de masa (véase fig. 12-11). Al girar el cuerpo un ángulo  $d\theta$ , el punto de aplicación de la fuerza  $\mathbf{F}_1$  recorre una distancia  $ds_1 = r_1^* d\theta$  perpendicular a  $\mathbf{r}_1^*$ . Representaremos este desplazamiento por el vector  $d\mathbf{r}_1^*$ . Si se da, además, al cuerpo, una traslación elemental  $d\mathbf{R}$ , el desplazamiento resultante del punto de aplicación de  $\mathbf{F}_1$  es  $d\mathbf{r}_1 = d\mathbf{R} + d\mathbf{r}_1^*$ . El trabajo de  $\mathbf{F}_1$  es, entonces,  $\mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 = \mathbf{F}_1 \cdot (d\mathbf{R} + d\mathbf{r}_1^*) = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} + \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1^* = F_{1R} dR + F_{1\theta} r_1^* d\theta$ , donde  $F_{1R}$  es la componente de la fuerza según la dirección del desplazamiento  $d\mathbf{R}$  y  $F_{1\theta}$  es la componente perpendicular a  $\mathbf{r}_1^*$ . Según hemos visto, la contribución  $F_{1R} dR$  incrementa la energía cinética de traslación del cuerpo. La segunda contribución  $F_{1\theta} r_1^* d\theta$  puede expresarse en la forma  $\tau_1^* d\theta$ , puesto que  $\tau_1^* = F_{1\theta} r_1^*$  es el momento

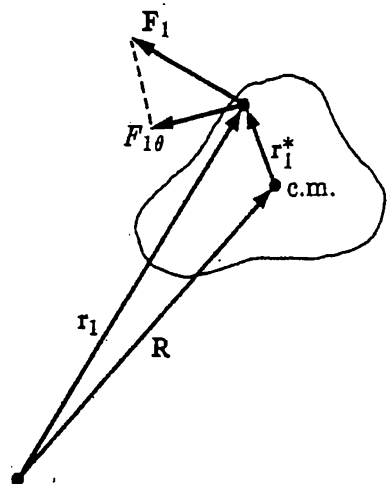


Figura 12-11

respecto al centro de masa y vimos anteriormente que esta parte produce un incremento de  $E^*$ . Así pues, la contribución de  $F_1$  a la energía cinética total es  $dE_1 = F_1 \cdot r^*$  y cuando sumamos las contribuciones homólogas de las restantes fuerzas exteriores, podemos expresar la variación de la energía cinética total del cuerpo en la forma

$$dE = dE_t + dE^* = F_1 \cdot dr_1 + F_2 \cdot dr_2 + \dots \quad (12-10)$$

En nuestros futuros estudios aplicaremos estas relaciones entre trabajo y energía a numerosos ejemplos.

**EJEMPLO 1.** En el ejemplo del movimiento del disco representado en la figura 12-9, el trabajo  $FX$  se convierte en energía cinética de traslación, siendo  $X$  el desplazamiento del centro de masa y  $F$  la fuerza exterior. Es decir,

$$FX = \frac{MV^2}{2} \quad \text{o sea} \quad V = \sqrt{\frac{2FX}{M}} \quad (12-11)$$

Análogamente, obtenemos para la energía cinética de rotación

$$\tau^* \theta = FR\theta = \frac{I_0 \omega^2}{2} \quad \text{o sea} \quad \omega = \sqrt{\frac{2FR\theta}{I_0}} \quad (12-12)$$

donde  $\theta$  es el ángulo total de rotación del disco cuando el centro de masa ha recorrido una distancia  $X$ .

Este método de cálculo de la energía cinética a partir de la fuerza y momento exteriores conocidos corresponde a las dos ecuaciones (12-7) y (12-8) del texto. También podemos calcular la ecuación (12-10) para el cálculo de la energía cinética total del cuerpo. Por tanto, deberemos conocer el desplazamiento total del punto de aplicación de

la fuerza exterior. En este caso, el desplazamiento total comprende al desplazamiento  $X$  del centro de masa más el desplazamiento  $R\theta$  debido a haber girado el cuerpo un ángulo  $\theta$ . El trabajo total es, pues,  $F(X + R\theta)$  y este trabajo debe ser igual a la energía cinética total del cuerpo en la posición  $X$ . Vemos que este resultado es compatible con las expresiones (12-11) y (12-12), a partir de las cuales obtenemos la energía cinética total  $(MV^2/2) + (I_0\omega^2/2) = FX + FR\theta$ .

Dejamos como ejercicio demostrar que las expresiones de la energía cinética, obtenidas utilizando el teorema de las fuerzas vivas, son compatibles con las obtenidas utilizando las expresiones de la velocidad del centro de masa y de la velocidad angular obtenidas en el estudio anterior a este ejemplo (véase fig. 12-9).

**EJEMPLO 2.** Se arrolla un hilo en torno a un cilindro de radio  $R$  y se mantiene fijo el extremo del hilo, según se indica en la figura 12-12. ¿Cuál será el movimiento subsiguiente de este «yo-yo» si se sostiene en reposo y luego se suelta?

Consideremos en primer lugar el movimiento de traslación del centro de masa. Sobre el cilindro se ejercen dos fuerzas exteriores: la tensión del hilo y el peso  $Mg$ . Tenemos

$$Mg - T = M \frac{dV}{dt}$$

donde  $V$  es la velocidad del centro de masa en el sentido hacia abajo, que se toma como positivo.

Para el movimiento de rotación en torno al centro de masa tenemos

$$Tr = I_0 \frac{d\omega}{dt}$$

donde  $Tr$  es el momento,  $I_0 = Mr^2/2$  el momento de inercia respecto al eje normal al papel que pasa por el centro de masa del cilindro y  $\omega$  es la velocidad angular. Tenemos  $V = r\omega$  y por tanto  $r(d\omega/dt) = dV/dt$ . Si combinamos las relaciones para los movimientos de traslación y de rotación y eliminamos  $T$ , tenemos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{g}{1 + I/Mr^2}$$

La aceleración es uniforme y su magnitud es  $2g/3$ , puesto que  $I$  es  $Mr^2/2$ . A partir de esta ecuación podemos determinar la velocidad del centro de masa en función del tiempo. Sin embargo, es interesante determinar la velocidad en función de la posición, directamente a partir del teorema de las fuerzas vivas. El sistema considerado es el cilindro y el hilo. La fuerza que se ejerce sobre el hilo en su punto de suspensión no realiza trabajo alguno y, por tanto, el trabajo realizado por las fuerzas exteriores se reduce al trabajo de la fuerza de la gravedad. Cuando el centro de masa haya caído una dis-

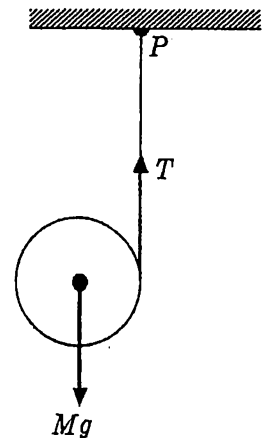


Figura 12-12

tancia  $y$ , el trabajo realizado será  $Mgy$ . Si es  $V$  la velocidad del centro de masa en dicho punto, la velocidad angular será  $\omega = V/r$  y la energía cinética total será

$$E = \frac{MV^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2} = \frac{3}{2} \frac{MV^2}{2}$$

De aquí obtenemos  $3MV^2/4 = Mgy$ .

**Influencia de un impulso instantáneo.** El movimiento de un cuerpo rígido sometido a fuerzas que actúan continuamente, puede ser un tanto complicado. Para comprender la esencia de dicho movimiento conviene a menudo considerar el caso idealizado en que se aplique al cuerpo un impulso instantáneo en vez de una fuerza de acción continua. Sabemos que un impulso instantáneo comunica al cuerpo una cantidad de movimiento en un tiempo nulo, lo cual exige que la fuerza sea infinitamente grande, de manera que el producto  $J = F \Delta t$  sea distinto de cero cuando tienda a cero  $\Delta t$ . En este caso ideal, durante el impulso no varía la posición del cuerpo. En consecuencia, el impulso angular respecto a  $r = 0$  es simplemente  $r \times J$ , donde  $r$  es el vector de posición del punto de aplicación del impulso  $J$ .

**EJEMPLO 1.** Una barra recta, en reposo sobre una superficie horizontal exenta de rozamientos, recibe un impulso instantáneo  $J$  perpendicular a la barra. Determinar el momento cinético y la energía cinética total cedidos a la barra si se aplica el impulso en (a) el centro de masa de la barra y (b) un extremo de la barra. La masa de la barra es  $M = 15$  kg, su longitud  $d = 2$  m y la magnitud del impulso  $J = 7,5$  N·s.

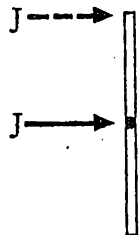


Figura 12-13

La velocidad del centro de masa después del impulso es

$$V = \frac{J}{M} = \frac{7,5}{15} = 0,5 \text{ m/s}$$

La velocidad de traslación es independiente de que se aplique el impulso en el extremo de la barra o en su centro de masa.

(a) Si se aplica el impulso en el centro de masa, no se cede momento cinético alguno respecto al centro de masa. El movimiento de la barra después del impulso será, pues, una traslación pura y la energía cinética será, simplemente,

$$E = \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}M \left( \frac{J}{M} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{J^2}{M} = \frac{15}{8} \text{ J}$$

(b) Cuando se aplica el impulso a un extremo de la barra, el brazo de palanca respecto al centro de masa es  $d/2 = 1$  m, y el momento cinético respecto al centro de

masa después del impulso será

$$I_0 \omega = J \frac{d}{2} = 7,5 \text{ J}\cdot\text{s}$$

Con  $I_0 = Md^2/12$ , obtenemos

$$\omega = \frac{Jd}{2} \cdot \frac{12}{Md^2} = \frac{6J}{Md} = \frac{6 \cdot 7,5}{15 \cdot 2} = \frac{3}{2} \text{ s}^{-1}$$

La energía cinética de rotación de la barra después del impulso es, pues,

$$E^* = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{Md^2}{12} \cdot \frac{36J^2}{M^2 d^2} = \frac{3}{2} \frac{J^2}{M}$$

o sea, tres veces mayor que la energía cinética de traslación. La energía cinética total es, pues,

$$E = E^* + \frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + \frac{1}{2} M V^2 = 2 \frac{J^2}{M} = 7,5 \text{ J}$$

EJEMPLO 2. De un eje fijo horizontal, pende una barra recta uniforme de masa  $M$  y longitud  $L$ , según se indica en la figura 12-14. Se aplica en  $B$  un impulso horizontal instantáneo. ¿Cuál es el impulso del eje en  $A$ ?

Supongamos el impulso de contacto  $J_a$ , en el eje, dirigido en la forma indicada. (¿Por qué no hay componente vertical de  $J_a$ ?) Para el movimiento de traslación tenemos, entonces,

$$J_a + J = M V$$

donde  $V$  es la velocidad del centro de masa inmediatamente después del impulso. Análogamente, para el movimiento de rotación en torno al centro de masa, tenemos

$$Jb - J_a a = I_0 \omega = \frac{I_0 V}{a}$$

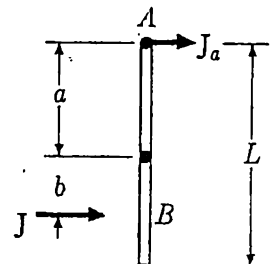


Figura 12-14

donde  $I_0$  es el momento de inercia respecto al eje normal al papel que pasa por el centro de masa y  $\omega = V/a$  es la velocidad angular inmediatamente después del impulso. Si es  $k_0 = \sqrt{I_0/M}$  el radio de giro respecto al eje mencionado que pasa por el centro de masa tenemos, eliminando  $V$  entre las dos expresiones anteriores,

$$J_a = J \frac{b - (k_0^2/a)}{a + (k_0^2/a)}$$

El impulso del eje estará dirigido hacia la derecha si  $b$  es mayor que  $k_0^2/a$  y hacia la izquierda (negativo) si es  $b$  menor que  $k_0^2/a$ . Si es  $b$  igual a  $k_0^2/a$ , el impulso del eje es nulo. En este caso, al punto  $B$  se le llama centro de percusión, referido al eje que pasa

por A. En el caso de una barra uniforme de longitud  $L$ , el centro de percusión se halla a una distancia  $L/6$  del centro de masa. Si al clavar un clavo, éste choca contra el centro de percusión del martillo (referido al punto por donde se agarra) la mano no sufrirá golpe alguno por parte del mango. Para evitar esta reacción, es por lo que se diseñan los martillos y ejes de manera que el punto de impacto, el centro de masa y el radio de giro estén relacionados de acuerdo con las ideas anteriores.

Choques entre cuerpos rígidos. El impulso que se ejerce sobre un cuerpo rígido, considerado en los ejemplos anteriores, se debe frecuentemente a un choque. Cuando chocan dos cuerpos rígidos, por ejemplo dos barras rectas, suelen intercambiar cantidad de movimiento y momento cinético. En dicho intercambio, se conservan la cantidad de movimiento total y (si es central la fuerza de interacción entre los cuerpos) el momento cinético total. Cuando calculamos el momento cinético, podemos tomar como punto de referencia un punto cualquiera del espacio.

En el choque podrá conservarse, o no, la energía cinética total del sistema.

EJEMPLO. Una barra de masa  $M$  y longitud  $d$  se halla inicialmente en movimiento de traslación con velocidad del centro de masa  $V$ . Choca con otra barra exactamente igual, inicialmente en reposo, quedando unida a ella, según se indica en la figura 12-15. ¿Cuál es el movimiento subsiguiente de la barra compuesta?

Antes del choque, la velocidad del centro de masa del sistema era  $V/2$  y deberá quedar invariable. Luego, el centro de masa de la barra compuesta deberá moverse con una velocidad  $V' = V/2$ .

El momento cinético antes del choque se debía enteramente al movimiento de traslación de la primera barra. Si se toma respecto al punto  $P$ , este momento cinético es

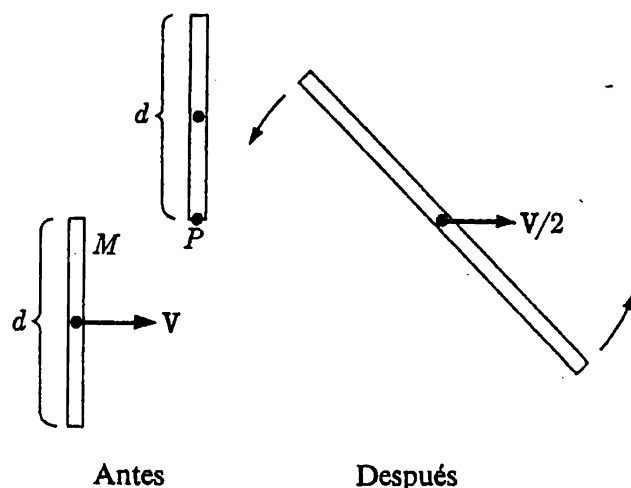


Figura 12-15



$$L = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$MVd/2$ . Después del choque, el sistema tiene un momento cinético de rotación (spin)

$$L = I_0 \omega = 2M \frac{d^2}{3} \omega' = MV \frac{d}{2}$$

puesto que el momento cinético respecto a  $P$  (o cualquier otro punto fijo) debe mantenerse constante. La velocidad angular y la del centro de masa son, por tanto,

$$\omega' = \frac{3}{4} \frac{V}{d} \quad \text{y} \quad V' = \frac{V}{2}$$

Estas dos relaciones describen por completo el movimiento.

La energía cinética inicial era  $MV^2/2$ . La energía cinética final es, en parte, de traslación ( $MV'^2/2$ ) y en parte, de rotación ( $I_0 \omega'^2/2$ ). La parte de rotación es  $E^* = (2M d^2/3) (\omega'^2/2) = 3MV^2/16$  y así la energía cinética total después del choque es  $7 MV^2/16$ .

$$\frac{7}{16} = \frac{7}{16}$$

**Rodadura.** Una imagen exagerada del mecanismo de la rodadura la presenta la rodadura de una rueda dentada sobre una cremallera. Los dientes pueden considerarse como una representación muy ampliada de la superficie de contacto entre el cuerpo y el plano. Si el cuerpo rueda a velocidad constante, no habrá componente horizontal de la fuerza de contacto entre las superficies en contacto, según se indica en la figura 12-16(a). En cambio, cuando la rueda está acelerada, los dientes se ejercen presiones mutuas y puede considerarse que la rueda — o cualquier cuerpo en rodadura — recibe un impulso horizontal cada vez que se encuentran dos dientes. El sentido de estos impulsos depende de la manera en que se accione la rueda.

Cuando se acciona la rueda con un momento, como en el caso de una rueda de automóvil [fig. 12-16(b)], la componente horizontal de la *fuerza de contacto en el suelo* proporciona la cesión de cantidad de movimiento hacia adelante. (La fuerza correspondiente que se ejerce sobre el suelo está dirigida hacia atrás.) Esta fuerza de contacto horizontal es la misma que la fuerza de rozamiento es-

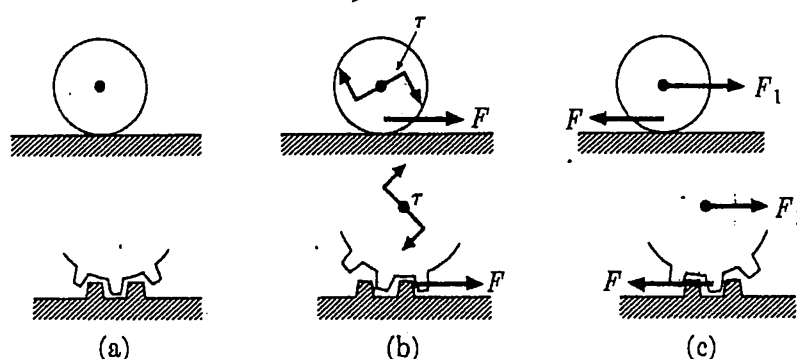


Fig. 12-16. Rodadura. El sentido de la componente horizontal de la fuerza de contacto depende de la manera en que se accione la rueda.

tático que estudiamos en el capítulo 4. En consecuencia, la aceleración máxima que puede darse a un cilindro o rueda accionados por un momento es  $a_{\text{máx}} = \mu N / M$  donde  $\mu$  es el coeficiente de rozamiento estático,  $N$  la componente normal de la fuerza de contacto y  $M$  la masa que hay que acelerar.

Si la rueda está accionada por una fuerza dirigida hacia adelante del eje, la fuerza de contacto horizontal que se ejerce sobre la rueda estará dirigida hacia atrás, según se indica en la figura 12-16(c). La velocidad de cesión de cantidad de movimiento hacia adelante es entonces la diferencia entre la fuerza que se ejerce sobre el eje y la fuerza de contacto en el suelo. En este caso, la fuerza motriz en el eje presenta *momento nulo* respecto al eje de rotación que pasa por el centro. La cesión a la rueda de momento cinético respecto al eje de rotación la proporciona la componente horizontal de la fuerza de contacto.

Cuando no hay ni fuerza ni momento motores, la componente horizontal de la fuerza de contacto se anula y el cuerpo rueda a velocidad constante. En realidad, el cuerpo será frenado por el llamado *rozamiento por rodadura*. La pérdida de energía correspondiente se debe a las deformaciones (pequeñas) del cuerpo y de la superficie que se producen durante la rodadura. Tales deformaciones llevan siempre consigo alguna pérdida de energía y el trabajo de deformación correspondiente se toma de la energía cinética del cuerpo. Obsérvese que el rozamiento por rodadura no corresponde ni al rozamiento por deslizamiento estático ni al cinético.

El mecanismo de andar es algo parecido al de la rodadura. Al andar o correr sobre un suelo horizontal, nos aceleraremos hacia adelante y recibiremos impulsos hacia adelante a cada paso por parte del suelo, al igual que lo hacen los dientes de una rueda (véase fig. 12-17).

EJEMPLO 1. Se tira hacia adelante de una rueda con una fuerza  $F_1$  aplicada a su centro de masa. Representemos por  $F$  a la componente horizontal de la fuerza de

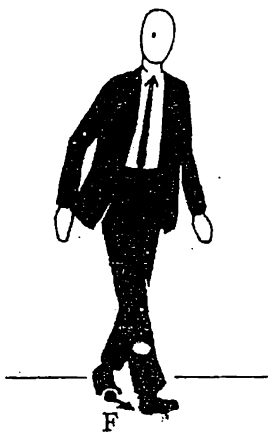


Fig. 12-17. El caminar es algo parecido a la rodadura.

contacto. Las ecuaciones que rigen el movimiento del centro de masa y la rotación del cuerpo en torno al centro de masa son

$$F_1 - F = M \frac{dV}{dt}$$

y

$$FR = I_0 \frac{d\omega}{dt} = k_0^2 M \frac{d\omega}{dt}$$

donde  $k_0 = \sqrt{I_0/M}$  es el radio de giro y  $R$  el radio de la rueda.

Si la rueda gira sin deslizar, la velocidad angular  $\omega$  de la rueda y la velocidad  $V$  del centro de masa están relacionadas por

$$V = R\omega$$

Esta relación es inmediata, ya que para cada revolución completa de la rueda, el centro de masa avanza una distancia  $2\pi R$ . Si se producen  $f$  revoluciones por segundo, el centro de masa avanzará en cada segundo una distancia  $(2\pi f)R = \omega R$ , que será la velocidad del centro de masa.

Eliminando  $F$  entre estas relaciones, obtenemos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{F_1}{M(1 + k_0^2/R^2)}$$

Esta ecuación indica que el movimiento de traslación del cuerpo que rueda será el mismo que el de un cuerpo que desliza cuya masa sea  $M(1 + k_0^2/R^2)$ . El incremento aparente de masa inerte se debe al movimiento de rotación, así como al de traslación que hay que dar a la masa de la rueda.

La energía cinética total de la rueda es la suma de las energías cinéticas de traslación y de rotación en torno al centro de masa:

$$E = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 = \frac{1}{2}M \left(1 + \frac{k_0^2}{R^2}\right) V^2$$

Tiene interés la relación existente entre el incremento de energía cinética y las fuerzas que se ejercen sobre el cuerpo. Para el incremento de la energía de traslación tenemos [véase ec. (12-7)]

$$\int_0^x (F_1 - F) dx = \frac{1}{2}MV^2$$

y para la energía de rotación en torno al centro de masa [véase ec. (12-8)],

$$\int_0^\theta FR d\theta = \frac{1}{2}I_0\omega^2$$

Sumando estas dos contribuciones y con  $R d\theta = dx$ , tenemos

$$\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 = E_{\text{tot}} = \int_0^x F_1 dx$$

En otras palabras, la variación de la *energía cinética total* del cuerpo es igual al *trabajo realizado por la fuerza motriz* exclusivamente. El trabajo total realizado por la fuerza de rozamiento (estático)  $F$  es nulo, ya que la pérdida de energía de traslación debida a  $F$  está compensada por la contribución de  $F$  con una cantidad igual de energía de rotación.

Hemos indicado anteriormente que la componente horizontal de la fuerza de contacto es igual a la fuerza de rozamiento estático en el caso ideal de que no hubiera deformación de los cuerpos. Pero la fuerza de rozamiento estático no puede superar a  $\mu N$ , donde  $\mu$  es el coeficiente de rozamiento estático y  $N$  la componente normal de la fuerza de contacto. La condición para evitar el deslizamiento es  $F \leq \mu N$ , donde  $N = Mg$  es la componente normal de la fuerza de contacto. Si se introduce esta condición en la expresión para el movimiento de traslación,  $F_1 - F = M(dV/dt)$ , la condición correspondiente que hay que imponer a la fuerza motriz  $F_1$  es

$$F_1 \leq \frac{1 + k_0^2/R^2}{k_0^2/R^2} \mu Mg$$

La aceleración máxima que puede comunicarse al cilindro antes de que empiece a deslizar es

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{\max} = \mu \frac{R^2}{k_0^2} g$$

Para el caso de un cilindro homogéneo,  $(dV/dt)_{\max}$  es  $2 \mu g$ .

EJEMPLO 2. Se da a un cilindro homogéneo una velocidad horizontal  $V_1$  y una velocidad angular en sentido opuesto al de las agujas del reloj  $\omega_1 = V_1/R$  en la parte exenta de rozamientos de una superficie horizontal. Más allá del punto  $A$ , cambia la superficie de manera que a la derecha de  $A$  el coeficiente de rozamiento es  $\mu$  (véase fig. 12-18).

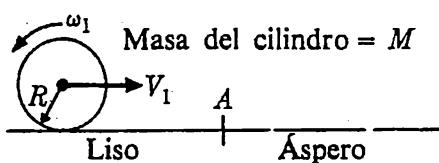


Figura 12-18

Una vez haya pasado de  $A$  el cilindro, deslizará primeramente sobre el plano áspero, pero acabará rodando sin deslizar. ¿En qué punto empezará a rodar sin deslizar el cilindro y cuál será la velocidad correspondiente del centro de masa?

La única fuerza que se ejerce sobre el cuerpo en la dirección del movimiento es la fuerza de contacto y en consecuencia, su línea de acción está en el plano. Por tanto, el momento cinético del cilindro respecto a un punto de referencia del plano, permanecerá constante durante todo el movimiento.

El momento cinético del cilindro tomado respecto a un punto cualquiera del plano, por ejemplo el  $A$ , es

$$L = MV_1 R - I_0 \omega_1 = MV_1 R \left( 1 - \frac{k_0^2}{R^2} \right)$$

que es la suma del momento cinético del centro de masa y del momento cinético respecto al centro de masa. Hemos introducido  $\omega_1 = V_1/R$ , según especifican las condiciones iniciales del problema.

Cuando el cuerpo rueda sin deslizar, la relación entre las velocidades angular y de traslación es  $V_2 = \omega R$ , y el momento cinético es

$$L' = MV_2 R + I_0 \omega = MV_2 R \left( 1 + \frac{k_0^2}{R^2} \right)$$

Igualando  $L$  y  $L'$ , tenemos

$$V_2 = \frac{1 - k_0^2/R^2}{1 + k_0^2/R^2} V_1 = \frac{1/2}{3/2} V_1 = \frac{1}{3} V_1$$

La velocidad final es un tercio de la inicial.

**12-4 Rotación en torno a un eje fijo. Péndulo.** Existen muchos ejemplos importantes de movimiento en los cuales el eje de rotación es fijo. Por tanto, estudiaremos este problema con cierto detalle.

*Teorema de Steiner.* En primer lugar, estudiaremos cómo dependen el momento cinético y la energía cinética de un cuerpo rígido, de la situación del eje fijo de rotación. Si es  $\omega$ , la velocidad angular del cuerpo y el eje de rotación pasa por el centro de masa, hemos visto que el momento cinético es  $I_0 \omega$  y que la energía cinética es  $I_0 \omega^2/2$ , donde  $I_0$  es el momento de inercia respecto al eje que pasa por el centro de masa. En este caso, el centro de masa carece de energía cinética de traslación. En cambio, si el cuerpo gira alrededor de otro eje paralelo al anterior y separado de él una distancia  $a$ , el centro de masa tendría una velocidad  $V = a\omega$  (fig. 12-19). El cuerpo giraría también con la velocidad angular  $\omega$ , y la energía cinética total sería

$$E = \frac{MV^2}{2} + I_0 \frac{\omega^2}{2} = (I_0 + Ma^2) \frac{\omega^2}{2} \quad (12-13)$$

Análogamente, el momento cinético total del cuerpo es la suma del momento cinético de spin  $L^* = I_0 \omega$  y del momento cinético orbital  $MVa = Ma^2 \omega$ . Luego, obtenemos

$$L = MVa + L^* = (I_0 + Ma^2) \omega \quad (12-14)$$

Es evidente que el momento cinético y la energía cinética también pueden expresarse en la forma  $I\omega$  e  $I\omega^2/2$ , donde  $I = \int r^2 dm$  es el momento de inercia respecto al nuevo eje de rotación. Comparando con la expresión dada en las ecuaciones (12-13) y (12-14), vemos que el momento de inercia respecto a un eje paralelo a otro que pase por el centro de masa y separado de él una distancia  $a$ , está relacionado con  $I_0$  de la manera siguiente:

$$I = I_0 + Ma^2 \quad (12-15)$$

A esta relación se la conoce con el nombre de *teorema de Steiner*.

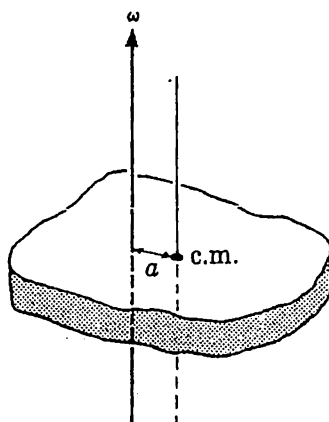


Figura 12-19

Desde luego, esta misma relación se habría podido obtener directamente por integración, a partir de la definición de momento de inercia. En la figura 12-20 se representa por  $R$  la distancia de un elemento de masa  $dm$  al eje (normal al papel) que pasa por el centro de masa, y por  $r$  la distancia al eje paralelo al anterior y que pasa por  $P$ . Por definición, los momentos de inercia respecto a los ejes paralelos que pasan por  $O$  y  $P$  son, respectivamente,  $I_0 = \int R^2 dm$  e  $I = \int r^2 dm$ . Por el teorema del coseno,  $r^2 = R^2 + a^2 - 2aR \cos \theta$ , y la integral  $\int r^2 dm$  contendrá tres términos

$$I = \int R^2 dm + a^2 \int dm - 2a \int R \cos \theta dm = I_0 + Ma^2 - 0$$

El primer término es el momento de inercia  $I_0$  respecto al eje que pasa por el centro de masa. El segundo término es  $Ma^2$  porque  $\int dm$  es la masa  $M$  del cuerpo rígido. Observamos que  $R \cos \theta$  es la coordenada  $x$  de  $dm$  respecto al sistema de coordenadas de origen en el centro de masa y tenemos  $\int x^* dm = 0$  (cap. 11), con lo que  $I = I_0 + Ma^2$  como antes.

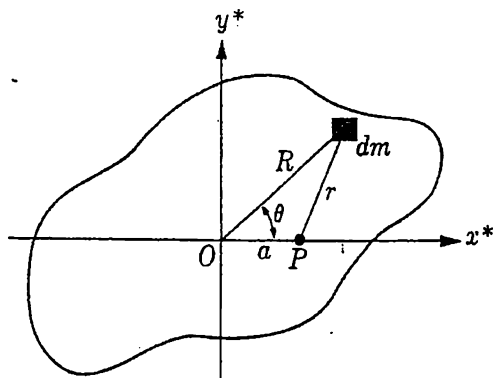


Fig. 12-20. Teorema de Steiner:  
 $I = I_0 + Ma^2$ .

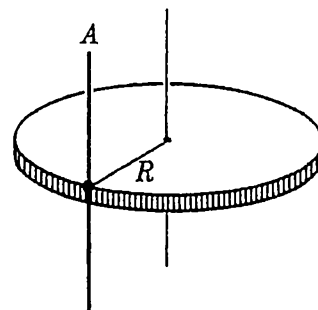


Fig. 12-21. El momento de inercia respecto a un eje que pase por un punto de la periferia de un disco uniforme de radio  $R$  y normal a él es  $I_a = \frac{3}{2}MR^2$ .

**EJEMPLO.** Determinar el momento de inercia de un disco circular de radio  $R$  respecto a un eje  $A$  normal a él y que pase por un punto de su periferia, según se indica en la figura 12-21.

El momento de inercia del disco respecto a un eje paralelo al anterior y que pase por el centro de masa, es

$$I_0 = \frac{MR^2}{2}$$

La distancia que separa los dos ejes mencionados es ahora  $a = R$ , y obtenemos

$$I_a = I_0 + Ma^2 = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

**EJEMPLO.** Determinar el momento de inercia de una varilla delgada, recta y uniforme, de longitud  $L$  y masa  $M$ , respecto a un eje perpendicular a ella y que pase por un extremo.

El momento de inercia respecto a un eje perpendicular a la varilla y que pase por su centro de masa es  $ML^2/12$ . El eje considerado está separado de este otro una distancia  $a = L/2$ . Por tanto tenemos

$$I = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{3}$$

**Péndulo.** El movimiento de un péndulo constituye un ejemplo conocido de movimiento de un cuerpo rígido y en él intervienen muchas de las características fundamentales estudiadas del movimiento. En el capítulo 8 se estudió el caso ideal del péndulo matemático, en el cual toda la masa estaba concentrada en un punto. Estudiaremos ahora el péndulo físico, el cual presenta una distribución continua de masa. En la figura 12-22 puede verse un ejemplo típico de dicho péndulo físico. El eje fijo de rotación es horizontal y lo representaremos por  $A$ .

El centro de masa del péndulo se halla a una distancia  $a$  de  $A$ . El desplazamiento del péndulo respecto a su posición de equilibrio está medido por el ángulo  $\theta$ . Sobre el péndulo se ejercen dos fuerzas exteriores, la de la gravedad y la de contacto por parte del eje  $A$ . Si consideramos el momento respecto  $A$ , sólo contribuye la fuerza de la gravedad y el momento es  $-Mga \sin \theta$ . Si es  $I_a$  el momento de inercia del péndulo respecto al eje  $A$ , la velocidad de variación del momento cinético respecto  $A$  será  $I_a (d\omega/dt) = I_a (d^2\theta/dt^2)$  y obtenemos

$$I_a \frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mga \sin \theta \quad (12-16)$$

Como en el caso del péndulo simple, limitaremos nuestras consideraciones a casos en los que el ángulo  $\theta$  sea siempre pequeño. Entonces, podremos sustituir  $\sin \theta$  por  $\theta$ , y tendremos

$$I_a \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mga\theta$$

Como antes, esta ecuación describe un movimiento armónico y la solución tiene la forma

$$\theta = \theta_m \sin \omega_0 t$$

donde la frecuencia característica de oscilación es

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Mga}{I_a}} = \sqrt{\frac{ga}{k_a^2}} \quad (12-17)$$

y el período es

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_a}{Mga}} = 2\pi \sqrt{\frac{k_a^2}{ga}} \quad (12-18)$$

Donde  $k_a$  es el radio de giro del cuerpo rígido respecto al eje  $A$ . (Recordemos que el radio de giro de un cuerpo rígido de masa  $M$  y momento de inercia  $I_a$  define la distancia al eje a la cual habría que colocar una masa puntual  $M$  para que tuviera el mismo momento de inercia  $I_a$ . El radio de giro está, pues, definido por  $Mk_a^2 = I_a$ .) Obsérvese que para un punto material situado a una distancia  $a$  del eje fijo, el momento de inercia es  $I_a = Ma^2$  y el radio de giro será, precisamente,  $a$ .

**EJEMPLO 1.** ¿Cuál es el período de oscilación de una barra uniforme que oscile en torno a un eje perpendicular a ella y que pase por su extremo superior? La longitud de la barra es  $L = 1$  m. El momento de inercia de la barra respecto al eje  $A$  es  $I_a =$

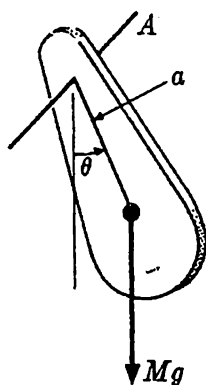


Fig. 12-22. Péndulo que gira en torno a un eje horizontal fijo.



$ML^2/3$ . La distancia al centro de masa es  $a = L/2 = 0,5$  m. El período es, pues,

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L^2 \cdot 2}{3 \cdot g \cdot L}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

Como  $L = 1$  m, obtenemos  $T_0 \simeq 1,6$  s.

**EJEMPLO 2.** Consideremos el péndulo del ejemplo anterior. Supongamos que se puede variar la posición del eje de rotación. ¿Dónde deberíamos colocarlo para que el período del péndulo sea mínimo?

Supongamos el eje de rotación  $A$  situado a una distancia  $x$  del centro del péndulo, según se indica en la figura 12-23. En este caso, el momento de inercia respecto  $A$  será

$$I_a = I_0 + Mx^2 = M(k_0^2 + x^2)$$

donde  $k$  es el radio de giro respecto a un eje paralelo a  $A$  y que pase por el centro de masa. La distancia del centro de masa al eje  $A$  es  $x$ , y el período será, por tanto,

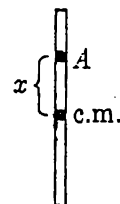


Figura 12-23

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{k_0^2 + x^2}{gx}}$$

El período presenta un mínimo cuando  $(k_0^2 + x^2)/x = k_0^2/x + x$  es mínimo. La derivada de esta función es  $-k_0^2/x^2 + 1$ , que es nula cuando  $x = \pm k_0$ . El eje de rotación para el cual es mínimo el período está situado a una distancia  $k_0$  del centro de masa.

**EJEMPLO 3.** *Longitud equivalente de un péndulo.* Sabemos que el péndulo simple tiene un período  $T_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$  donde  $L$  es la distancia que separa el punto de suspensión de la masa puntual. Definiremos la longitud reducida, o equivalente  $L_{eq}$ , de un péndulo físico, como la longitud de un péndulo simple que tenga igual período que el péndulo físico. El péndulo físico está caracterizado por su radio de giro  $k_a$  y la distancia  $a$  del centro de masa al eje. ¿Qué relación existe entre  $L_{eq}$ ,  $k_a$ , y  $a$ ?

El período del péndulo físico es  $T_0 = 2\pi\sqrt{k_a^2/ga}$ , y la longitud reducida o equivalente está definida por  $T_0 = 2\pi\sqrt{L_{eq}/g}$ . La longitud reducida  $L_{eq}$  es, pues,

$$L_{eq} = \frac{k_a^2}{a}$$

o, de otra manera, podemos decir que el radio de giro es la media geométrica de la longitud reducida y la distancia del centro de masa al eje.

Si introducimos el radio de giro  $k_0 = \sqrt{I_0/M}$ , respecto a un eje paralelo al de suspensión y que pase por el centro de masa, por el teorema de Steiner tenemos  $I_a = I_0 + Ma^2$ . Luego,  $k_a^2 = k_0^2 + a^2$ , y tenemos

$$L_{eq} = a + \frac{k_0^2}{a} = a + b$$

donde

$$b = \frac{k_0^2}{a} \quad \text{o sea} \quad ab = k_0^2$$

cantidades representadas en la figura 12-24. La longitud  $L_{eq}$  define un punto  $B$  que se halla a una distancia  $b = k_0^2/a$  del centro de masa. Si se hace oscilar el cuerpo alrededor de un eje que pase por  $B$ , el período de oscilación será el mismo que el obtenido para la oscilación en torno a un eje paralelo que pase por  $A$ .

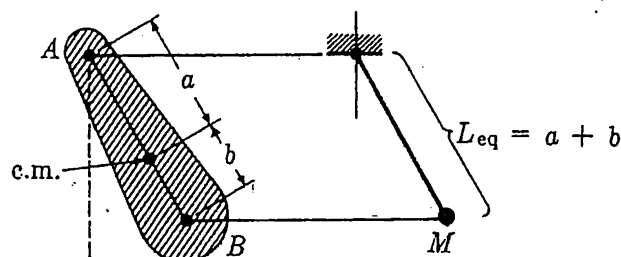


Figura 12-24

Los puntos  $A$  y  $B$  tienen la interesante propiedad de que la media geométrica de sus distancias al centro de masa es igual al radio de giro respecto al eje que pasa por el centro de masa. El punto  $B$  es el centro de percusión del cuerpo rígido respecto al eje  $A$ . Correspondientemente, el punto  $A$  es el centro de percusión respecto al eje  $B$ . Así pues, se ha demostrado que la longitud reducida del péndulo, ya esté suspendido por  $A$  o por  $B$ , es la distancia entre  $A$  y  $B$ ,  $L_{eq} = a + b$ .

Fuerza en el eje de rotación. En el análisis anterior no ha figurado la fuerza que se ejerce sobre el péndulo en el eje de rotación, ya que se ha utilizado el momento respecto a dicho eje. Para obtener la fuerza de contacto, podremos siempre utilizar las ecuaciones generales del movimiento que rigen la traslación del centro de masa y la rotación en torno al centro de masa. La fuerza de contacto que se ejerce sobre el péndulo en el eje de rotación, puede descomponerse en dos componentes,  $F_r$  y  $F_\theta$ , según se indica en la figura 12-25. Cuando consideramos

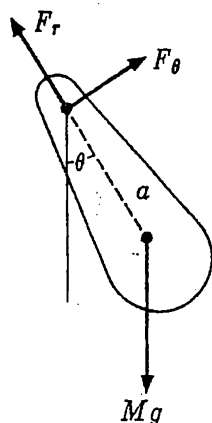


Fig. 12-25. Fuerzas que se ejercen sobre un péndulo.

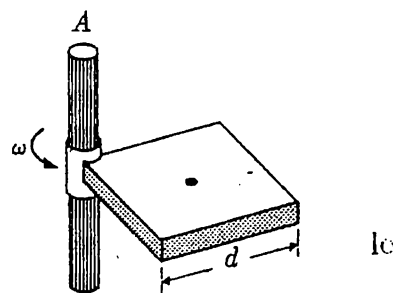


Figura 12-26

las fuerzas en las direcciones radial y transversa, y las variaciones correspondientes de cantidad de movimiento en dichas direcciones, las ecuaciones del movimiento del centro de masa son

$$F_{\theta} - Mg \sin \theta = M \frac{dv_{\theta}}{dt} = Ma \frac{d\omega}{dt}$$

y

$$F_r - Mg \cos \theta = Ma\omega^2 \quad (12-19)$$

puesto que  $a\omega^2$  es la aceleración radial del centro de masa.

La rotación en torno al centro de masa está descrita por la ecuación

$$I_0 \frac{d\omega}{dt} = -F_{\theta}a \quad (12-20)$$

Ahora, con  $\omega = d\theta/dt$ , tenemos tres ecuaciones a partir de las cuales, al menos en principio, podemos determinar las tres cantidades desconocidas  $\theta$ ,  $F_{\theta}$ , y  $F_r$  en función del tiempo.

**EJEMPLO 1.** Como ejemplo sencillo de rotación alrededor de un eje fijo, consideremos la placa cuadrada que gira alrededor de un eje vertical  $A$  que pasa por un vértice de la placa, como se indica en la figura 12-26. La velocidad angular de la placa es  $\omega$ , su masa es  $M$  y la longitud de su lado  $d$ . ¿Qué fuerza ejerce el eje sobre la placa?

El centro de masa de la placa recorre una circunferencia de radio  $d/\sqrt{2}$ . En consecuencia, la fuerza resultante que se ejerce sobre la placa está dirigida hacia el centro de la circunferencia y la magnitud de la fuerza es

$$F = M\omega^2 r = M\omega^2 \frac{d}{\sqrt{2}}$$

La fuerza de contacto que ejerce el eje es la única fuerza horizontal a que está sometida la placa en la dirección radial, por tanto esta fuerza debe ser  $F$ .

En relación con esto, es interesante estudiar este problema desde un sistema de coordenadas que gire con el plano con velocidad angular  $\omega$ . En este sistema de coordenadas, el plano está en reposo bajo la acción de la fuerza de interacción de contacto en el eje y de la fuerza de inercia. La fuerza de inercia que se ejerce sobre un elemento de masa cuyo vector de posición es  $\mathbf{r}$  será  $\omega^2 \mathbf{r} dm$  (véase cap. 11) y la fuerza de inercia total es, entonces,  $\omega^2 \int \mathbf{r} dm = \omega^2 M \mathbf{R}$  donde  $\mathbf{R}$  es el vector de posición del centro de masa. Así pues, si es  $\mathbf{F}$  la fuerza de contacto, tendremos la condición de equilibrio

$$\mathbf{F} + M\omega^2 \mathbf{R} = 0 \text{ o sea } \mathbf{F} = -M\omega^2 \mathbf{R}$$

En el capítulo 13 estudiaremos la rotación de un cuerpo asimétrico, en la cual no existe una fuerza de inercia, sino también un momento de origen inercial.

**EJEMPLO 2.** Una barra delgada de masa  $M$  y longitud  $L$  puede girar libremente en torno a un eje fijo horizontal, tal como se indica en la figura 12-27. Se suelta la barra desde una posición que forma un ángulo  $\theta_0$  con la vertical.

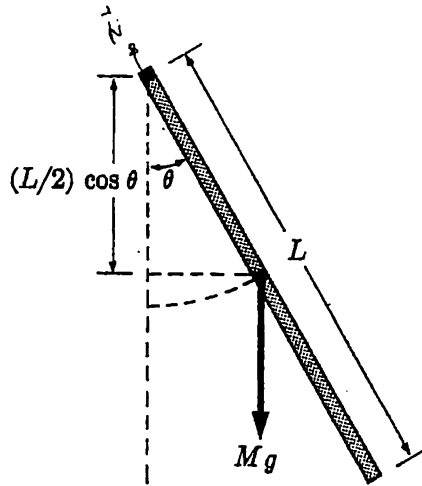


Figura 12-27

(a) ¿Cuál es la velocidad angular de la barra cuando pasa por su posición más baja?

Sobre la barra se ejercen dos fuerzas exteriores: el peso y la fuerza de contacto del eje. Sólo trabaja la primera y el trabajo realizado es  $Mg(L/2)(1 - \cos \theta_0)$ , puesto que el desplazamiento vertical del centro de masa es  $(L/2)(1 - \cos \theta_0)$ . Si es  $\omega$  la velocidad angular de la barra en el punto más bajo, la energía cinética es  $I\omega^2/2$ , donde  $I$  es el momento de inercia de la barra respecto al eje de rotación. Así pues, tenemos

$$\frac{I\omega^2}{2} = Mg \frac{L}{2} (1 - \cos \theta_0)$$

El momento de inercia de la barra respecto al eje de rotación es  $I = ML^2/3$ . Introduciendo este valor en la ecuación anterior, encontramos que

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} (1 - \cos \theta_0)$$

Si se suelta la barra desde la posición horizontal ( $\theta_0 = 90^\circ$ ), obtenemos  $\omega = \sqrt{3g/L}$ .

(b) ¿Cuál es la fuerza de contacto que ejerce el eje sobre la barra cuando pasa por la posición vertical?

El movimiento del centro de masa del cuerpo rígido es exactamente igual que el de un punto material aislado de masa  $M$  sobre el que se ejerzan todas las fuerzas exteriores —en este caso la fuerza de contacto y el peso. El centro de masa recorre un arco de circunferencia y la aceleración del centro de masa en la posición más baja es  $\omega^2 L/2$ , dirigida hacia el eje. Si representamos por  $N$  la fuerza de contacto vertical en el eje, tendremos

$$N - Mg = M\omega^2 \frac{L}{2}$$

con lo que

$$N = Mg \left[ 1 + \frac{3}{2} (1 - \cos \theta_0) \right]$$

**12-5 Equilibrio (estática) de un cuerpo rígido.** Si un cuerpo rígido está en equilibrio, la fuerza *resultante* que se ejerce sobre el cuerpo debe ser nula. Si no lo fuera, su centro de masa estaría acelerado. Análogamente, el *momento* resultante que se ejerce sobre un cuerpo rígido en equilibrio debe ser nulo, pues si no variaría el momento cinético del cuerpo. Evidentemente, el momento deberá ser nulo respecto a cualquier otro punto en reposo del espacio. En otras palabras, las condiciones de equilibrio son

$$\begin{aligned} F &= 0 \quad \text{o sea} \quad F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = 0 \\ \tau &= 0 \quad \text{o sea} \quad \tau_x = 0, \quad \tau_y = 0, \quad \tau_z = 0 \end{aligned} \quad (12-21)$$

Cuando tenemos fuerzas y momentos en tres dimensiones, estas condiciones de equilibrio representan seis ecuaciones a partir de las cuales es posible determinar seis cantidades incógnitas. Cuando las fuerzas son coplanarias, el número de ecuaciones se reduce a tres,

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad \text{y} \quad \tau_z = 0$$

**EJEMPLO.** Se sostiene una barra uniforme de longitud  $L$  y peso  $mg$  mediante dos apoyos exentos de rozamientos, según se indica en la figura 12-28. ¿Cuáles son las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  que ejercen los apoyos sobre la barra? No existen componentes horizontales, ya que los apoyos carecen de rozamiento. Para las componentes verticales  $F_1$  y  $F_2$  de las fuerzas, la condición de equilibrio de que sea nula la fuerza resultante da

$$F_1 + F_2 - mg = 0$$

El momento resultante respecto a un eje *cualquiera* debe ser nulo. Tomemos como eje uno que pase por el punto de contacto del primer apoyo y sea normal al papel. Tenemos

$$-mg \frac{L}{2} + \frac{F_2 3L}{4} = 0$$

Combinando estas dos relaciones y despejando  $F_1$  y  $F_2$ , tenemos

$$F_1 = \frac{mg}{3}, \quad F_2 = \frac{2mg}{3}$$

Supongamos ahora que la barra del ejemplo anterior se apoya en tres puntos, hallándose el tercero a una distancia  $L/4$  del primero. Tendremos entonces

$$F_1 + F_2 + F_3 - mg = 0$$

y

$$F_3 \frac{L}{4} - mg \frac{L}{2} + \frac{F_2 3L}{4} = 0$$

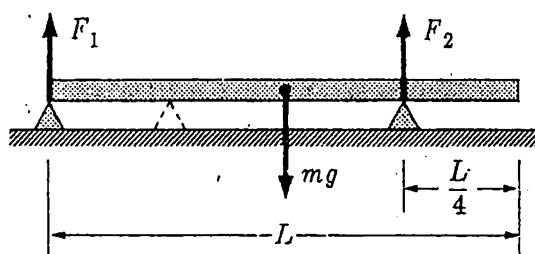


Figura 12-28

Tenemos ahora sólo dos ecuaciones y tres incógnitas,  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$ . El problema no puede resolverse con sólo estas ecuaciones. Esto puede verse físicamente con el siguiente razonamiento. Sabemos que los apoyos 1 y 2 soportan la barra. Si suponemos que ahora se introduce un tercer apoyo 3 con un punto de contacto mullido por un pequeño resorte imaginario o un pedazo de fieltro, es evidente que la carga soportada por 3 dependerá de lo duro que sea el apoyo de 3 contra la barra. Si es suficientemente duro, de manera que el apoyo 1 no soporte carga, cada uno de los soportes 2 y 3 soportará  $mg/2$ . La carga soportada por 3 podrá, por tanto, tener un valor cualquiera comprendido entre 0 y  $mg/2$ . Los problemas de este tipo se dice que son indeterminados estáticamente o *hiperestáticos*.

En la práctica, cuando hay más de dos apoyos, la distribución de la carga está determinada por las propiedades elásticas de la barra. La hipótesis de cuerpo rígido ya no es suficiente para la solución del problema y hay que complementar las ecuaciones de equilibrio con otras condiciones en las que intervengan las propiedades elásticas de la barra.

**EJEMPLO 1.** Las ruedas de una vagoneta están separadas una distancia  $d$  y el centro de masa se halla a una altura  $h$  sobre el suelo. La vagoneta se halla en reposo en una pendiente de ángulo  $\theta$  y el coeficiente de rozamiento estático entre las ruedas y la superficie de la pendiente es  $\mu$ . ¿Cuál puede ser la pendiente para que la vagoneta no vuelque ni deslice?

Sobre la vagoneta se ejercen tres fuerzas: el peso y las dos fuerzas de contacto sobre las ruedas. Se desconocen tanto las direcciones como las magnitudes de las fuerzas de contacto. En consecuencia, tenemos cuatro componentes desconocidas que designaremos por  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $f_1$  y  $f_2$  en la figura 12-29. Como sólo tenemos tres ecuaciones de equilibrio, este problema es normalmente hiperestático en el sentido de que no pueden determinarse por separado  $f_1$  y  $f_2$ . Sin embargo, ahora sólo nos interesa la condición en que la vagoneta está a punto de volcar o de deslizar. En estos casos, entre las variables hay impuestas relaciones adicionales. Cuando la vagoneta está a punto de deslizar, las fuerzas de rozamiento son máximas en ambas ruedas y, según sabemos, están relacionadas en forma sencilla con las componentes normales al plano, de las fuerzas. Si los símbolos  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $f_1$  y  $f_2$  representan las fuerzas que se obtienen cuando la vagoneta está a punto de deslizar, tenemos

$$f_1 = \mu F_1 \quad \text{y} \quad f_2 = \mu F_2$$

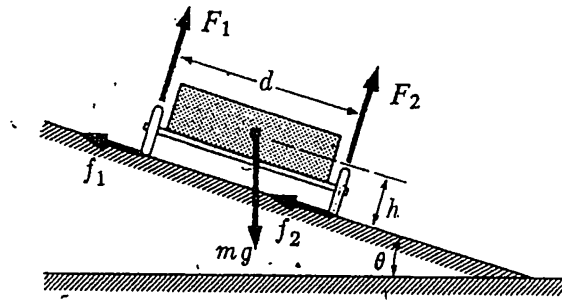


Figura 12-29

Si combinamos estas relaciones con las condiciones generales de equilibrio,

$$F_x = -f_1 - f_2 + mg \sin \theta_1 = 0$$

$$F_y = F_1 + F_2 - mg \cos \theta_1 = 0$$

obtenemos  $\mu mg \cos \theta_1 = mg \sin \theta_1$  o sea

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \mu$$

En otras palabras, para evitar el deslizamiento, debe ser  $\theta < \theta_1$ .

Cuando está a punto de volcar la vagoneta, las fuerzas  $F_1$  y  $f_1$  deben ser nulas, ya que se rompe el contacto entre la rueda superior y el plano. Entonces, si consideramos el momento respecto al punto de contacto de la rueda inferior, vemos que para que el momento resultante sea nulo debe ser nulo el brazo de palanca del peso respecto a este punto. Esto ocurrirá cuando el ángulo de inclinación del plano tenga el valor dado por

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{d}{2h}$$

y se evitará el vuelco si  $\theta < \theta_2$ . Si  $\theta_1 = \theta_2$ , se deduce que el vuelco y el deslizamiento se producirán simultáneamente cuando  $\mu = d/2h$ . Si es  $\mu$  menor que  $d/2h$ , se producirá el deslizamiento antes que el vuelco al ir aumentando el ángulo  $\theta$ . Lo contrario ocurrirá si  $\mu$  es mayor que  $d/2h$ .

**EJEMPLO 2.** Como ejemplo de problema en el que las fuerzas no son todas coplanares, consideremos el equilibrio de una barra rígida sometida a la acción de tres fuerzas, como se indica en la figura 12-30. La barra está soportada por su extremo superior  $A$  mediante un pasador en torno al cual puede girar libremente. La longitud de la barra es  $L = 2$  m. Las fuerzas exteriores que se ejercen sobre la barra son  $F_1$ , de componentes  $F_{1x} = 0$ ,  $F_{1y} = 3$  kp y  $F_{1z} = 1$  kp, aplicada al extremo inferior de la barra;  $F_2$ , de componentes  $F_{2x} = -4$  kp y  $F_{2y} = -2$  kp; y  $F_3$  que está aplicada perpendicularmente a la barra en un punto  $P$  situado a  $1/2$  m del extremo superior. ¿Cuáles serán la magnitud, dirección y sentido de  $F_3$  que mantengan la barra en equilibrio?

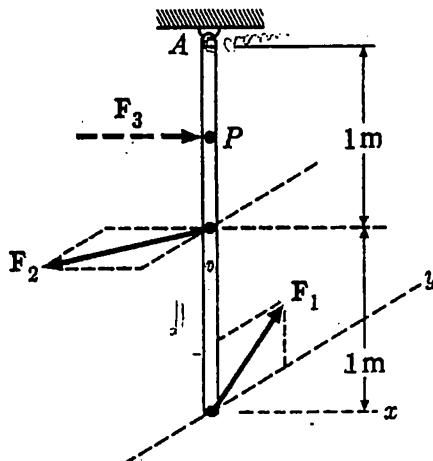


Figura 12-30

Para que la barra esté en equilibrio, debe ser nulo el momento resultante respecto a  $A$  o a cualquier otro punto fijo. El momento debido a  $F_1$  y  $F_2$  tiene por componentes

$$\tau_x = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 4 \text{ m} \cdot \text{kp}, \quad \tau_y = 4 \cdot 1 = 4 \text{ m} \cdot \text{kp}$$

En consecuencia, las componentes del momento de  $F_3$  deben ser  $\tau_{3x} = -4 \text{ m} \cdot \text{kp}$  y  $\tau_{3y} = -4 \text{ m} \cdot \text{kp}$ . La magnitud del momento es  $\tau_3 = 4\sqrt{2}$  y la magnitud correspondiente de la fuerza será, pues,  $4\sqrt{2}/\frac{1}{2} = 8\sqrt{2} \text{ kp}$ . Las componentes de la fuerza son  $F_{3x} = +8 \text{ kp}$  y  $F_{3y} = -8 \text{ kp}$ . La fuerza que se ejerce en  $A$  sobre la barra deberá, pues, tener por componentes

$$F_{ax} = -(0 - 4 + 8) = -4 \text{ kp}$$

$$F_{ay} = -(3 - 2 - 8) = +7 \text{ kp}$$

$$F_{az} = -(1 + 0 + 0) = -1 \text{ kp}$$

**EJEMPLO 3.** Un carrete, de radio interior  $r$  y radio exterior  $R$  se halla sobre un suelo áspero. Se tira de él con una fuerza  $F$  mediante un hilo arrollado en torno a su cilindro interior (fig. 12-31). Se mantiene el hilo formando un ángulo  $\theta$  con la horizontal. Se observa que hay un ángulo crítico  $\theta_0$  tal que para  $\theta < \theta_0$  el carrete rueda sin deslizar en el sentido del cual se tira de él, y para  $\theta > \theta_0$  el carrete rueda sin deslizar, en sentido contrario. ¿Cuál es el valor del ángulo crítico  $\theta_0$ ?

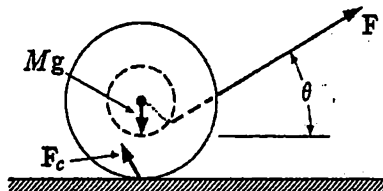


Figura 12-31



El carrito se halla sometido a tres fuerzas: la tensión  $F$  del hilo, el peso  $Mg$  y la fuerza de contacto  $F_c$  que tiene componentes horizontal y vertical  $F_{cx}$  y  $F_{cy}$ .

Las ecuaciones que expresan el movimiento de traslación del centro de masa y la rotación en torno a éste son:

$$(a) \quad \Sigma F_y = F_{cy} + F \sin \theta - Mg = 0$$

$$(b) \quad \Sigma F_x = F \cos \theta + F_{cx} = Ma_x = MR \frac{d\omega}{dt}$$

$$(c) \quad \Sigma \tau = -F_{cx}R - Fr = I_o \frac{d\omega}{dt}$$

[Nota: En (b) se presupone que  $\omega$  es positiva en el sentido de las agujas del reloj. ¿Cómo? ¿Por qué los momentos aparecen en (c) con signo menos?]

Eliminando la fuerza  $F_{cx}$  se tiene

$$\frac{d\omega}{dt} = F \frac{R \cos \theta - r}{I_o + MR^2}$$

y se deduce que  $d\omega/dt > 0$  (movimiento hacia adelante) cuando  $\cos \theta > r/R$ , y  $d\omega/dt < 0$  (movimiento hacia atrás) cuando  $\cos \theta < r/R$ . El ángulo crítico correspondiente a  $d\omega/dt = 0$  es

$$\cos \theta_0 = \frac{r}{R}$$

## PROBLEMAS

12-1. Consideremos dos puntos materiales que se muevan en el espacio y que estén unidos por un resorte elástico. ¿Cuántas coordenadas se precisan para una descripción unívoca de las posiciones de estos puntos materiales? Si se le diera rigidez bruscamente al resorte, ¿cuántas coordenadas se precisarían para especificar sus posiciones? Compárese el resultado con las consideraciones generales acerca del número de grados de libertad de un cuerpo rígido.

12-2. Consideremos un cuerpo que gire en un plano alrededor de un eje fijo con velocidad angular  $\omega$ , de manera que todos los puntos siguen trayectorias circulares. Consideremos un punto arbitra-

rio  $P$  e imaginemos un eje que pase por este punto y sea paralelo al eje fijo. Describir el movimiento *respecto al eje que pasa por  $P$* .

12-3. Consideremos la Tierra y la Luna como sistema aislado de cuerpos que sólo se ejercen interacciones entre sí. Su centro de masa permanece en reposo. Si prescindimos del movimiento de rotación terrestre, ¿qué clase de movimiento tendrá la Tierra respecto al centro de masa del sistema Tierra-Luna? ¿Cuál es la velocidad del centro de la Tierra en este movimiento? ¿Cuál es la velocidad del Polo Norte? Los valores numéricos de la distancia Tierra-Luna, etc., están consignados en el apéndice.

12-4. Una barra recta de masa  $M$  y longitud  $L$  se halla sobre una mesa horizontal con su centro de masa en  $x = 0$ ,  $y = 0$  y está inclinada un ángulo  $\theta$  respecto al semieje  $+x$ . Se le comunica una traslación de longitud  $\Delta X$  en la dirección y sentido de las  $x$  positivas y luego una rotación de ángulo  $\Delta\theta$  alrededor del centro de masa. (a) ¿Cuáles son, al final de este movimiento, las coordenadas  $x$  e  $y$  de un punto  $P$  de la barra, que tenía inicialmente las coordenadas  $x_0, y_0$ ? (b) Determinar  $x - x_0$  e  $y - y_0$  en función de  $\Delta X$  y  $\Delta\theta$ . (c) Si se realizan simultáneamente estos desplazamientos durante el tiempo  $\Delta t$ , hallar las componentes  $\Delta x/\Delta t$  y  $\Delta y/\Delta t$  de la velocidad media de  $P$ . Demostrar que la velocidad instantánea del punto  $P$  ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) está dada por

$$v_x = V_x - y_0\omega, \quad v_y = x_0\omega$$

donde  $V_x = dX/dt$  es la velocidad del centro de masa.

12-5. Una varilla delgada de longitud  $d = 2$  m se halla alineada inicialmente con el eje  $y$ . Representemos por  $A$  el extremo superior de la varilla y por  $B$  el inferior. ¿Cuáles son la velocidad del centro de masa y la velocidad angular del cuerpo en torno a su centro de masa, si (instantáneamente), (a)  $v_a = v_b = 3$  m/s y están dirigidas a lo largo del eje  $x$ ?

(b)  $v_a = 3$  m/s a lo largo del eje  $x$ ,  $v_b = 0$ ? (c)  $v_a = 3$  m/s a lo largo del eje  $x$ ,  $v_b = 1$  m/s a lo largo del eje  $x$ ? (d)  $v_{ax} = 4$  m/s,  $v_{ay} = 3$  m/s,  $v_{bx} = 2$  m/s,  $v_{by} = 3$  m/s?

12-6. La varilla del problema anterior tiene una masa de 2 kg. (a) ¿Cuáles son la cantidad de movimiento y el momento cinético en las condiciones de la parte (d)? (b) Si la varilla se moviera solamente bajo la acción de la gravedad, ¿cuál sería su movimiento subsiguiente? (c) ¿Cuántas vueltas completas dará la varilla antes de que su centro de masa vuelva a la altura inicial?

12-7. Explicar por qué la elección del punto de aplicación de una fuerza exterior sobre un cuerpo rígido no afecta al movimiento de su centro de masa.

12-8. Sobre una superficie horizontal exenta de rozamientos se halla una placa cuadrada de lado  $d$  y masa  $m$ . ¿Es posible, en cada uno de los casos representados en la figura 12-32, reducir el sistema de fuerzas a una fuerza única? Reducir el sistema, en cada caso, a una resultante que pase por el centro de masa y a un par, que produzcan el mismo movimiento que el sistema de fuerzas original.

12-9. Nos referimos al problema 12-8. En cada caso, ¿cuál es la aceleración instantánea del punto  $P$ ?

12-10. Dos barras delgadas unifor-

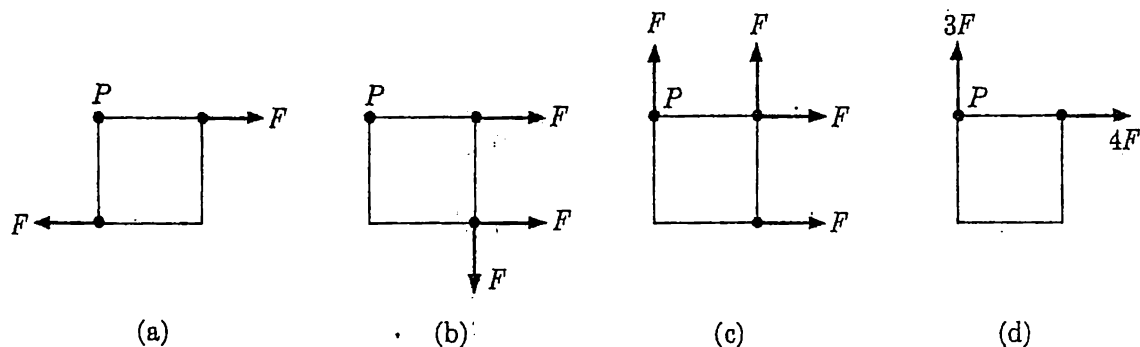


Figura 12-32

mes de longitudes iguales,  $l = 0,5$  m, una de 4 kg y la otra de 12 kg, se sueldan formando una barra de 1 metro. Consideremos ahora el momento de inercia de esta barra compuesta respecto a un eje perpendicular a ella. Determinar la posición del eje respecto al cual el momento de inercia tenga valor mínimo. Determinar este valor.

12-11. Demostrar que para una placa uniforme plana cualquiera tenemos  $I_0 = I_x + I_y$ , donde  $I_0$  es el momento de inercia respecto al eje normal a la placa que pasa por el origen del sistema  $xy$ , mientras que  $I_x$  e  $I_y$  son los momentos de inercia respecto a los ejes  $x$  e  $y$ , respectivamente.

12-12. Comprobar las expresiones para los momentos de inercia de una esfera y de un cubo dadas en la figura 12-8 del texto.

12-13. Sobre una barra uniforme situada sobre una mesa horizontal, se ejerce una fuerza horizontal perpendicular a la barra en un extremo de ésta. La barra parte del reposo. La longitud de la barra es  $L$  y su masa es  $M$ . ¿Qué punto de la barra tiene aceleración inicial nula?

12-14. Se tira de un disco cilíndrico uniforme de radio  $R$  sobre una superficie horizontal (sin rozamiento) mediante un hilo arrollado sobre el cilindro. El otro extremo del hilo está unido a un cuerpo de igual masa  $M$  que el cilindro. El hilo pasa por una polea, según se indica en la figura 12-33. (a) Determinar la tensión del hilo mientras está en movimiento el sistema. (b) Si el sistema parte del reposo, ¿cuál es la velocidad del disco cuando su centro haya recorrido una distancia  $5R$ ?

12-15. Dos cilindros homogéneos del mismo material giran con la misma velocidad angular alrededor de sus ejes de revolución. ¿Cuál es el cociente entre

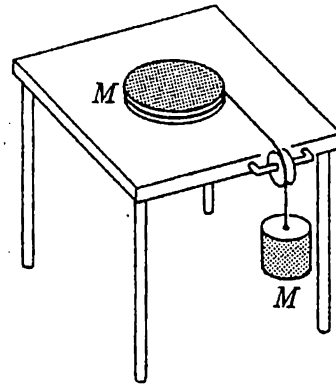


Figura 12-33

sus energías cinéticas si el radio de un cilindro es doble que el del otro?

12-16. Una placa circular delgada gira alrededor de un eje normal a la placa y que pasa por su centro de masa. ¿Cuál debe ser la velocidad angular para que la energía cinética de la placa sea suficiente para elevar el peso de la placa hasta una altura igual a su diámetro  $2R$ ?

12-17. En los experimentos de choque de los capítulos 2 y 3 se utilizaban carritos de masa  $M$  que rodaban sobre cuatro ruedas de masa  $m$  cada una de ellas y de radio de giro  $k$ . (Se supone siempre que las ruedas giran.) (a) ¿Qué velocidad alcanzaría uno de dichos carritos si, tras partir del reposo, se ejerciera sobre él una fuerza  $F$  a lo largo de la vía durante un tiempo  $\Delta t$ ? ¿Cuál sería la masa efectiva del carrito? (b) ¿Qué velocidad alcanzaría dicho carrito si, tras partir del reposo, se ejerciera sobre él una fuerza  $F$  a lo largo de una distancia  $x$  sobre la vía? ¿Cuál sería ahora la masa efectiva del carrito?

12-18. Se mantiene una barra recta uniforme de masa  $m$  y longitud  $l$  inclinada un ángulo  $\theta_0$  con su extremo inferior apoyado en un plano liso (rozamiento despreciable). Se suelta la barra a partir de esta posición. (a) Demostrar que la

barra choca de plano contra la superficie plana, es decir, que el extremo inferior se halla siempre en contacto con ella. (b) Determinar la velocidad angular en función del ángulo de inclinación. (c) Determinar la velocidad del centro de masa inmediatamente antes de que la barra choque contra el suelo. (*Sugerencia:* Utilícese el principio de conservación de la energía mecánica total.)

- 12-19. En la figura 12-34 pueden verse dos cilindros homogéneos de radio  $R$  y masa  $M$  cada uno. El cilindro superior, puede girar libremente sostenido por un eje horizontal que pasa por su centro. Se arroja una cuerda en torno a ambos cilindros, y se deja caer el de abajo. Entre la cuerda y los cilindros hay suficiente rozamiento para que ambos puedan girar sin deslizamiento. (a) ¿Cuál es la aceleración del centro de masa del cilindro inferior? (b) ¿Cuál es la tensión de la cuerda? (c) ¿Cuál es la velocidad del cilindro inferior cuando ha descendido una distancia  $10 R$ ?

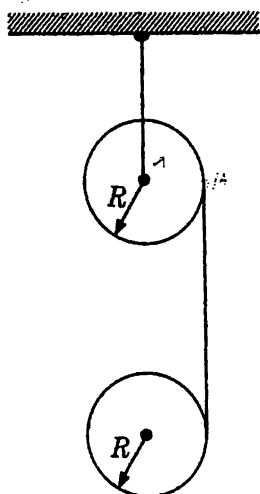


Figura 12-34

- 12-20. Un cubo uniforme de masa  $m$  desliza por un plano horizontal bajo la acción de una fuerza constante comu-

nicada por una cuerda horizontal. Ésta está sujeta al centro de la cara superior del cubo, según se indica en la figura 12-35. (a) El coeficiente de rozamiento es nulo. ¿A qué valor de la fuerza empezará a volcar el cubo? (b) Supongamos que el coeficiente de rozamiento por deslizamiento es  $\mu$ . ¿Cuál es ahora el valor de la fuerza para el que empezará a volcar el cubo?

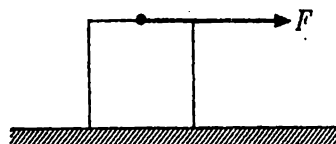


Figura 12-35

- 12-21. Una barra  $A-B$  de masa  $M$  y longitud  $l$  está suspendida de un pasador mediante un cuerpo rígido  $OA$  de masa despreciable, según se indica en la figura 12-36. La distancia del pasador al centro de la barra es  $R$ . Se suelta la barra e inicia su oscilación hacia una posición vertical (posición 1), en que su centro de masa tiene una velocidad  $V$ . En este instante queda suelta la barra. Gira  $1/4$  de vuelta de manera que al alcanzar el suelo (posición 2), está horizontal. Cuando se suelta la barra, ¿cuál es la altura  $h$  de

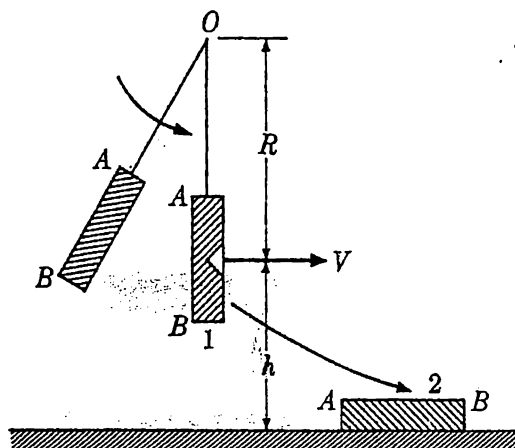


Figura 12-36

la barra sobre el suelo? (Indicar el sentido de rotación de la barra.)

12-22. (a) Supongamos que a un cuerpo rígido se le aplica un impulso. Indicar uno o varios puntos respecto a los cuales no varía el momento cinético total del cuerpo a causa del impulso. (b) Si no es instantáneo el impulso aplicado a un cuerpo, sino que dura cierto tiempo ¿puede expresarse generalmente la cesión de momento cinético en función del impulso? Discusión.

12-23. Un cuerpo que puede moverse libremente sobre un plano, se halla en reposo cuando se le aplica un impulso instantáneo. ¿Es posible que exista un punto del cuerpo que tenga velocidad nula inmediatamente después del impulso? Si es así, estudiar cómo varía este punto al variar del punto de aplicación del impulso.

12-24. Una barra recta y homogénea de longitud  $L = 3$  m y masa  $M = 4$  kg se halla en reposo sobre una superficie horizontal. Se aplica un impulso horizontal instantáneo perpendicularmente a la barra. ¿A qué distancia del centro de la barra habría que aplicar el impulso para hacer iguales las energías cinéticas de traslación y rotación?

12-25. Cuando chocan dos cuerpos rígidos, el momento cinético total de los cuerpos permanece constante. ¿Significa esto que las fuerzas de contacto entre los cuerpos pasan por su centro de masa? Discusión.

12-26. ¿Es posible, en un choque entre cuerpos rígidos, que pueda variar el momento cinético de rotación (spin) de un cuerpo, sin que cambie el momento cinético de rotación del otro?

12-27. ¿Es posible, en un choque entre dos cuerpos extensos, que después del choque tengan ambos solamente energías cinéticas de rotación en torno a sus

respectivos centros de masa? Si es así, dése un ejemplo.

12-28. Un aro circular de madera, de masa  $m$  y radio  $r$  descansa sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Contra él se dispara con una velocidad  $v$  dirigida en la forma indicada en la figura 12-37, una bala cuya masa es, también,  $m$  y que queda incrustada en él. El espesor es mucho menor que el radio. (a) ¿Cuál es la velocidad del centro de masa del sistema antes y después de chocar la bala con el aro? (b) ¿Cuál es el momento cinético del sistema respecto a su centro de masa antes de chocar la bala contra el aro? (c) ¿Cuál es la velocidad angular con la que gira el sistema después de chocar la bala con el aro? (d) ¿Qué energía cinética se ha perdido en el choque?

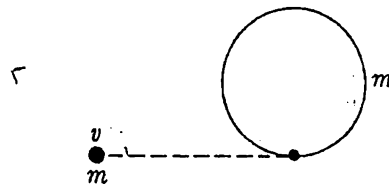


Figura 12-37

12-29. Un disco circular uniforme  $A$  de radio  $R$  y masa  $M$  desliza sobre una de sus caras planas sobre un plano horizontal sin rozamiento con una velocidad  $V$  constante. El disco  $A$  choca con otro  $B$  exactamente igual, que se halla inicialmente en reposo con su centro situado a una distancia  $R$  de la recta de movimiento de  $A$ , según se indica en la figura 12-38. Después del choque, ambos discos siguen juntos formando un cuerpo rígido. ¿Cuáles son (a) la velocidad de traslación y (b) la velocidad angular de este cuerpo después del choque? (c) ¿Cómo variaría la contestación a (b) si  $A$  tuviera una velocidad angular inicial  $\omega_a = V/R$ , correspondiente a una rotación positiva

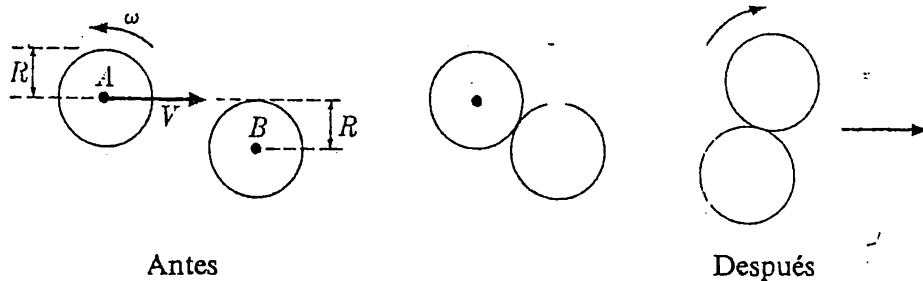


Figura 12-38

(contraria a la de las agujas del reloj)?  
(d) ¿Qué energía cinética se pierde en el choque?

12-30. Se monta una vía circular horizontal de masa  $M = 1,5 \text{ kg}$  y radio  $R = 0,5 \text{ m}$  sobre una rueda que puede girar (rozamiento despreciable) alrededor de su eje vertical fijo, según se indica en la figura 12-39. Puede despreciarse la masa de la rueda. Sobre la vía parte del reposo una locomotora de juguete de masa  $m = 0,5 \text{ kg}$  que pronto alcanza

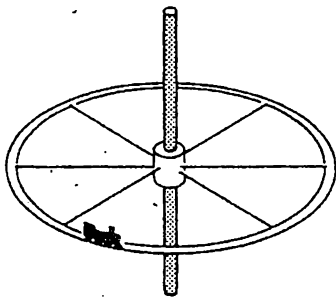


Figura 12-39

una celeridad constante  $v_0 = 2 \text{ m/s}$  respecto al sistema del laboratorio. (a) ¿Cuál será la velocidad angular de la rueda si parte del reposo? Indicar el sentido. (b) La locomotora disminuye su velocidad hasta detenerse. ¿Cuál es la velocidad angular final de la rueda? (c) Supongamos que el cojinete de la rueda *no* está exento de rozamientos. ¿Cuál será el movimiento final de la rueda y la locomotora si ambas

se hallaban en reposo cuando se conectaba la corriente? (d) Describir el movimiento del sistema desde el momento de arrancar la locomotora, para el caso en que en vez de estar soportada la rueda por un eje fijo, se hallara sobre una superficie horizontal sin rozamiento.

12-31. Un cilindro homogéneo parte de una posición  $A$  y rueda hacia abajo de un plano inclinado (fig. 12-40) sin deslizar hasta  $B$ . Sigue de  $B$  hasta  $C$ , moviéndose sobre una superficie exenta de rozamientos. Los desniveles entre  $A$  y  $B$  y entre  $B$  y  $C$  son ambos iguales al diámetro del cilindro. (a) ¿Cuáles son la velocidad del centro de masa y la velo-

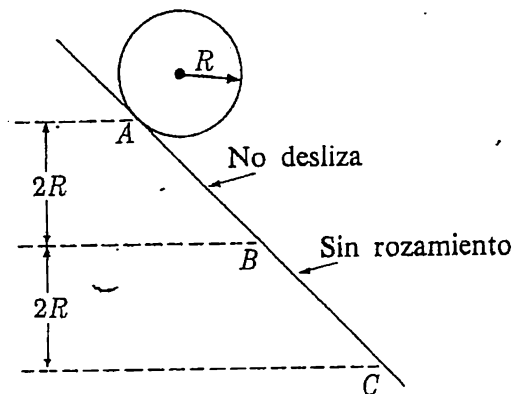


Figura 12-40

cidad angular del cilindro, cuando éste se halla en el punto  $B$ ? ¿Cuáles serán dichas velocidades cuando el cilindro alcance la posición  $C$ ?

12-32. Un émbolo de masa despreciable cuyo vástago pasa por una guía exenta de rozamientos, empuja un cilindro uniforme de masa  $M$  y radio  $R$  sobre un plano horizontal, según se indica en la figura 12-41. La fuerza horizontal que se ejerce sobre el émbolo es  $F$ . El coeficiente de rozamiento entre émbolo y cilindro es  $\mu$ . El cilindro rueda sin deslizar sobre un plano. (a) Escribir la ecuación, o ecuaciones, que rigen el movimiento. (b) Determinar la aceleración del centro de masa del cilindro.

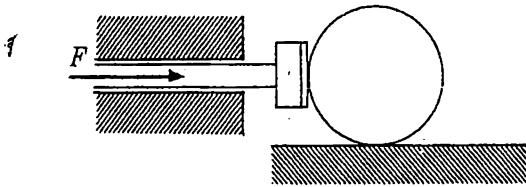


Figura 12-41

12-33. Una rueda sube rodando un plano inclinado de ángulo  $\theta$  bajo la acción de un par, según se indica en la figura 12-42. ¿Cuál es la aceleración máxima de la rueda si su masa es  $M$ , su radio de giro  $k_0$  y el coeficiente de rozamiento estático  $\mu$ ?

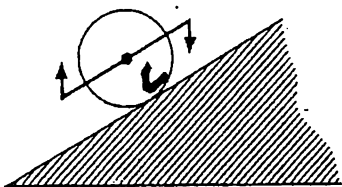


Figura 12-42

12-34. Un cilindro homogéneo de radio  $R/4$  se mueve por el interior de una tubería de sección circular de radio  $R$ , según se indica en la figura 12-43. La mitad izquierda de la tubería es lo suficientemente áspera para asegurar la rodadura sin deslizamiento, mientras que

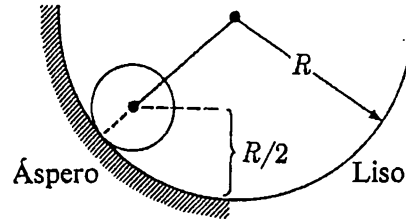


Figura 12-43

la otra mitad tiene coeficiente de rozamiento nulo. El cilindro empieza a rodar, en la mitad rugosa de la tubería, desde un punto en el cual su centro de masa se halla a una altura  $R/2$  sobre el punto más bajo de la tubería. (a) ¿Cuál es la velocidad angular del cilindro en la posición más baja? (b) ¿Cuál será la altura máxima que alcanza el cilindro en la mitad lisa de la tubería?

12-35. ¿Cuál es el momento de inercia de (a) una varilla delgada y larga respecto a un eje perpendicular a ella y que pase por uno de sus extremos? (b) un aro circular delgado respecto a un eje que pase por su periferia y sea perpendicular a su plano? (c) un aro circular delgado respecto a un eje situado en su plano y tangente a él? (d) una placa circular delgada respecto a un eje normal a su plano y tangente a su periferia?

12-36. Un aro circular de radio  $R$  oscila en torno a un eje horizontal que pasa por un punto  $A$ , según se indica en la figura 12-44. (a) ¿Cuál es el período de oscilación del aro si el eje es normal al plano del aro? Demostrar que este

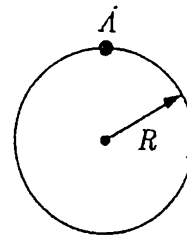


Figura 12-44

período es igual al de un péndulo simple de longitud  $2R$ . (b) ¿Cuál es el período de oscilación del aro si el eje está contenido en su plano? (c) En (a) y en (b), ¿cuáles son las velocidades angulares que debe llevar el aro en las posiciones más bajas, para poder dar una vuelta completa?

12-37. Una varilla homogénea delgada de masa  $M$  y longitud  $L$  está articulada por un extremo y mantenida en posición horizontal por medio de un resorte vertical. El resorte está sujeto a una distancia  $d$  del extremo articulado de la varilla (fig. 12-45). Si se da al extremo libre de la varilla un desplazamiento vertical y luego se suelta, calcular el período de las oscilaciones subsiguientes si es  $K$  la constante del resorte.

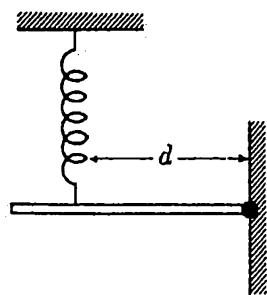


Figura 12-45

12-38. Un péndulo consiste en una barra uniforme de longitud  $L$ , con un eje horizontal de rotación que pasa por uno de sus extremos. Se suelta la barra a partir de la posición horizontal. (a) ¿Cuál es la fuerza de contacto que ejerce el eje sobre la barra, inmediatamente después de soltarla? (b) ¿Cuál es la fuerza de contacto cuando la barra forma un ángulo de  $30^\circ$  con la vertical?

12-39. Consideremos los dos péndulos de la figura 12-46. En la parte (a) puede verse una barra recta uniforme, y en la parte (b) una esfera uniforme que

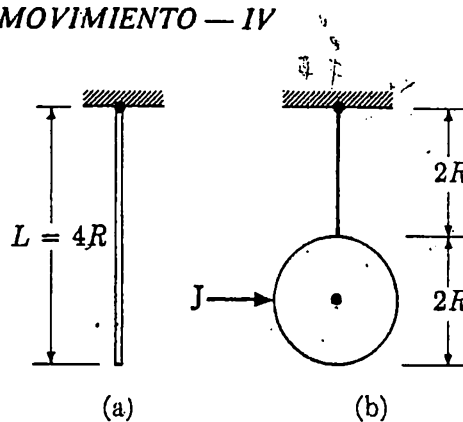


Figura 12-46

pende del extremo de una barra muy ligera. Las masas de los péndulos son iguales y sus dimensiones son las indicadas en la figura. Se da a la esfera un impulso instantáneo  $J$  que pasa por su centro y que la lleva a la posición horizontal. ¿En qué punto de la barra habría que aplicar  $J$  para llevarla a la posición horizontal?

12-40. Una barra uniforme de longitud  $L$  y masa  $M$  puede girar alrededor de un eje horizontal sin rozamiento que pasa por el extremo superior de la barra, según se indica en la figura 12-47. El eje está soportado por dos alambres horizontales sobre los que puede deslizarse sin rozamiento. Se da a la barra una velocidad horizontal  $V$  de manera tal que permanezca vertical durante el movimiento. Se detiene el movimiento cuando choca el eje con el soporte  $S$  fijo en los alambres y queda unido a él. Entonces empieza a oscilar la barra alrededor del

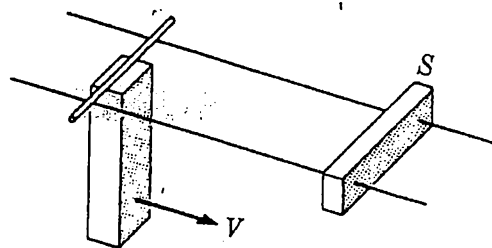


Figura 12-47



eje. (a) ¿Cuál es el momento cinético de la barra respecto a  $S$  antes e inmediatamente después del choque? (b) ¿Cuál es la velocidad angular de la barra después del choque? (c) ¿Qué fracción de la energía cinética inicial se pierde en el choque?

12-41. Un péndulo constituido por una barra recta se dispone para oscilar de dos maneras, según se indica en la figura 12-48. En (a), oscila alrededor de un eje horizontal fijo que pasa por su extremo superior. En (b), el extremo superior puede deslizarse libremente a lo largo de un alambre horizontal sin rozamiento. (a) ¿Cuál es el cociente entre los períodos de pequeña oscilación de estos dos péndulos? (b) El péndulo oscila alrededor del alambre con cierta amplitud. Se sujeta bruscamente al alambre el extremo superior, pero el péndulo aún puede oscilar libremente alrededor de este punto de sujeción. Estudiar la amplitud del movimiento continuado si se produce la sujeción cuando el péndulo pasa por la posición vertical y cuando es máxima la desviación.

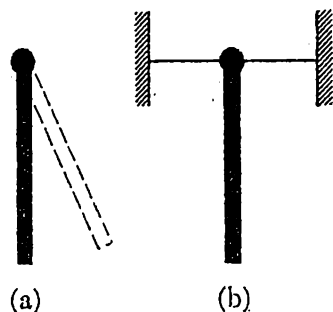


Figura 12-48

12-42. Un cilindro de radio 1 m está constituido por dos mitades uniformes, una de 10 kg y la otra de 20 kg, según se indica en la figura 12-49. El cilindro se apoya sobre un plano sin rozamiento y se suelta desde la posición

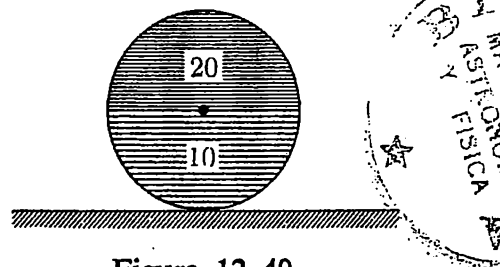


Figura 12-49

inestable representada. ¿Cuál será la energía cinética en el movimiento oscilatorio subsiguiente?

12-43. Un cubo homogéneo desliza con velocidad constante sobre una superficie horizontal sin rozamiento, según se indica en la figura 12-50. ¿A qué velocidad volcará el cubo tras chocar en  $S$  con el obstáculo?

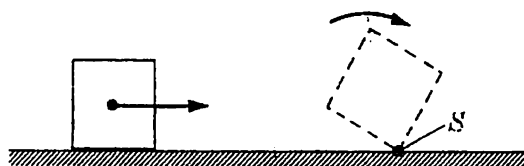


Figura 12-50

12-44. Consideremos los sistemas de la figura 12-51 (a), (b) y (c), los cuales están todos animados de movimiento oscilatorio. (a) El primer sistema consiste en un cilindro de masa  $m$  y radio  $r$  y una barra muy ligera. Calcular la frecuencia característica  $f_a$  del sistema. (b) Un cilindro de masa  $m$  desliza en uno y otro sentido en un canal semicircular. Despreciando el rozamiento, calcular la frecuencia  $f_b$  característica de este sistema. ¿Es mayor, igual o menor que  $f_a$ ? Explicarlo. (c) El cilindro de la parte (b) rueda sin deslizar en uno y otro sentido. La frecuencia  $f_c$  de este sistema, ¿es igual, mayor o menor que  $f_b$ ? Explíquese.

12-45. Una escalera de 12 m pesa 25 kg y se apoya sobre un edificio liso. El

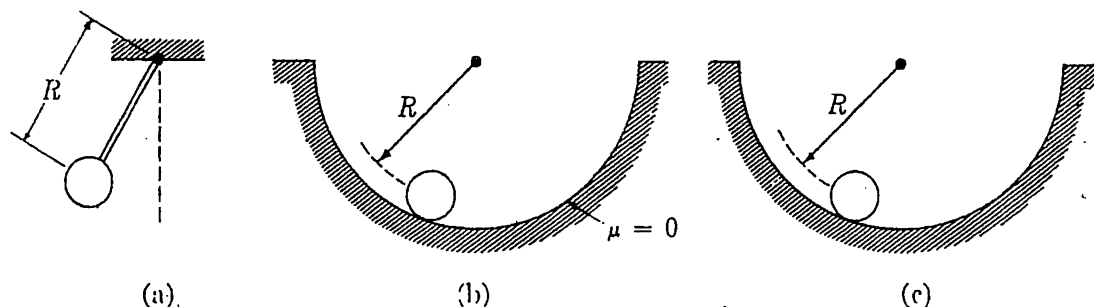


Figura 12-51

ángulo entre la escalera y el edificio es de  $30^\circ$ . (a) Dibujar un esquema de todas las fuerzas que se ejercen sobre la escalera. (b) ¿Qué fuerza ejerce el edificio sobre la escalera? (c) ¿Qué fuerza ejerce el suelo sobre la escalera?

12-46. Un puntal de 10 m de longitud pesa 150 kg y está soportado en la forma indicada en la figura 12-52. En su extremo libre sostiene un peso de 500 kg. (a) Indicar en un esquema todas las fuerzas que se ejercen sobre el puntal. (b) ¿Qué fuerzas son éstas?

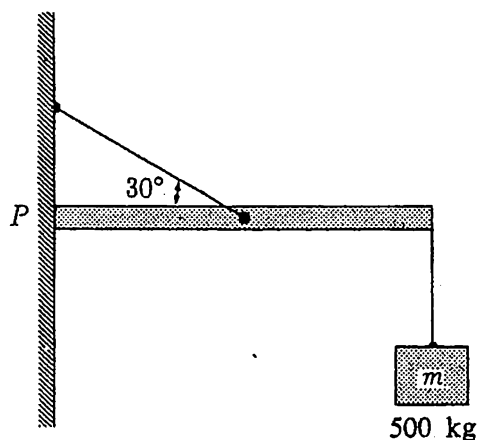


Figura 12-52

12-47. Una cuerda tendidera de 30 m de longitud soporta en su centro un peso de 10 kilogramos. Cada mitad de la cuerda forma un ángulo de  $5^\circ$  con la horizontal. ¿Cuál es la tensión de la cuerda?

12-48. Un puntal de 30 m de longitud y 150 kg, está soportado en la forma indicada en la figura 12-53. La distancia de A a O es de 30 metros. ¿Cuál es la tensión  $S$  del cable?

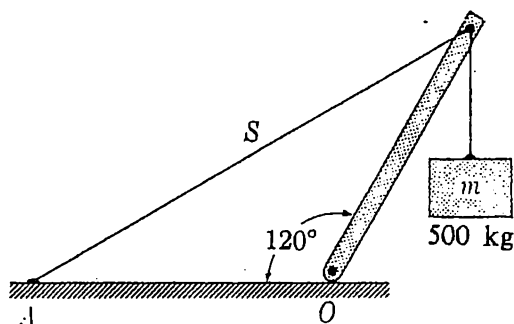


Figura 12-53

12-49. Dos tableros lisos están articulados por una arista y se equilibran en la forma indicada en la figura 12-54. La articulación en P está exenta de rozamientos. Cada tablero tiene una masa  $m$  y una longitud de la arista transversal  $l$ , y forman ángulos de  $60^\circ$  con el suelo.

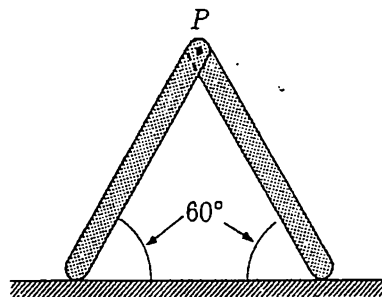


Figura 12-54

¿Cuál debe ser el coeficiente de rozamiento estático que mantiene el sistema en equilibrio?

12-50. Según se indica en la figura 12-55, un cilindro homogéneo de masa

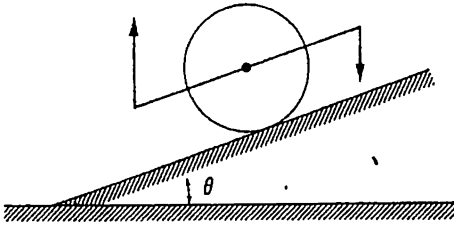


Figura 12-55

$M$  y radio  $R$  se mantiene en reposo sobre un plano inclinado de ángulo  $\theta$ , bajo la influencia de un par. Determinar éste.

12-51. Una barra uniforme de lon-

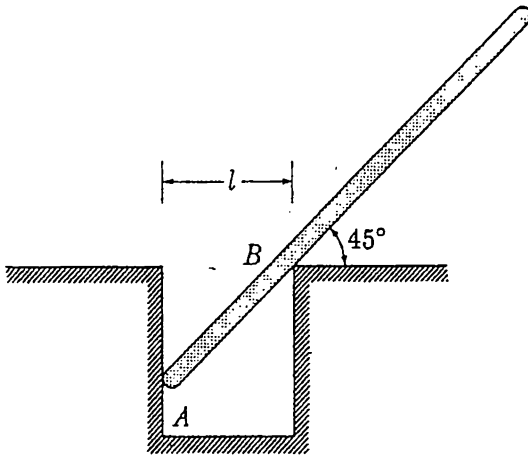


Figura 12-56

gitud  $L$  y masa  $m$  se mantiene en equilibrio en un plano vertical, según se indica en la figura 12-56. La anchura de la zanja que sostiene la barra es  $l = L/3$ . La fuerza de rozamiento es máxima en  $A$  y puede despreciarse en  $B$ . ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento en  $A$  y cuál la dirección de la fuerza de rozamiento que se ejerce sobre la barra?

12-52. Dos barras uniformes, una de 15 cm de longitud y masa 5 kg y la otra de 25 cm de longitud y masa 20 kg, están soportadas por pasadores  $P_1$  y  $P_2$  que hacen que se apoye una en otra en la forma indicada en la figura 12-57.

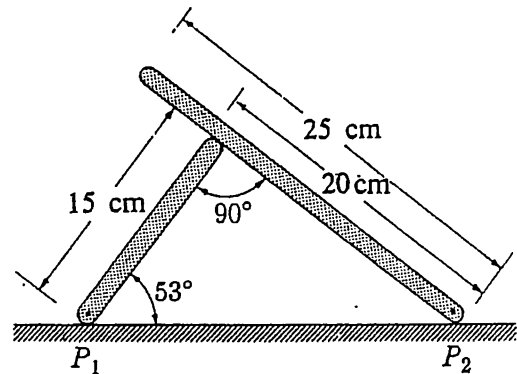


Figura 12-57

(a) ¿Qué puede decirse del coeficiente de rozamiento estático entre las barras si no hay deslizamiento? (b) ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por el pasador  $P_1$ ?

## EJEMPLOS DE FUERZAS Y MOVIMIENTO — V

*Resumen.* Vimos en el capítulo 12 que en el movimiento bidimensional, el momento cinético de un cuerpo rígido sólo tiene una componente y el momento resultante de las fuerzas exteriores sólo altera la magnitud del momento cinético. En el movimiento tridimensional también puede variar la dirección del momento cinético y esa variación exige un momento exterior, según se estudió formalmente en el capítulo 9. En primer lugar se ilustra esta relación vectorial existente entre el momento cinético y el momento resultante, para los casos de una partícula única y de una haltera giratoria. A continuación se realiza un análisis del movimiento de cuerpos rígidos simétricos en rotación. Incluimos la precesión de giroscopios y peonzas, así como un estudio cualitativo de la nutación. Se determinan después las fuerzas y pares de inercia originados en la rotación en torno a un eje fijo y se introducen los conceptos de ejes principales y momentos principales de inercia. Observamos que el momento cinético, en una rotación alrededor de un eje no principal, no está dirigido a lo largo del eje de rotación. Habiendo puesto de manifiesto la naturaleza vectorial de la velocidad angular, deducimos la expresión general del momento cinético y de la energía cinética de un cuerpo rígido en rotación en función de los momentos principales de inercia y de las componentes de la velocidad angular según los ejes principales.

Vimos en el capítulo 12 que el movimiento de un cuerpo rígido puede considerarse como la superposición de una traslación y una rotación. La traslación está descrita por el movimiento del centro de masa del cuerpo y esta parte del movimiento es en todo análoga al movimiento de una partícula. Comparándolo, pues, con el movimiento de una partícula, el movimiento de un cuerpo rígido presenta como novedades la rotación en torno al centro de masa y la relación existente entre el momento cinético de rotación (spin) y las fuerzas exteriores. En el capítulo 9 introdujimos el concepto de momento cinético y estudiamos sus propiedades en el caso de un sistema de puntos materiales. En el capítulo 12 se presentaron las ecuaciones generales del movimiento de un cuerpo rígido en

las formas

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F} \quad (13-1)$$

$$\frac{d\mathbf{L}^*}{dt} = \boldsymbol{\tau}^* \quad (13-2)$$

donde  $\mathbf{P}$  es la cantidad de movimiento total del cuerpo,  $\mathbf{L}^*$  el momento cinético de rotación,  $\mathbf{F}$  la resultante de las fuerzas exteriores y  $\boldsymbol{\tau}^*$  el momento resultante respecto al centro de masa. Sin embargo, hasta ahora sólo hemos aplicado estas ecuaciones al movimiento en un plano y en este caso sólo hay una componente del momento cinético. En este capítulo se extenderán los estudios realizados anteriormente para incluir el movimiento en tres dimensiones que encontramos en los cuerpos que giran (giroscopios, etc.).

Cuando pasamos del movimiento en un plano al movimiento en el espacio, no aparecen conceptos nuevos referentes al movimiento de traslación de un cuerpo. En otras palabras, en función del movimiento del centro de masa, etc., la interpretación de la ecuación (13-1) es la misma en el movimiento de dos y de tres dimensiones. En cambio, por lo que respecta al movimiento de rotación, lo hallamos fundamentalmente diferente en dos y en tres dimensiones. En dos dimensiones, la dirección del momento cinético está confinada a la recta fija normal al plano del movimiento y el momento resultante de las fuerzas exteriores que se ejercen sobre el cuerpo produce siempre una variación de la *magnitud* del momento cinético. En cambio, en el espacio, puede variar la dirección del vector momento cinético y ya no es cierto que el momento resultante sólo produzca variación de la magnitud del momento cinético. En realidad, en muchos casos el único efecto del momento resultante es variar la *dirección* del momento cinético, mientras que la magnitud de éste permanece invariable. Muchas de las sorprendentes características del movimiento de los giroscopios y peonzas se deben a este efecto que nos es aún casi desconocido si sólo atendemos a lo estudiado en los capítulos anteriores.

A este respecto puede sernos útil recordar la situación análoga que estudiamos al tratar de la cantidad de movimiento de un cuerpo, primeramente en el caso de movimiento unidimensional y después en el caso de movimiento bidimensional. Veámos que en el caso de una dimensión, la dirección del vector cantidad de movimiento estaba confinada a la trayectoria rectilínea del cuerpo y una fuerza exterior alteraba siempre la magnitud de la cantidad de movimiento. En cambio, en dos (y tres) dimensiones, la dirección de la cantidad de movimiento no se hallaba ya confinada y una fuerza no tenía por qué alterar necesariamente la magnitud de la cantidad de movimiento. Por ejemplo, en el movimiento circular uniforme la fuerza sólo hacía variar la dirección, y no la magnitud, de la canti-

dad de movimiento. Este hecho pareció un tanto sorprendente a la luz de nuestros conocimientos adquiridos únicamente en nuestros estudios en una dimensión. Sin embargo, una vez familiarizados con los movimientos circular y curvilíneo, quedó aclarado, sin lugar a dudas, el significado de la relación vectorial que expresa la velocidad de variación de la cantidad de movimiento en función de la fuerza. Análogamente, para familiarizarnos con la naturaleza vectorial de la relación existente entre el momento cinético y el momento resultante de las fuerzas exteriores, nos será útil estudiar detalladamente algunos ejemplos sencillos, cosa que vamos a hacer a continuación.

**13-1 Variación del momento cinético de una partícula.** Para introducir la relación vectorial  $d\mathbf{l}/dt = \boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  y la relación de impulsos correspondiente  $\Delta\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{J}$ , consideraremos el movimiento de una partícula cuyo momento cinético se altera mediante un impulso instantáneo.

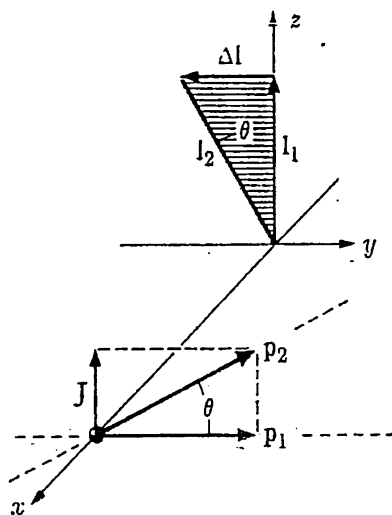


Fig. 13-1. Diagrama vectorial que presenta las relaciones entre cantidades de movimiento y momentos cinéticos antes y después de un impulso instantáneo.

En la figura 13-1 se ha representado una partícula que se mueve con cantidad de movimiento constante  $p_y = p_1$  recorriendo la recta  $x = x_1$  en el plano  $xy$ . El momento cinético de la partícula respecto al origen es constante; es decir,  $l_z = l_1 = x_1 p_1$  representado por un vector dirigido a lo largo del eje  $z$ . Al cortar la partícula al eje  $x$ , recibe un impulso instantáneo  $J$ . Si el impulso se halla en el plano  $xy$ , la partícula permanecerá en el plano  $xy$  después del impulso y sólo variará la magnitud, no la dirección, del momento cinético. En cambio, si el impulso tuviera una componente normal al plano  $xy$ , la trayectoria de la partícula se separaría del plano. Si el impulso estuviera dirigido en el sentido positivo de las  $z$ , la variación del momento cinético, según la relación vectorial

$\Delta l = r \times J$  (véase cap. 9), tendrá la dirección y sentido de las  $y$  negativas. Por tanto, después del impulso las componentes del momento cinético son  $l_z = x_1 p_1$  y  $l_y = -x_1 J$ . La magnitud del momento cinético después del impulso es, pues,  $l_2 = \sqrt{(x_1 p_1)^2 + (x_1 J)^2}$  y  $l_2$  forma un ángulo  $\theta = \arccos(l_1/l_2)$  con el eje  $z$ . Podemos ilustrar directamente este resultado, sin necesidad de utilizar las relaciones vectoriales anteriores. El efecto del impulso será variar tanto la dirección como la magnitud de la cantidad de movimiento de la partícula. Después del impulso, la partícula se mueve en un *nuevo plano* y si se aplica el impulso en el instante representado, este nuevo plano y el plano de movimiento inicial se cortarán según el eje  $x$ . El ángulo que forman los planos de movimiento inicial y final es el mismo que forman las cantidades de movimiento inicial y final,  $p_1$  y  $p_2$  y por tanto viene dado por  $\cos \theta = p_1/p_2$ . Así pues, aparte de todas las consideraciones acerca del momento cinético, los efectos del impulso son (a) incrementar la magnitud de la cantidad de movimiento desde  $p_1$  hasta  $p_2 = \sqrt{p_1^2 + J^2}$ , (b) hacer que la partícula se mueva en un nuevo plano que corte al plano inicial según el eje  $x$ , y (c) hacer que el ángulo que forman estos planos sea tal que  $\cos \theta = p_1/p_2$ .

La distancia del origen a la nueva recta de movimiento sigue siendo  $x_1$ , y la magnitud del momento cinético de la partícula después del impulso es, pues,  $l_2 = x_1 p_2 = \sqrt{(x_1 p_1)^2 + (x_1 J)^2}$ . La dirección del momento cinético, según vimos anteriormente, es normal al nuevo plano del movimiento. Como el ángulo que forman dos planos es el mismo que forman sus normales, se deduce que el nuevo vector momento cinético forma con el eje  $z$  un ángulo  $\theta$  dado por  $\cos \theta = p_1/p_2 = l_1/l_2$ , igual que antes. Este ejemplo sencillo demuestra, pues, que la representación vectorial del momento cinético y la relación vectorial  $\tau = dl/dt$  (o bien  $\Delta l = r \times J$ ) son compatibles y de fácil comprensión. Es importante observar que aun cuando la variación de la cantidad de movimiento de una partícula tiene la dirección y sentido del impulso o de la fuerza, la variación del momento cinético depende de la desviación angular del plano de movimiento y tiene la dirección y sentido del impulso angular, o momento resultante, que se ejerce sobre la partícula. Para el caso de una partícula sometida a una fuerza central puede seguirse un razonamiento totalmente análogo, como en el caso representado en la figura 13-2. Una bolita fija al extremo de un hilo recorre una trayectoria circular horizontal, en el plano  $xy$ , con velocidad angular constante. (Despreciamos el efecto de la gravedad.) La única fuerza que se ejerce sobre la bolita es la tensión del hilo. Demos ahora a esta bolita impulsos en distintas direcciones y examinemos los efectos. En el primer caso, representado en la figura 13-3, se aplica el impulso en la dirección y sentido del movimiento de la bola. Ésta permanece en el plano inicial de movimiento y sólo varía la magnitud del momento cinético, según se indica en la figura.

A continuación, apliquemos a la bola un impulso angular instantáneo en una dirección perpendicular a la de su movimiento, según se indica en la figura 13-4

El impulso hace que la bola se mueva ahora en un nuevo plano y se ve que la variación de cantidad de movimiento admite una descripción compatible con la relación vectorial  $\Delta \mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{J}$ .

EJEMPLO. Un punto material atado a una cuerda de longitud  $r$  tiene una velocidad angular  $\omega$ . ¿Qué impulso angular hay que comunicarle para que permanezca invariable la magnitud del momento cinético y el plano de rotación gire  $90^\circ$ ?

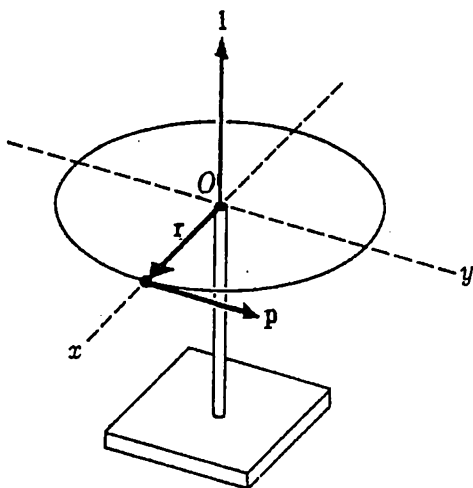


Fig. 13-2. Bola atada a un hilo y que gira alrededor de un punto fijo.

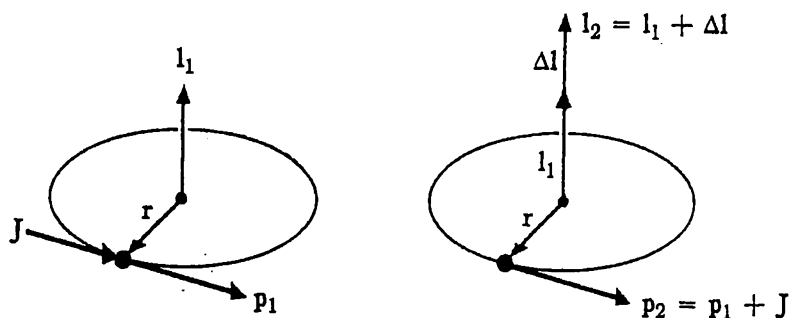


Fig. 13-3. Efecto de un impulso sobre la bola de la figura 13-2 cuando aquél se halla contenido en el plano del movimiento.

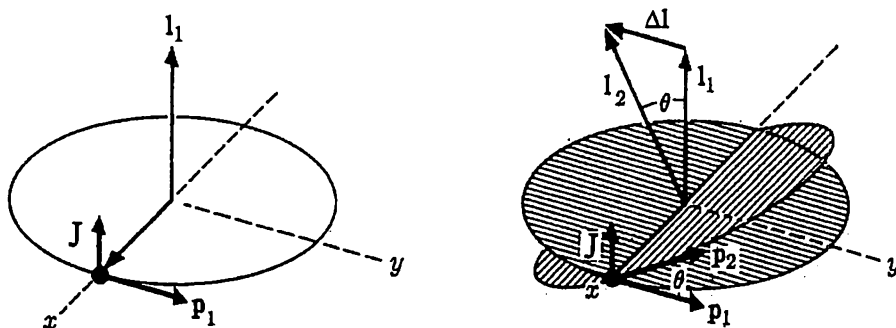


Fig. 13-4. Se da a la bola un impulso perpendicular a su momento cinético.



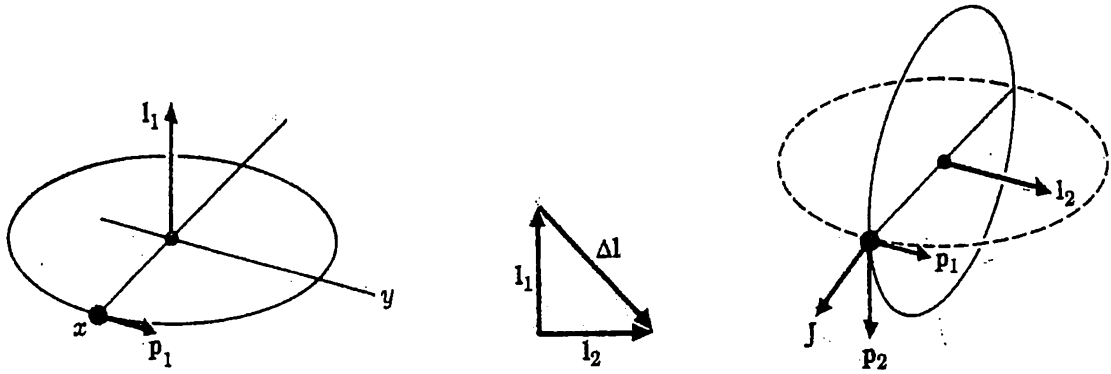


Fig. 13-5. Impulso que hace variar  $90^\circ$  al plano de rotación pero deja invariable la magnitud del momento cinético.

Inicialmente, el momento cinético tiene por magnitud  $mr^2\omega$  y está dirigido hacia arriba. Al final, el momento cinético está dirigido según el semieje  $+x$  pero sigue teniendo por magnitud  $mr^2\omega$ . El *impulso angular* está, por tanto, dirigido en la forma que se indica y tiene por magnitud  $\Delta l = \sqrt{(mr^2\omega)^2 + (mr^2\omega)^2} = \sqrt{2}(mr^2\omega)$ . El impulso  $J$  tiende a originar una rotación que haría avanzar a un sacacorchos según  $\Delta l$ .

**13-2 Ejemplos de movimiento de cuerpos simétricos en rotación.** Hemos ilustrado la relación existente entre el momento cinético y el momento resultante en el movimiento de una partícula, y vamos a pasar ahora al estudio del movimiento de cuerpos rígidos en rotación. Como introducción, consideremos un sistema constituido por dos bolas de masas iguales montadas sobre los extremos opuestos de una varilla delgada de longitud  $2R$  y masa despreciable (fig. 13-6). La varilla tiene un cojinete en su centro y puede girar libremente alrededor de un eje. Inicialmente, bolas y varilla giran en un plano horizontal. ¿Qué impulso angular hay que comunicar al sistema para que varíe el plano de rotación en la forma indicada?

La variación requerida de momento cinético está dirigida según el semieje  $+x$  y, por tanto, el impulso angular debe tener esta dirección y sentido. Si aplicamos dos impulsos de igual magnitud y dirección, pero de sentidos opuestos (impulsos de un *par de fuerzas*); no tendremos que ocuparnos del movimiento del centro de masa del sistema.

Una posibilidad es aplicar impulsos simultáneos a cada una de las bolas. Como éstas se hallan a una distancia  $R$  del punto  $O$ , cada impulso deberá tener una magnitud  $J_1 = \Delta l/2R$ , dirigido según se indica en la figura. Evidentemente, estos impulsos tienen una dirección tal que desvíen el movimiento de la bola al nuevo plano y esto origina, desde luego, un impulso angular dirigido según  $\Delta l$ .

Otra posibilidad es aplicar los impulsos al eje. Sus magnitudes dependerán de la distancia de  $O$  a los puntos de contacto. Lo más importante, por tanto, son la dirección y sentido de los impulsos. Éstos deben originar impulsos angu-

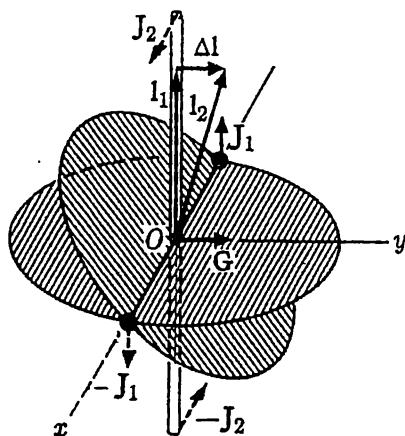


Figura 13-6

lares dirigidos según  $\Delta l$  (eje  $y$ ) y, por tanto, deberán estar dirigidos según los semiejes positivo y negativo de las  $x$ , respectivamente, tal como se indica. A consecuencia de estos impulsos, el extremo superior del eje caerá sobre el semieje  $+x$ . A primera vista, puede extrañar este comportamiento del eje. Una persona podría argüir que, según su experiencia, un punto de un eje en reposo se pondrá en movimiento en la dirección y sentido del impulso aplicado a dicho punto. Sin embargo, esta noción intuitiva no es aplicable cuando se trate de cuerpos que posean momento cinético, puesto que el cuerpo girará de manera tal que la variación del vector momento cinético tenga la dirección y sentido del momento o impulso angular aplicado.

Los ejemplos que hemos estudiado hasta ahora presentaban variaciones de momento cinético originadas por impulsos angulares instantáneos, pero las ca-

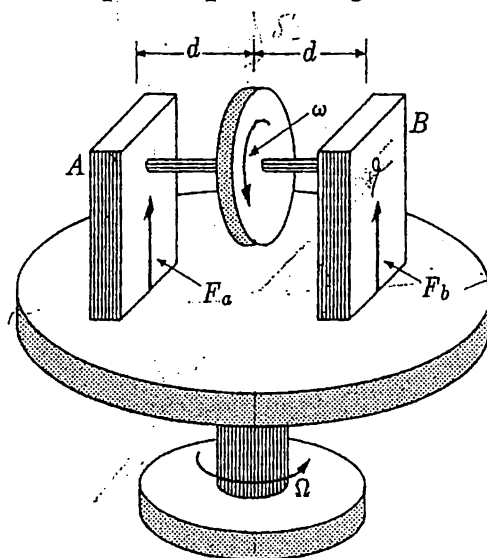


Figura 13-7. Disco en rotación sobre una mesa giratoria.

racterísticas principales de los resultados obtenidos siguen siendo aplicables cuando se tengan momentos que actúan en forma continua, según se ilustra en el ejemplo siguiente.

Consideremos un disco uniforme que gire alrededor de un eje horizontal montado sobre una mesa giratoria, según se indica en la figura 13-7. El momento cinético de rotación del disco tiene por magnitud  $L = I_0\omega$ , donde  $I_0 = MR^2/2$  es el momento de inercia del disco. El vector momento cinético es normal al plano del disco. Cuando no gira la mesa,  $\Omega = 0$ , el momento cinético del disco se mantiene constante y el momento total es nulo. Tenemos  $F_a d - F_b d = 0$ . Las fuerzas de contacto sobre  $A$  y  $B$  son iguales ambas a  $Mg/2$ , despreciando todos los pesos menos el del disco. Sin embargo, al poner en rotación la mesa variará la dirección del momento cinético del disco respecto al suelo.

Al girar el disco, también girará el vector momento cinético con la velocidad constante  $\Omega$ , según se indica en la figura 13-8. De esta figura se deduce que durante el tiempo  $\Delta t$  el vector momento cinético gira un ángulo  $\Delta\theta = \Omega \Delta t$  y la

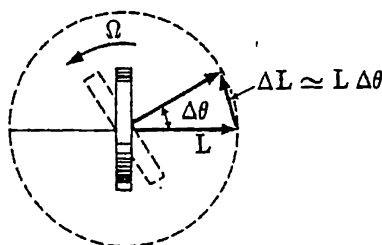
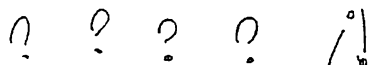


Fig. 13-8. Cuando gira el vector momento cinético con una velocidad angular  $\Omega$ , la magnitud de su velocidad de variación es  $dL/dt = \Omega L$ .



magnitud de la variación correspondiente del vector momento cinético es  $\Delta L = L\Omega \Delta t$ . La dirección de  $\Delta L$  se hace perpendicular a  $L$  cuando  $\Delta\theta$  tiende a cero.

Como esta variación es continua, la magnitud de la velocidad de variación de  $L$  (magnitud del momento) es

$$\tau = \frac{dL}{dt} = L\Omega$$

La dirección de  $dL/dt$  es perpendicular a  $L$ . En consecuencia, el momento resultante que actúa exteriormente sobre el cuerpo es perpendicular al eje del disco y tiene por magnitud  $L\Omega$ . Por tanto, tenemos  $(F_a - F_b) d = L\Omega$ . Además, la suma  $F_a + F_b$  debe ser igual al peso del disco,  $F_a + F_b = Mg$ , y de aquí se deduce que

$$F_a = \frac{Mg}{2} + \frac{L\Omega}{2d} \quad \text{y} \quad F_b = \frac{Mg}{2} - \frac{L\Omega}{2d}$$

La explicación de la desigualdad de las fuerzas de contacto es, simplemente, que el disco tiene un momento cinético variable y para mantener éste debe ejercerse un momento sobre el disco.

Observemos que cuando  $L\Omega/d = Mg$ , en el soporte  $B$  no hay fuerza de contacto por lo que podría suprimirse aquél y tendríamos lo que se llama un *giroscopio en precesión*, según veremos en el apartado siguiente. Si se deja que  $L\Omega$  se haga mayor que  $Mg$ , se invierte el sentido de la fuerza que se ejerce sobre el cojinete  $B$  y hay que tirar hacia abajo de este extremo para sujetarlo, mientras el otro presiona sobre la plataforma con una fuerza mayor que  $Mg$ .

*Giroscopio.* El ejemplo anterior ha puesto de manifiesto que si un momento cinético de magnitud constante varía de dirección con velocidad constante, será necesario un momento para mantener este movimiento. Dicho momento puede calcularse directamente a partir de la velocidad angular constante conocida  $\Omega$  del movimiento de giro del eje y de la magnitud del momento cinético de rotación. Por lo que respecta al disco, carece de importancia que este momento lo originen las fuerzas de contacto que ejerce la mesa, o que sean otras fuerzas exteriores las que lo ejerzan. En consecuencia, si montamos el disco como en un giroscopio (fig. 13-9) y se hace girar el eje del disco a velocidad angular *constante*  $\Omega$  en un plano horizontal, para mantener el movimiento se requerirá un momento  $\tau = L\Omega$ . Este momento lo podremos originar, por ejemplo, colgando un peso de un extremo del eje, como se indica en la figura. Cuando gira a velocidad constante  $\Omega$ , el vector momento cinético de una masa en rotación, al movimiento se le llama *precesión*. En el movimiento de precesión podemos decir que el vector momento cinético  $L$  «intenta» alinearse con el vector momento  $\tau$  ya que la punta del vector momento cinético gira hacia el vector momento. Desde luego, como el momento actúa en forma continua perpendicularmente a  $L$ , el vector momento cinético girará continuamente pero nunca «alcanzará» al vector momento.

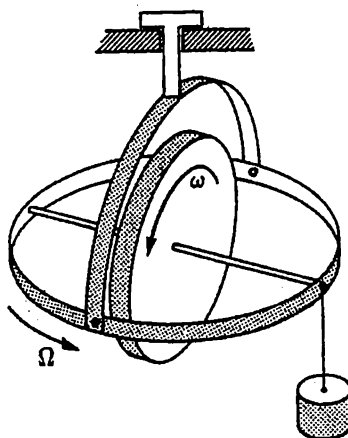


Fig. 13-9. Precesión del giroscopio.

Obsérvese que en este estudio del movimiento de precesión del giroscopio hemos supuesto la existencia del movimiento y luego se han deducido los momentos y fuerzas exteriores a partir del movimiento conocido. Si consideramos el problema complementario en el cual se dan las fuerzas y se busca el movimiento, deberemos hallar, desde luego, que el movimiento de precesión representa un movimiento posible, puesto que satisfará a las ecuaciones del movimiento. Sin embargo, existen otros movimientos posibles que pueden ser originados por el momento exterior dado y lo que ocurra dependerá solamente de cómo se inicie el movimiento. Si se mantienen estacionarios, al principio, los aros de suspensión y el peso, y se sueltan después, el giroscopio iniciará un movimiento complicado de *nutación*. Pero si se da inicialmente a los aros la velocidad angular  $\Omega$  apropiada para el momento y momento cinético, seguirá con el movimiento de precesión.

Cuando el momento es perpendicular al momento cinético, como en la figura 13-9, la velocidad angular de precesión es

$$\Omega = \frac{\tau}{L} = \frac{\tau}{I_0\omega} \quad (13-3)$$

donde hemos introducido  $L = I_0\omega$ , donde  $I_0$  es el momento de inercia de la masa en rotación del giroscopio respecto al eje de simetría y  $\omega$  es la velocidad angular de rotación en torno a dicho eje. Obsérvese que cuanto mayor sea el momento cinético de rotación  $L$ , mayor será el momento requerido para originar una velocidad angular dada de precesión del giroscopio.

Si sobre el giroscopio no se ejerce ningún momento exterior, el vector momento cinético tendrá siempre la misma dirección y si es grande el momento cinético, para variar la orientación del giroscopio se necesitará un impulso angular considerable. Es el momento cinético el que da a los cuerpos en rotación su estabilidad peculiar, o «inercia» a los cambios de dirección. Dando un momento cinético de rotación a un proyectil tal como una bala, un disco o un cohete, es posible hacer que se mueva sin dar tumbos y con su eje de rotación apuntando en una dirección fija. Análogamente, es posible estabilizar buques mediante cuerpos en rotación con gran momento cinético.

El giroscopio puede utilizarse como instrumento de navegación. Por ejemplo, en el girocompás se monta un giroscopio de manera tal que el eje de rotación del giroscopio se mantenga siempre en un plano horizontal, pero pueda girar libremente en este plano. Entonces, a consecuencia de la rotación de la Tierra, el eje de rotación del giroscopio se ajusta por sí mismo siempre de manera que señale la verdadera dirección Norte-Sur.

**La peonza.** Si soltamos una peonza que *no* gire desde su posición vertical, sabemos perfectamente que caerá. En cambio, si se pone en rotación rápida en torno a su eje, la peonza podrá mantenerse derecha al apoyarla sobre su punta.

Sabemos que, en general, el eje de la peonza variará su dirección con movimiento lento y cíclico, al que se da el nombre de precesión de la peonza.

Consideremos el caso sencillo en el cual la peonza esté animada de un movimiento de precesión cuya velocidad angular sea  $\Omega$ , como el representado en la figura 13-10. Para hallar la velocidad angular de precesión, deberemos determinar, en primer lugar, el momento de las fuerzas exteriores que se ejercen sobre la peonza. Tomemos como punto de referencia, el punto  $A$  de contacto. El momento cinético de la peonza será la suma de los momentos cinéticos de rotación (spin) y orbital respecto  $A$ :  $L_a = L^* + R \times P$ . La magnitud del momento respecto  $A$  es simplemente  $MgR \sin \theta$ , donde  $R$  es la distancia de  $A$  al centro de masa y  $\theta$  es el ángulo que forma el eje de la peonza con la vertical. Si consideramos en primer lugar el caso particular en el cual el momento cinético de rotación  $L^*$  es mucho mayor que la contribución orbital  $R \times P$ , podemos hacer aproximadamente igual a  $L^*$  el momento cinético total respecto  $A$ . Si se desprecia el rozamiento, no hay componente del momento resultante de las fuerzas según el eje de la peonza. El momento cinético de rotación permanecerá, pues, constante en magnitud; sólo variará su dirección. El momento de la fuerza  $Mg$  es siempre perpendicular a  $L^*$ . Por tanto, la punta de  $L^*$  describirá una circun-

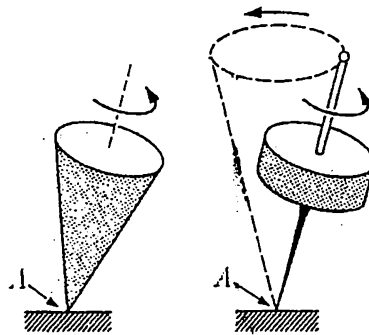


Fig. 13-10. Ejemplos de peonzas en rotación.

ferencia horizontal de radio  $L^* \sin \theta$ , según se indica en la figura 13-11. La magnitud correspondiente de la velocidad de variación del momento cinético se hace entonces  $dL^*/dt = \Omega L^* \sin \theta$  en completa analogía con el estudio del giroscopio. La relación existente entre el momento y la velocidad angular de precesión es, pues,

$$\tau = MgR \sin \theta = \Omega L^* \sin \theta$$

o sea

$$\Omega = \frac{MgR}{L^*} = \frac{MgR}{I_0 \omega} \quad (13-4)$$

donde  $I_0$  es el momento de inercia de la peonza respecto a su eje de rotación. Obsérvese que  $\Omega$  es independiente del ángulo  $\theta$  y que nuestro análisis sólo es aplicable a valores suficientemente grandes de  $L^*$ .

**Nutación.** Dijimos anteriormente que los giroscopios y peonzas pueden moverse con movimiento de precesión simple si se les pone en marcha adecuadamente. Pero también pueden producirse *nutaciones*, que son oscilaciones verticales. Aún cuando el análisis detallado de las nutaciones es bastante complicado, se pueden comprender con relativa facilidad sus características cualitativas.

Consideremos para mayor sencillez el caso en que, inicialmente, esté horizontal el eje de la peonza, como en la figura 13-12, en que se representa una rueda de bicicleta soportada por un pivote en un extremo de su eje. Cuando se suelta la rueda partiendo del «reposo», sólo tendrá inicialmente el momento cinético de rotación  $L^*$ . Sin embargo, así que se inicia su movimiento de precesión, adquirirá una velocidad angular  $\Omega$  en torno al eje vertical  $z$ . En consecuencia, desarrollará una componente del momento cinético según la *dirección y sentido del semieje*  $+z$  (igual a  $I_z\Omega$ , donde  $I_z$  es el momento de inercia de la rueda respecto al eje  $z$ ). Esta componente del momento cinético crece desde cero hasta un cierto valor, durante el tiempo que tarda iniciarse la precesión. Por tanto, durante este tiempo existirá una velocidad de variación ( $dL_z/dt$ ) de la componente según  $z$  del momento cinético. No obstante, como no hay componente

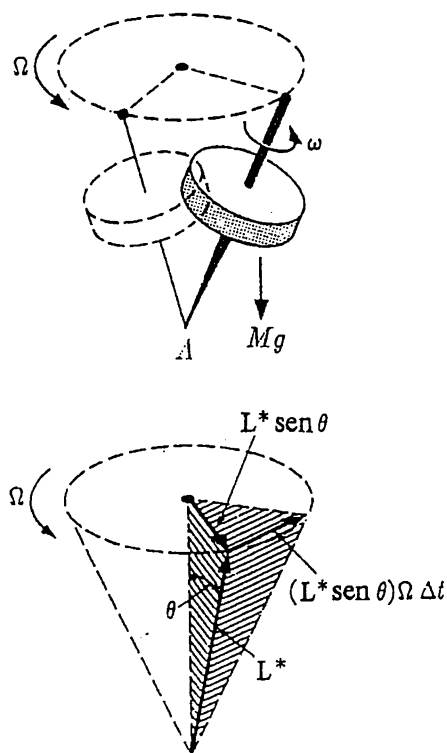


Fig. 13-11. Precesión de una peonza.

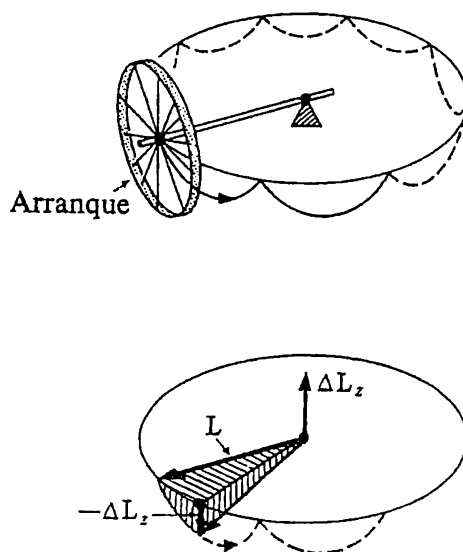


Fig. 13-12. Nutación de un giroscopio o peonza.

alguna según  $z$  del momento de las fuerzas exteriores, la velocidad de variación del momento cinético *total* puede no tener componente según  $z$ . Por tanto, al desarrollar el momento cinético una componente según  $z$ , el momento cinético de rotación deberá desarrollar una componente compensadora de igual dirección pero sentido contrario (sentido del semieje  $-z$ ). Por tanto, el eje de rotación del sistema debe girar hacia abajo con una velocidad suficientemente grande para compensar el momento cinético que se desarrolla en la dirección y sentido del semieje  $+z$  a causa de la precesión. Si continuara este movimiento hacia abajo del eje de rotación, se produciría una sobrecompensación de la componente positiva del momento cinético en la dirección y sentido  $+z$ . Por tanto, el eje volvería a subir. Si no hubiera ningún amortiguamiento del sistema, proseguiría este movimiento hacia arriba y hacia abajo constituyendo una oscilación que es la *nutación* del giroscopio o peonza. Sin embargo, a causa del amortiguamiento por rozamiento, las oscilaciones de la nutación suelen desaparecer al cabo de pocos períodos de oscilación y a partir de entonces prosigue la precesión simple anteriormente estudiada, de la peonza.

También podemos comprender la necesidad de esta nutación por consideraciones energéticas. En el movimiento de precesión de la rueda de bicicleta de la figura 13-12, la energía cinética es algo mayor que la correspondiente a la rueda estacionaria en rotación. Por tanto, si la rueda en rotación se mantiene con su eje horizontal y en reposo, difícilmente podremos esperar que, al soltarla, inicie un movimiento de precesión pura. ¿De dónde saldría la energía adicional? En su lugar, el centro de masa de la rueda empezaría a descender perdiendo, así, parte de su energía potencial y esta energía potencial «perdida» es la que aparece como energía cinética de precesión. Cuando desaparezcan, por amortiguamiento, las oscilaciones de nutación, el movimiento de precesión proseguirá con el eje algo inclinado por debajo de la horizontal.

**EJEMPLO. El giro-péndulo.** Un giro-péndulo consiste en una barra en forma de T, soportada por cojinetes en los puntos  $B$  y  $C$ , según se indica en la figura 13-13. En el punto  $A$ , situado a una distancia  $R$  de  $CB$ , el péndulo lleva un disco circular delgado (masa  $m$ , radio  $r$ ) que gira con una velocidad angular  $\omega$  alrededor de  $OA$ , según se indica. Utilizando las dimensiones indicadas en la figura, queremos determinar las fuerzas ejercidas sobre los cojinetes cuando pasa el péndulo por su posición más baja después de haberlo soltado a partir del ángulo  $\theta = 90^\circ$ . Despreciaremos la masa de la barra  $OA$ .

Si representamos por  $\Omega$  la velocidad angular del péndulo en su posición más baja, podremos obtener las fuerzas en  $B$  y  $C$  de la manera siguiente. La aceleración del centro de masa del disco en la posición más baja es  $\Omega^2 R$  dirigida hacia arriba. En la posición más baja el momento cinético de rotación  $L^*$  del disco está dirigido hacia abajo y la magnitud de su velocidad de variación es  $\Omega L^*$ . La dirección y sentido de  $dL^*/dt$  son los del movimiento de  $A$ , es decir, está dirigido horizontalmente hacia la izquierda, según se indica en la figura 13-14.



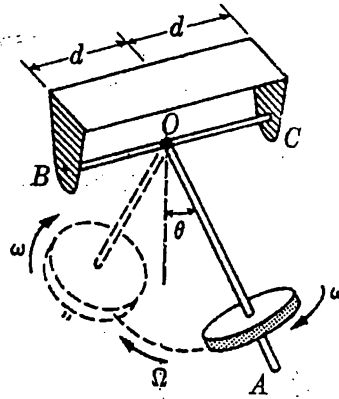


Fig. 13-13. Péndulo con disco en rotación (giro-péndulo).

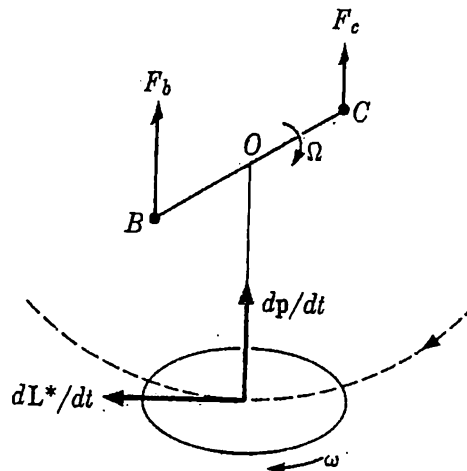


Fig. 13-14. Diagrama vectorial que presenta las fuerzas y velocidades de variación de la cantidad de movimiento y del momento cinético del giro-péndulo.

La restante contribución al momento cinético del péndulo respecto al punto  $O$ , debida al movimiento del centro de masa, no tiene velocidad de variación alguna en la posición más baja. Así pues, si se representa por  $F_b$  y  $F_c$  las componentes verticales de las fuerzas que ejercen los cojinetes sobre el eje  $BC$ , obtenemos

$$F_b + F_c - mg = m\Omega^2 R$$

$$(F_b - F_c) d = \Omega L^* = I_0 \omega \Omega$$

De estas ecuaciones, hallamos

$$F_b = \frac{mg}{2} + \frac{m\Omega^2 R}{2} + \frac{I_0 \omega \Omega}{2d}$$

$$F_c = \frac{mg}{2} + \frac{m\Omega^2 R}{2} - \frac{I_0 \omega \Omega}{2d}$$

y

Como no hay más componentes de  $dp/dt$  y  $dL^*/dt$ , deducimos que las fuerzas en  $B$  y  $C$  carecen de componentes horizontales.

La velocidad angular  $\Omega$  puede hallarse directamente a partir del teorema de las fuerzas vivas. El momento de inercia respecto al eje de rotación,  $BC$ , del disco se obtiene a partir del teorema de Steiner. El momento de inercia respecto al eje paralelo a  $BC$  que pasa por el centro de masa es  $I_0 = mr^2/4$  y, por tanto, tenemos  $I = I_0 + mR^2 = mr^2/4 + mR^2$ . La velocidad angular se obtiene entonces de  $1/2 I \Omega^2 = mgR$  y tenemos

$$\Omega = \sqrt{\frac{8gR}{r^2 + 4R^2}}$$

Insertando este valor de  $\Omega$  en las ecuaciones para  $F_b$  y  $F_c$  tenemos el resultado final.

Es interesante observar que la fuerza que se ejerce sobre el cojinete  $C$  puede anularse cuando la velocidad angular del disco es  $\omega = (mg + m\Omega^2 R)d/I_0\Omega$ . Así pues, en tales condiciones, cuando pasa el péndulo por su posición más baja, podría suprimirse el cojinete  $C$ , en ese instante, sin perturbar el movimiento.

Si en vez de un eje de rotación fijo tuviéramos una suspensión por pivote, sería imposible aplicar desde ella momento alguno al péndulo, que lo mantenga oscilando en un plano vertical. Para anular el momento en el punto de suspensión, el péndulo tiene que salir del plano vertical y describir un movimiento de precesión, con fuertes nutaciones superpuestas, por lo general, según se indica esquemáticamente en la figura 13-15.

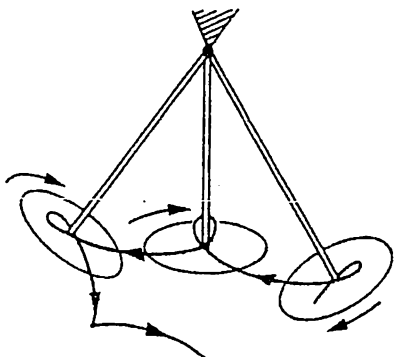


Fig. 13-15. Giro-péndulo suspendido por pivote, con disco en rotación.

**13-3 Momentos centrífugos y ejes principales.** Cuando se hace girar un cuerpo rígido en torno a un eje fijo, existen tres orígenes fundamentalmente diferentes de las fuerzas de suspensión, es decir, de las fuerzas que ejercen los cojinetes sobre el cuerpo rígido. En primer lugar, están las fuerzas atribuidas únicamente al peso del cuerpo; estas fuerzas están presentes tanto si gira el cuerpo como si no. Después, si el centro de masa del cuerpo no se halla sobre el eje de rotación, deberán haber unas fuerzas de suspensión de valor  $MA = M\omega^2 R$ , ya que el centro de masa tiene una aceleración  $\omega^2 R$ , donde  $R$  es la distancia del cen-

tro de masa al eje. Desde el punto de vista de un sistema de coordenadas que gire con el cuerpo rígido, el cuerpo se halla en equilibrio bajo la acción de la fuerza de inercia  $M\omega^2 R$  y de la fuerza resultante de contacto  $F$  en el eje (despreciando la fuerza debida a la gravedad y otras fuerzas de interacción) con lo que  $F = -M\omega^2 R$ , según ya se mencionó en las capítulos 11 y 12. Si el centro de masa *se halla* sobre el eje de rotación, la fuerza centrífuga resultante es nula, pero el *momento centrífugo* resultante no tiene por qué serlo. Por ejemplo, en la figura 13-16, la fuerza centrífuga es nula en todos los casos. Sin embargo, en el caso (c) existe un momento centrífugo que dará origen a fuerzas en los cojinetes, mientras que en los casos (a) y (b) el momento centrífugo es nulo. Un eje de rotación para

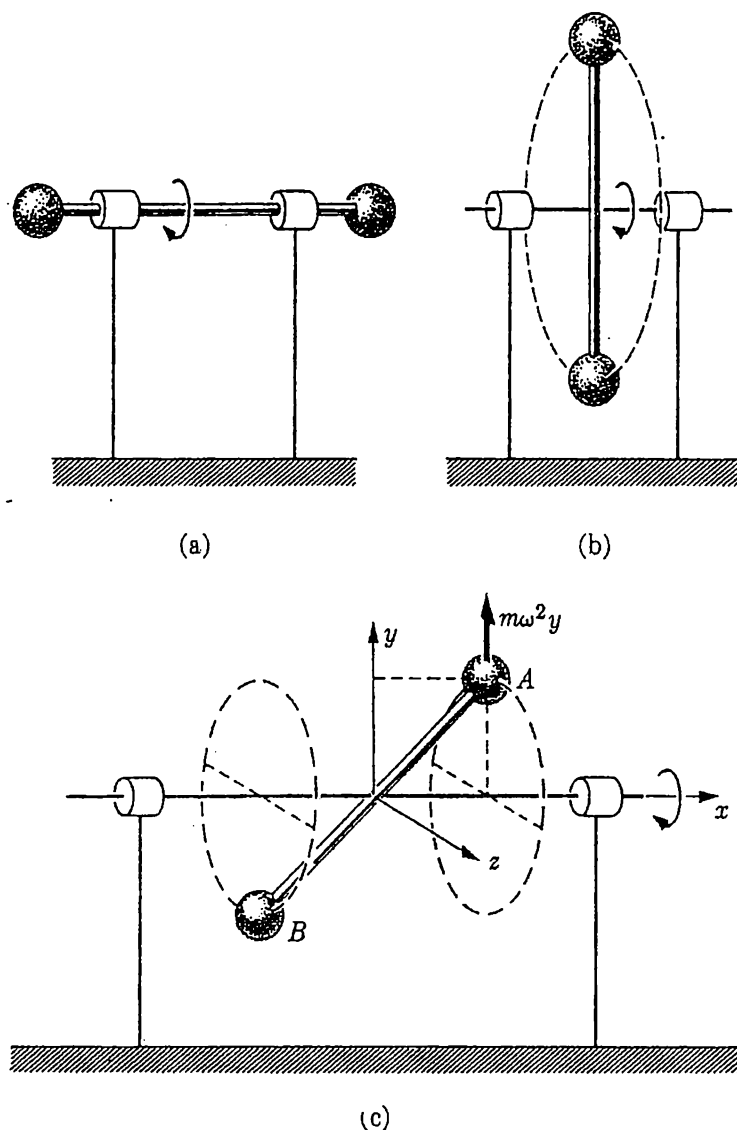


Fig. 13-16. En (a) y (b) el cuerpo rígido gira alrededor de un eje principal y no hay fuerzas en los cojinetes.

el cual sea nulo el momento centrífugo recibe el nombre de *eje principal* del cuerpo.

Podemos calcular fácilmente el momento centrífugo originado en la figura 13-16 (c) si suponemos que el cuerpo en rotación está constituido por dos puntos materiales  $A$  y  $B$  situados en los extremos de una barra sin masa. En un sistema de coordenadas que gire con el cuerpo, sean  $x$ ,  $y$  las coordenadas de uno de los puntos materiales respecto al centro de masa. El cuerpo gira alrededor del eje  $x$  y la fuerza centrífuga tendrá la dirección  $y$ , siendo su magnitud  $m\omega^2 y$ . La componente  $z$  del momento será, pues,  $m\omega^2 xy$ . Para el otro punto material del cuerpo se obtiene el mismo resultado y el momento centrífugo resultante respecto al centro de masa resulta ser  $\tau_z = 2m\omega^2 xy$ . Este resultado puede generalizarse fácilmente para un cuerpo arbitrario de la manera siguiente.

Imaginemos un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo que pase por el centro de masa (véase fig. 13-17). Supongamos que el vector velocidad angular coincide con el eje  $x$ . El sistema de coordenadas tiene su origen en el centro de

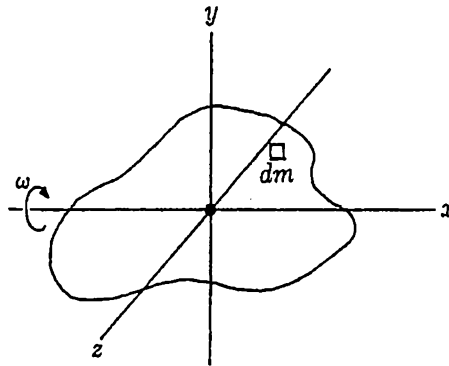


Figura 13-17

masa y gira *con* el cuerpo rígido. La contribución al momento debido a la inercia por parte de una masa elemental  $dm$  tiene por componente  $z$ ,  $\omega^2 xy dm$  y por componente  $y$ ,  $\omega^2 zx dm$ , con lo que las componentes del momento resultante son

$$\tau_z = \omega^2 \int xy dm \quad \text{y} \quad \tau_y = \omega^2 \int zx dm \quad (13-5)$$

Evidentemente, las componentes del momento debido a la inercia será nulas si

$$\int xy dm = 0 \quad \text{y} \quad \int zx dm = 0$$

Si el cuerpo fuera simétrico respecto a los ejes de coordenadas, habrían tantas contribuciones positivas como negativas a los productos  $yx$  y  $zx$  y el momento centrífugo sería nulo. A los ejes de simetría de este tipo se les da el nombre de *ejes principales* del cuerpo.

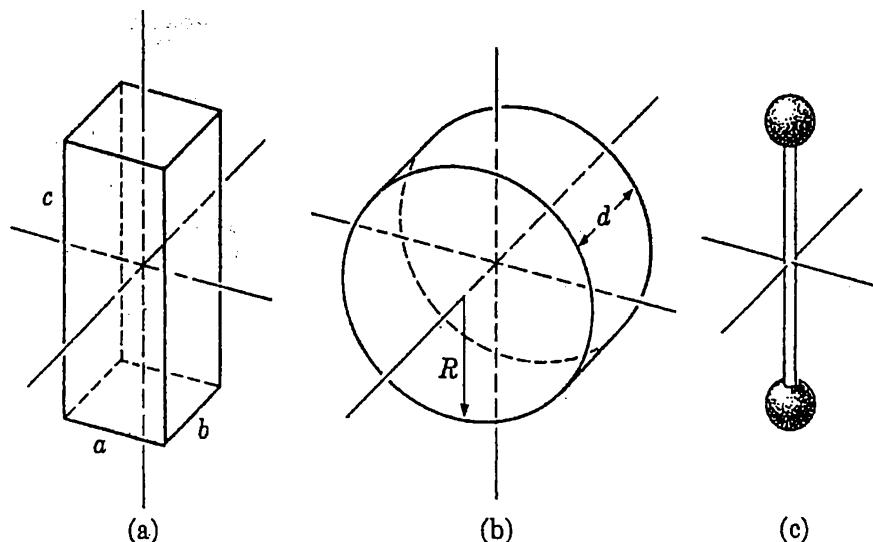


Fig. 13-18. Ejes principales de tres cuerpos rígidos.

En la figura 13-18 pueden verse los ejes principales de algunos cuerpos sencillos. Cuando el cuerpo gira alrededor de uno cualquiera de estos ejes, no habrán momentos centrífugos respecto al centro de masa del cuerpo y como los ejes principales pasan todos por el centro de masa, la fuerza centrífuga resultante también es nula. Los cuerpos que no sean simétricos como los de la figura 13-18 también poseen ejes principales. Para un cuerpo de forma arbitraria es siempre posible hallar tres ejes mutuamente ortogonales que pasen por el centro de masa y respecto a los cuales sean nulos los productos de inercia  $\int yz \, dm$ ,  $\int zx \, dm$ , y  $\int xy \, dm$ . Estos ejes son los *ejes principales* del cuerpo. En el caso de cuerpos sencillos homogéneos y simétricos, los ejes principales suelen hallarse directamente por simple examen. A cada eje principal corresponde un momento principal de inercia que, según veremos, juega un importante papel en la descripción del movimiento de rotación general de un cuerpo rígido.

**EJEMPLO.** Determinar los momentos principales de inercia de una placa rectangular delgada de masa  $M$  y lados  $a$  y  $b$ .

Dos de los ejes principales pasan por el centro de la placa y son paralelos a sus lados; el tercero es normal a la placa. Los momentos de inercia respecto a los ejes del plano de la placa son iguales que los de una barra delgada y tenemos

$$I_x = M \frac{a^2}{12} \quad I_y = M \frac{b^2}{12}$$

Según se indicó en el capítulo 12 (véase prob. 12-11), el tercer momento principal de inercia es, simplemente, en este caso

$$I_z = I_x + I_y = M \frac{a^2 + b^2}{12}$$

**13-4 Relación entre la velocidad angular y el momento cinético de un cuerpo rígido.** Recordemos que el momento cinético de un punto material respecto al origen ( $r = 0$ ) puede expresarse como el vector  $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ . El momento cinético total de un cuerpo rígido respecto al centro de masa puede expresarse como suma vectorial de las contribuciones elementales de este tipo. El momento cinético resultante puede descomponerse en componentes según los ejes de un sistema de coordenadas cuyo origen sea el centro de masa. En el estudio del movimiento en un plano, realizado en el capítulo 12, nos ocupábamos de una sola de las componentes del momento cinético, mientras que en el capítulo presente hemos puesto de manifiesto la naturaleza vectorial del momento cinético en algunos ejemplos particulares de movimiento. Dichos ejemplos eran tales que se daban el vector momento cinético y su movimiento en el espacio y el problema estribaba esencialmente en determinar la velocidad de variación del momento cinético y, por tanto, el momento resultante que se ejerce sobre el cuerpo.

Sin embargo, en tipos más generales del movimiento de cuerpos rígidos, el vector momento cinético no se comporta siempre de una manera evidente. Por ejemplo, si consideramos un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo, encontraremos que, solamente cuando coincida este eje con uno de los ejes principales, el vector momento cinético coincidirá en dirección con el eje de rotación. Si así no fuera, el momento cinético da vueltas en el espacio y el momento cinético y la velocidad angular no están relacionados simplemente por " $L = I\omega$ ." En cambio, hallaremos que es posible expresar el momento cinético en función de la velocidad angular si consideramos las componentes de esas cantidades según las direcciones de los ejes principales del cuerpo rígido. Comenzaremos el estudio de estas cuestiones demostrando que la velocidad angular puede describirse como cantidad vectorial.

*La velocidad angular como vector.* Imaginemos un cuerpo rígido que gire en torno a su centro de masa. En un intervalo corto de tiempo  $\Delta t$  un punto dado del cuerpo rígido se moverá sobre una circunferencia y, como el cuerpo es rígido, otros puntos deberán moverse (durante  $\Delta t$ ) a lo largo de trayectorias que se hallen en planos paralelos. El movimiento es equivalente a la rotación alrededor de un eje. Todos los puntos del eje permanecen en reposo en este movimiento; en realidad, estos puntos definen el eje de rotación.

En la figura 13-19 puede verse una esfera de radio  $a$  montada sobre una suspensión Cardan. Si hacemos girar la esfera un ángulo pequeño alrededor del eje  $y$ , el punto  $P$  se desplazará  $\Delta s_1$  hasta  $R$ . En cambio, si giráramos la esfera un ángulo pequeño alrededor del eje  $x$ , el punto  $P$  se desplazaría  $\Delta s_2$  hasta  $S$ . Cuando son pequeños los ángulos que hacemos girar la esfera, el desplazamiento  $\Delta s$  de  $P$  a  $Q$  es la suma vectorial de  $\Delta s_1$  y  $\Delta s_2$ , y daría igual que se girara primeramente alrededor de  $x$  y luego de  $y$ , o al revés, o que se realizaran simultáneamente ambas rotaciones. Si hacemos esto último,  $P$  va directamente a  $Q$  y el des-

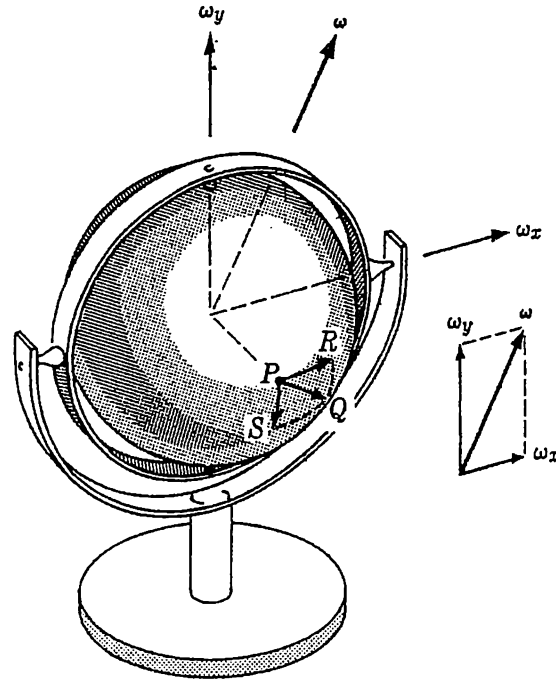


Fig. 13-19. La velocidad angular es una cantidad vectorial.

plazamiento puede considerarse, si lo deseamos, como resultado de una rotación alrededor de un eje perpendicular a  $PQ$ , con una velocidad angular  $\omega$  durante el tiempo  $\Delta t$ , con lo que  $\Delta s = \omega a \Delta t$ . Análogamente, los desplazamientos  $PR$  y  $PS$  se pueden considerar como resultantes de las velocidades angulares  $\omega_y$  y  $\omega_x$ ; es decir,  $\Delta s_1 = \omega_y a \Delta t$ ,  $\Delta s_2 = \omega_x a \Delta t$ . Se deduce, pues, de  $\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2$ , que no sólo los desplazamientos, sino también las velocidades angulares se suman como vectores.

Obsérvese que si bien las velocidades angulares y los desplazamientos angulares infinitesimales pueden considerarse cantidades vectoriales, los desplazamientos angulares finitos, no. (¡Supóngase, por ejemplo, que el desplazamiento  $PR$  hubiera hecho recorrer a  $P$  un cuadrante de circunferencia!)

Cuando gira un cuerpo rígido, todos sus puntos (salvo los del eje de rotación) se mueven y la velocidad puede expresarse en la forma

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (13-6)$$

donde  $\mathbf{r}$  es el vector de posición del punto respecto a un punto del eje de rotación.

*Momento cinético de un cuerpo rígido en rotación.* Como ejemplo de introducción, determinemos el momento cinético del cuerpo sencillo representado en las figuras 13-16(c) y 13-20. Consideraremos dicho cuerpo como constituido por dos masas puntuales  $A$  y  $B$  unidas por una barra rígida sin masa. La barra

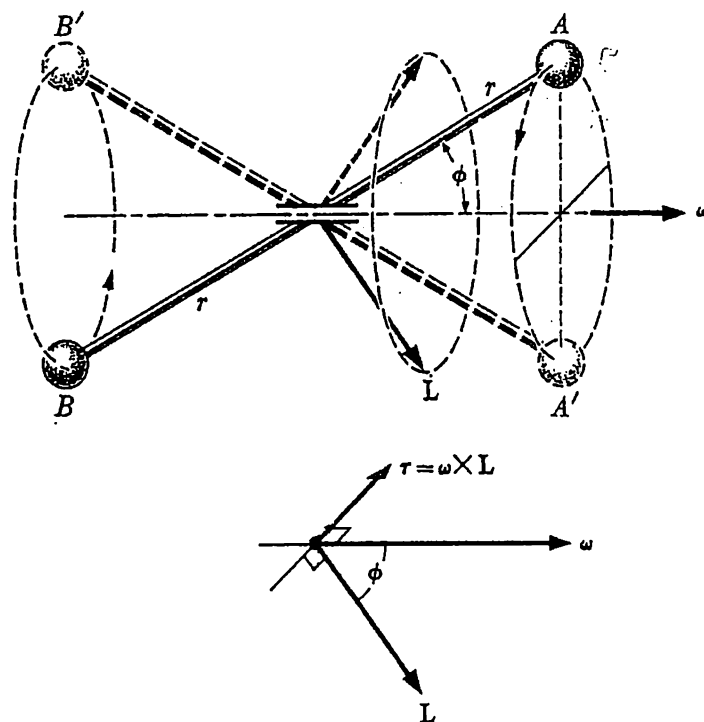


Fig. 13-20. Momento cinético de un cuerpo en rotación alrededor de un eje que no es principal.

gira alrededor de un eje que no es principal y forma un ángulo  $\phi$  con la barra, y el sentido de rotación es tal que el vector velocidad angular esté dirigido hacia la derecha, según se indica en la figura 13-20. Los dos puntos materiales describirán, evidentemente, trayectorias circulares de radio  $r \sin \theta$  si es  $2r$  la longitud de la barra. Cuando los puntos materiales se hallen en la posición indicada en la figura 13-20, es decir, en el plano del papel, la velocidad  $\mathbf{v}_a = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_a$  de  $A$  estará dirigida hacia afuera del papel y  $\mathbf{v}_b$  en el sentido opuesto. El momento cinético  $\mathbf{l}_a = \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a$  se halla entonces en el plano del papel y está dirigido en la forma indicada. Análogamente, el momento cinético de  $B$  es  $\mathbf{l}_b = \mathbf{r}_b \times \mathbf{p}_b$ . La velocidad de  $A$  tiene por magnitud  $v_a = (r \sin \phi)\omega$ , y en consecuencia la magnitud del momento cinético es  $l_a = mr^2\omega \sin \phi$ . La magnitud del momento cinético total es, pues,  $L = 2mr^2\omega \sin \phi$ .

La magnitud del momento cinético permanece constante pero la dirección varía continuamente al girar el vector momento cinético con el cuerpo y describir una superficie cónica, según se indica en la figura. Las componentes del momento cinético paralela y perpendicular al eje de rotación tienen las magnitudes constantes  $L \sin \phi$  y  $L \cos \phi$ . Sólo esta última componente varía de dirección, girando en un plano con velocidad angular  $\omega$ . La velocidad de variación del momento cinético originada por esta rotación se obtiene de la misma ma-



nera que en el caso del giroscopio o peonza en precesión (véase fig. 13-8) y obtenemos

$$\left| \frac{dL}{dt} \right| = \omega L \cos \phi = 2mr^2 \omega^2 \sin \phi \cos \phi$$

El momento necesario para mantener esta velocidad de variación del momento cinético es  $\tau = dL/dt$ , y está creado por las fuerzas de los cojinetes. El momento está dirigido hacia el plano del papel cuando el cuerpo se halla en la posición indicada en la figura 13-20. Es interesante observar que podemos expresar la magnitud, dirección y sentido del momento mediante la relación vectorial también representada en la figura.

$$\tau = \omega \times L \quad (13-7)$$

Antes de entrar en un estudio más general del momento cinético observaremos que la expresión  $L = 2mr^2 \omega \sin \phi$  del momento cinético puede interpretarse como producto del momento principal de inercia  $I_0 = 2mr^2$  por la componente de la velocidad angular  $\omega \sin \phi$  según el eje principal del cuerpo. Quede claro que esta interpretación tiene validez general, con lo que cuando se conozcan los momentos principales de inercia de un cuerpo, podrá obtenerse inmediatamente el momento cinético en función de las componentes de la velocidad angular según los ejes principales.

Para probar este resultado estudiaremos la rotación en torno a un eje fijo de un cuerpo de forma arbitraria y deduciremos una expresión para la compo-

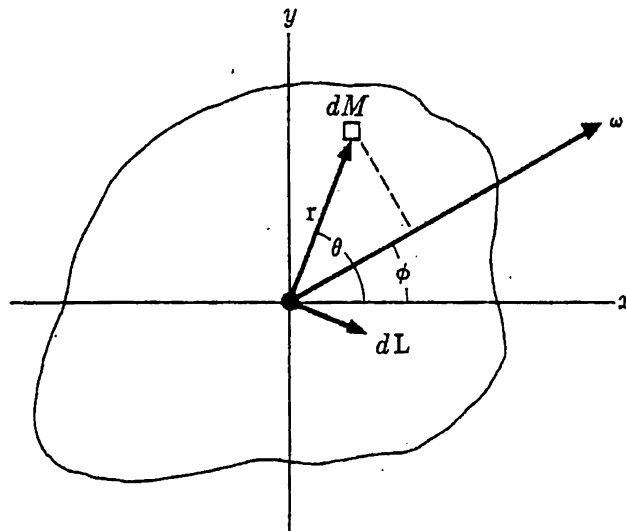


Fig. 13-21. Cada elemento de masa  $dM$  tiene un momento cinético  $dL = \omega r^2 \sin (\theta - \phi) dM$

nente del momento cinético según uno de los ejes de coordenadas. Se evitan complicaciones que no afectan a la generalidad del resultado, estudiando el caso de un cuerpo bidimensional en vez del de uno de tres dimensiones. Así, en la figura 13-21 los ejes  $x$  e  $y$  están en el plano del cuerpo y pasan por su centro de masa. La velocidad angular del cuerpo es  $\omega$  y forma un ángulo  $\phi$  con el eje  $x$ , según se indica. Un elemento de masa  $dM$  cuyo vector de posición sea  $\mathbf{r}$  tiene una velocidad  $\omega \times \mathbf{r}$  de magnitud  $\omega r \sin(\theta - \phi)$ ; un momento cinético respecto al centro de masa  $d\mathbf{L} = (\mathbf{r} \times \mathbf{v})dM$ , de magnitud  $dL = \omega r^2 \sin(\theta - \phi) dM$ ; y perpendicular a  $\mathbf{r}$ , en la forma indicada. Las componentes  $x$  e  $y$  del momento cinético son, pues,  $dL_x = (dL)\sin\theta$  y  $dL_y = -(dL)\cos\theta$ . Para la componente del momento cinético total obtenemos

$$\begin{aligned} L_x &= \int \omega r^2 \sin\theta (\sin\theta \cos\phi - \cos\theta \sin\phi) dM \\ &= \omega \cos\phi \int y^2 dM - \omega \sin\phi \int xy dM \end{aligned}$$

Si tomamos el sistema de coordenadas de manera que los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  coincidan con los *ejes principales*, el segundo término es nulo y la componente  $x$  del momento cinético es  $L_x = \omega_x I_x$ , donde  $\omega_x = \omega \cos\theta$  es la componente de  $\omega$  según el eje  $x$  e  $I_x = \int y^2 dM$  es el momento de inercia del cuerpo rígido respecto al eje  $x$ . [En el caso de un cuerpo rígido tridimensional  $I_x$  sería  $\int (y^2 + z^2) dM$ .] Así pues, las componentes del momento cinético *según los ejes principales* del cuerpo están relacionadas con las componentes de la velocidad angular según los mismos ejes de la siguiente manera:

$$L_x = I_x \omega_x, \quad L_y = I_y \omega_y, \quad L_z = I_z \omega_z \quad (13-8)$$

A continuación queremos hallar el momento que debe ejercerse para mantener el cuerpo rígido en rotación con la velocidad angular  $\omega$ . El vector momento cinético  $\mathbf{L}$  del cuerpo rígido girará con la velocidad angular  $\omega$  del cuerpo y tendremos  $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$ , para un observador en reposo. La componente  $z$  del momento es  $\tau_z = \omega_x L_y - \omega_y L_x$ . Si los ejes de coordenadas coinciden con los ejes principales tenemos  $L_y = I_y \omega_y$  y  $L_x = I_x \omega_x$ , y obtenemos

$$\tau_z = I_y \omega_x \omega_y - I_x \omega_y \omega_x = \omega_x \omega_y (I_y - I_x) \quad (13-9)$$

y análogamente para las componentes  $x$  e  $y$ . En la ecuación (13-9) vemos que  $\tau_z$  es nula si es nula  $\omega_x$  o  $\omega_y$ . Si  $\omega_y = 0$  la rotación se realiza alrededor del eje  $x$ , que es un eje principal y así vemos que la ecuación (13-9) da adecuadamente un momento nulo para la rotación alrededor de un eje principal. Además,  $\tau_z$  es nula si lo es  $I_y - I_x$ . Esta diferencia es nula, por ejemplo, en el caso de una placa

cuadrada que gire alrededor de un eje cualquiera de su plano y que pase por el centro de masa, y es análogamente cero para otros cuerpos que presenten un alto grado de simetría.

EJEMPLO. Una placa rectangular gira alrededor de un eje dirigido según una de sus diagonales (véase fig. 13-22). ¿Cuál es el momento que se ejerce sobre la placa? La velocidad angular tiene por componentes  $\omega_x = \omega \sin \theta$  y  $\omega_y = \omega \cos \theta$ , donde  $\operatorname{tg} \theta = b/a$ . Los momentos de inercia de la placa son  $I_x = Ma^2/12$  e  $I_y = Mb^2/12$ . La componente  $\tau_z$  del momento es, por tanto,

$$\tau_z = \omega_x \omega_y (I_y - I_x) = \omega^2 \sin \theta \cos \theta \left( \frac{Mb^2}{12} - \frac{Ma^2}{12} \right)$$

Este momento está originado por fuerzas iguales y opuestas que los cojinetes ejercen sobre el eje de rotación.

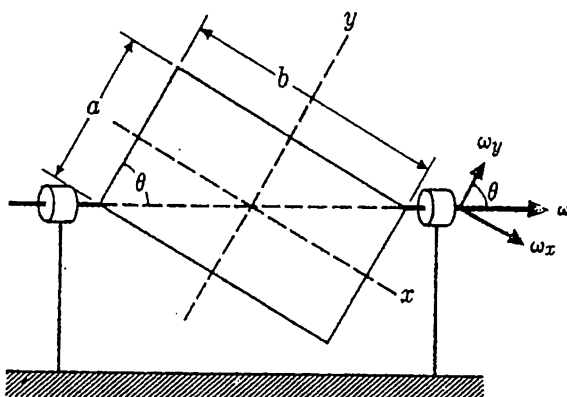


Fig. 13-22. Ejemplo

En el estudio anterior hemos visto que cuando un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo que no sea eje principal, el vector momento cinético no tendrá la dirección de la velocidad angular. En el caso bidimensional, el ángulo que forman los dos vectores puede hallarse a partir de la ecuación (13-8), de la que se obtiene  $L_y/L_x = (I_y/I_x)(\omega_y/\omega_x)$ . En consecuencia, si el vector velocidad angular forma un ángulo  $\phi$  con el eje  $x$  (que es principal), el ángulo  $\phi_1$  que forma el vector momento cinético con el eje  $x$  vendrá dado por  $\operatorname{tg} \phi_1 = (I_y/I_x) \operatorname{tg} \phi$  y el ángulo que forman los dos vectores será  $\phi_1 - \phi$ . Este ángulo será nulo si  $\phi = 0$ , es decir, si el cuerpo gira alrededor de un eje principal (eje  $x$ ) y también en el caso particular en que  $I_x = I_y$ . Entonces, si se fija el vector velocidad angular, como en el caso en que el cuerpo gire alrededor de un eje fijo, el vector momento cinético tendrá un movimiento de precesión en torno al vector velocidad angular, y aun cuando pueda mantenerse constante su magnitud, la dirección del momento cinético varía continuamente. La velocidad de variación corres-

pondiente del momento cinético exige que actúe continuamente sobre el cuerpo un momento  $\tau = \omega \times L$ .

En cambio, si el cuerpo gira libremente en el espacio alrededor de un eje no principal sin que actúe ningún momento de las fuerzas exteriores, permanecerán invariables la magnitud, dirección y sentido del vector momento cinético y el eje instantáneo de rotación del cuerpo realizará un movimiento de precesión en torno al vector momento cinético. Esta es la razón del movimiento tambaleante que se observa cuando se lanza un objeto tal como una raqueta de tenis. Sólo estará ausente el «tambaleo» cuando se haga girar el objeto alrededor de uno de sus ejes principales.

*Energía cinética de un cuerpo rígido en rotación.* La energía cinética de un cuerpo rígido en rotación con velocidad angular  $\omega$  es, desde luego,  $I\omega^2/2$ , donde  $I$  es el momento de inercia respecto al eje de rotación. Pero, como en el caso del momento cinético, conviene expresar simplemente la energía cinética en función de las componentes de la velocidad angular y de los momentos de inercia respecto a los ejes principales.

La energía cinética del elemento de masa  $dM$  de la figura 13-21 es  $dE = \omega^2 r^2 \sin^2(\theta - \phi) dM/2$ . Desarrollando esta expresión, obtenemos

$$E = \omega_x^2 \int y^2 dM + \omega_y^2 \int x^2 dM - 2\omega_x \omega_y \int xy dM \quad (13-10)$$

Como hemos convenido en que nuestro sistema de coordenadas tenga por ejes los principales, el último término es nulo, mientras que las dos primeras integrales son, respectivamente,  $I_x$  e  $I_y$ . En general, pues, tenemos

$$E = \frac{1}{2} I_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2 \quad (13-11)$$

donde, en el caso de un cuerpo tridimensional,  $I_x$  sería  $\int (y^2 + z^2) dM$ , etc.

**EJEMPLO.** Hallar la energía cinética de la placa en rotación de la figura 13-22.

La energía cinética de dicha placa se podría obtener, ciertamente, integrando las contribuciones a la energía cinética de cada elemento de masa. Sin embargo, es más fácil hallar las componentes de la velocidad angular  $\omega$  según los ejes principales del cuerpo. Dichas componentes son  $\omega_x = \omega \sin \phi$  y  $\omega_y = \omega \cos \phi$ . Entonces, como  $I_x = Ma^2/12$  e  $I_y = Mb^2/12$ , la energía cinética es

$$E = \frac{Ma^2 b^2 \omega^2}{12(a^2 + b^2)}$$

«Estabilidad» de la rotación. No hay ningún cuerpo físico que sea realmente rígido, hecho que tiene consecuencias muy interesantes en los casos de cuerpos

que se hallan exentos de momento resultante durante largos intervalos de tiempo, como ocurre con los vehículos espaciales.

Consideremos, por ejemplo, un cilindro metálico largo y uniforme que gire inicialmente alrededor de su eje de simetría de revolución (fig. 13-23). El metal del cilindro está sometido a fuerzas centrífugas dirigidas radialmente hacia afuera. Estas fuerzas de inercia tienden a deformar o someter a tensión al cuerpo, pero mientras la rotación tenga lugar solamente en torno al eje de simetría de revolución (que es eje principal) los esfuerzos son constantes y no se pierde energía. En cambio, si el movimiento del cilindro no fuera una rotación pura en torno a un eje principal, estas fuerzas de inercia «másicas» no serían constantes. En tal caso, un elemento de masa puede estar sometido a tensiones que varíen de dirección y sentido, además de magnitud, de un instante a otro. Estas fuerzas másicas *variables* y las deformaciones producen pérdidas energéticas a causa del rozamiento interno y la energía cinética de rotación se reducirá de manera correspondiente. (Recuérdese que un pedazo de hierro se calienta cuando se la flexiona en uno y otro sentido varias veces.)

Aun cuando estas fuerzas másicas variables pueden hacer disminuir la energía cinética de rotación, *no pueden* alterar el momento cinético de un cuerpo sobre el que se ejerce un momento resultante de las fuerzas exteriores nulo. La única manera de que tal cuerpo pueda tener una energía cinética decreciente y siga teniendo un momento cinético constante es que tenga un movimiento que tienda más y más hacia una rotación pura alrededor del eje principal que tenga momento de inercia máximo. Es decir, expresado en función del momento cinético, la energía cinética (para una rotación en torno a un eje principal) es  $E = L^2/2I$ . Si disminuye  $E$  mientras permanece constante  $L$ , deberá aumentar  $I$ .

Se han observado estos fenómenos en los movimientos de algunos satélites terrestres. Se hace intencionadamente que los satélites de forma de cohete giren alrededor del eje de simetría de revolución durante el lanzamiento. En tal caso, son paralelos los vectores momento cinético y velocidad angular, ya que el eje de revolución es un eje principal. Si es  $I_0$ , el momento de inercia respecto al eje principal, el momento cinético es  $L_0 = I_0\omega_0$  y la energía cinética es  $E_0 = I_0\omega_0^2/2 = L_0^2/2I_0$ .

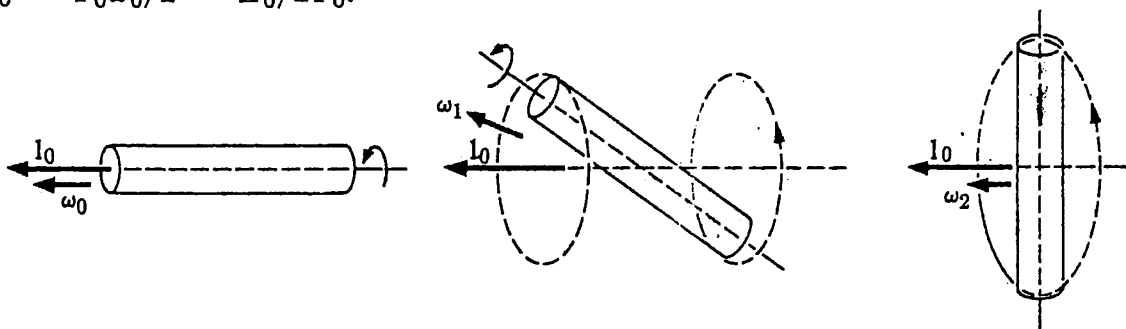


Figura 13-23

Por muchas razones, esta rotación inicial nunca está dirigida *exactamente* a lo largo del eje principal y las fuerzas másicas variables hacen que la energía cinética disminuya algo. Entonces se inicia la precesión del satélite. La rotación ya no se produce, ni siquiera aproximadamente, alrededor de un eje principal y el eje de revolución y el vector velocidad angular giran alrededor del vector momento cinético *constante*. Por último (al cabo de varios días) el movimiento se convierte en una rotación pura alrededor de un eje principal. Entonces, los vectores momento cinético y velocidad angular vuelven a ser paralelos. El momento cinético es el mismo de al principio, ya que no se ejerce sobre el cuerpo momento resultante alguno debido a las fuerzas exteriores, pero la velocidad angular y la energía cinética son menores. Como el movimiento es una rotación pura alrededor de un eje principal, las fuerzas másicas (fuerzas centrífugas de inercia) son constantes y la energía cinética ya no puede disminuir más. Por estas razones se dice que la rotación en torno al eje principal de mayor momento de inercia es estable, ya que un cuerpo sobre el que se ejerce un momento resultante exterior nulo, construido de un material real cualquiera, alcanzará siempre al final este tipo de movimiento.

### PROBLEMAS

13-1. Una masa  $m_1$  fija al extremo de un hilo de longitud  $d$  gira en un plano horizontal alrededor de un punto fijo con velocidad angular  $\omega$  (fig. 13-24). Cuando la masa cruza el eje  $y$  choca con una segunda masa  $m_2$  que se mueve paralelamente al eje  $z$ . Después de este choque, la velocidad de la segunda masa, que era inicialmente  $v = \omega d/2$ , se convierte en  $\omega d/4$ ; es desviada  $45^\circ$  pero sigue moviéndose en un plano paralelo al  $xz$ . (a) ¿Cuál es el momento cinético respecto a  $O$ , de cada una de las masas antes del choque? ¿Cuál es el momento cinético total? (b) ¿Cuál es el impulso angular comunicado a la segunda masa? ¿Cuál es el impulso angular comunicado a la primera masa? (c) ¿Cuál es el momento cinético total después del choque? ¿Cuál es la orientación del nuevo plano de movimiento de la masa  $m_1$ ? (e) ¿Por qué debe conservarse el momento cinético

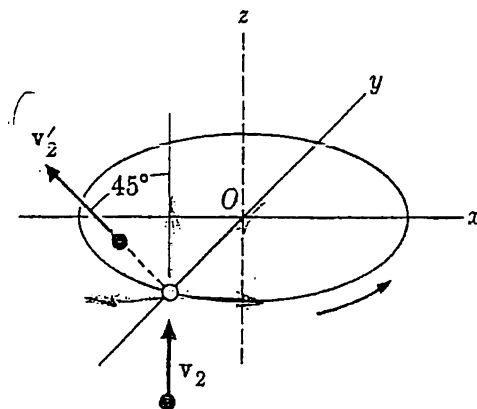


Figura 13-24

respecto a  $O$ ? ¿Existe algún otro punto que cumpla la misma condición?

13-2. Una haltera consiste en dos partículas, cada una de masa  $m$ , situadas en los extremos de una varilla de masa despreciable y longitud  $d$  (véase fig. 13-6). La varilla tiene un cojinete montado en su centro y puede girar libremente en un

plano normal al eje soportante. Si la varilla tiene una velocidad angular  $\omega$ , ¿qué impulsos habrá que aplicar al eje, a una distancia  $d$  del cojinete, para que el plano de rotación gire un ángulo  $\theta$  y siga estando en reposo el centro de masa del sistema?

13-3. Un disco uniforme de radio  $R$  y masa  $m$ , montado por su centro sobre un cojinete universal, gira inicialmente en un plano horizontal con velocidad angular  $\omega$  (fig. 13-25). Una masa  $m$  con velocidad  $v = \omega R/2$  dirigida a lo largo del eje  $z$ , choca con el borde del disco y rebota con una velocidad igual pero directamente opuesta. (a) ¿Cuál es el momento cinético del disco y de la masa antes del choque? (b) ¿Qué impulsos angulares se comunican al disco y a la masa? (c) ¿Cuál es el momento cinético del disco después del choque?

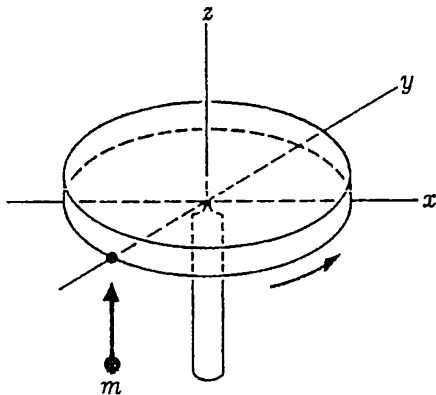


Figura 13-25

13-4. Un hombre se halla de pie sobre una plataforma giratoria que puede girar libremente alrededor de un eje vertical y sostiene entre sus manos una rueda de bicicleta en rotación, según se indica en la figura 13-26. Cuando el eje de rotación de la rueda está horizontal, el hombre se halla en reposo. Estudiar qué pasa: (a) Cuando el hombre cambia el ángulo de inclinación que forma el eje

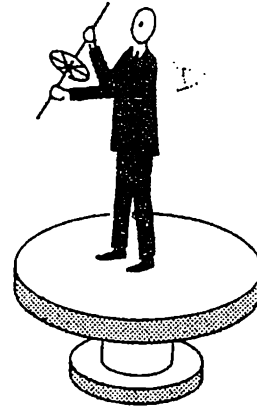


Figura 13-26

de rotación con el plano horizontal. (b) Cuando se hace girar el eje de rotación en un plano horizontal. (c) Si el hombre para la rotación de la rueda cuando está vertical.

13-5. Un giroscopio consiste en un disco circular uniforme de masa  $M = 1$  kg y radio  $R = 0,2$  metros. El disco gira con una velocidad angular de  $\omega = 400$  rad/s. El giroscopio está animado de un movimiento de precesión cuyo eje forma un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal, según se indica en la figura 13-27. El giroscopio gira alrededor de un punto situado a una distancia  $d = 0,3$  m del centro del disco. ¿Cuál es la velocidad angular de precesión?

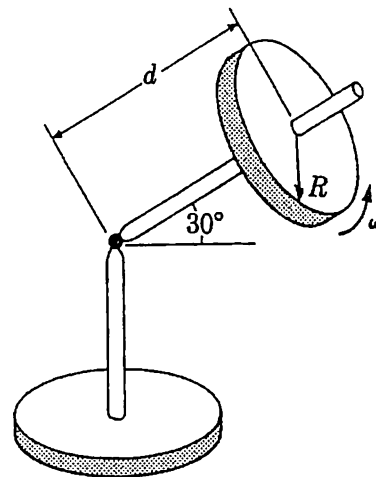


Figura 13-27

13-6. ¿Cuál es la velocidad angular de precesión de una esfera maciza montada sobre un eje diametral y que puede girar libremente alrededor de un punto del eje situado en la superficie de la esfera? Sea  $\omega$  la velocidad angular de rotación de la esfera. ¿Sería la misma la respuesta si la esfera fuera una capa esférica en vez de una esfera maciza?

13-7. Montada sobre un buen juego de cojinetes, una ruedecita de 100 g y momento de inercia  $400 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$  disminuye su frecuencia de rotación en una hora de 6000 rpm a 1000 rpm. (a) ¿Qué momento ejercen los cojinetes sobre la rueda? (Supóngase constante el momento.). (b) Supóngase que se emplean cojinetes del mismo tipo para construir una suspensión Cardan para la rueda anterior y que se monta luego el giroscopio sobre una mesa giratoria y que su eje de rotación está orientado hacia el Norte. ¿En qué dirección estará orientado el eje de rotación del giroscopio al cabo de una hora? Supóngase que la rueda gira ahora constantemente a 6000 rpm (puede estar accionada por un motorcito) y que el momento de la suspensión es el mismo hallado en el apartado (a).

13-8. Consideremos un péndulo consistente en una barra delgada que puede girar alrededor de un eje horizontal que pasa por su extremo superior, según se indica en la figura 13-28. En su otro extremo, la barra soporta un disco de radio  $R$  y masa  $m$  que gira a una velo-

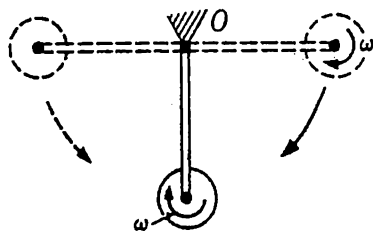


Figura 13-28

cidad angular constante  $\omega$  alrededor de un eje horizontal que pasa por su centro. La masa de la barra es despreciable. (a) Se suelta el péndulo desde su posición horizontal. ¿Cuál debe ser la magnitud y dirección de la velocidad angular de rotación del disco para hacer igual a cero el momento cinético total del péndulo respecto al punto  $O$ , en la posición más baja del péndulo? Supóngase que la oscilación del péndulo tiene lugar de derecha a izquierda. (b) ¿Cuál es el momento cinético total del péndulo respecto a  $O$  cuando pasa por su posición más baja oscilando de izquierda a derecha?

13-9. Consideremos de nuevo el péndulo del problema 13-8, pero supongamos que el disco gira alrededor del eje de la barra (fig. 13-29). Si es  $\omega$  la

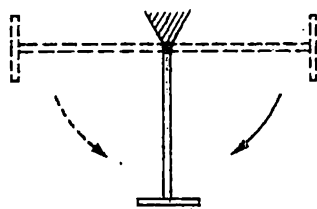


Figura 13-29

velocidad angular del disco, ¿cuál es ahora el momento cinético en la posición más baja del péndulo?

13-10. El péndulo del problema 13-9 realiza un movimiento pendular circular como se indica en la figura 13-30. (a) ¿Cuál es el momento cinético total

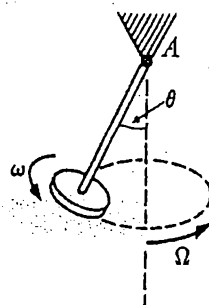


Figura 13-30



del péndulo respecto a  $A$  cuando es  $\Omega$  su velocidad angular y es  $\theta$  el ángulo que forma el péndulo con la vertical? (b) Estudiar el efecto de los sentidos de movimiento del péndulo y del disco.

13-11. Se tiene que montar un motorcito con su eje perpendicular al eje de rotación de un satélite. El rotor del motor tiene una masa  $m$  y un radio de giro  $k$  y los cojinetes sobre los que se monta el rotor se hallan separados una distancia  $d$ . Si es  $\omega_1$  la velocidad angular del motor, ¿qué valor puede alcanzar la velocidad angular  $\omega_2$  de rotación del satélite si la fuerza que se ejerce sobre los cojinetes del motor no deben superar el doble del valor de dichas fuerzas cuando se hace funcionar el motor en el laboratorio?

13-12. Un cuerpo rígido está constituido por tres esferas, cada una de masa  $m$  y radio  $r$ , situadas en los vértices de un triángulo equilátero sin masa. La distancia entre los centros de las esferas es  $6r$ . Determinar los momentos principales de inercia del cuerpo.

13-13. (a) Determinar los momentos principales de inercia de los cuerpos de las figuras 13-18 (b) y (c). (b) ¿Cuáles deberían ser las dimensiones de un cilindro de revolución, macizo y uniforme, para que fueran iguales los momentos de inercia respecto a los tres ejes principales?

13-14. Un satélite terrestre pesa 12 kg y es esférico. (Supóngase densidad uniforme.) El radio del satélite es 30 cm e inicialmente la esfera gira alrededor de un diámetro a razón de 8 rev/s. Se desea que, una vez en órbita, sólo gire a razón de 0,1 rev/s y se propone que se lancen cuatro pesas de 1/4 kg unidas a cuerdas, a fin de aumentar el momento de inercia y disminuir así la velocidad de rotación. (a) ¿A qué distancia del centro deberán estar las pesas, si se hallaban inicialmente sobre la superficie de la esfera? (Supón-

gase que los pesos son masas puntuales.) (b) ¿Creemos que la proposición es sensible? Considérese la energía cinética y propóngase un procedimiento para resolver el problema que surge. (c) ¿Qué pasaría si fallara el lanzamiento de tres de las cuatro pesas?

13-15. Se montan sobre varillas y un eje de masas despreciables, tres pesas de 4, 8 y 12 kg (fig. 13-31). (a) ¿Dónde habría que situar la pesa de 12 kg para que el sistema se halle equilibrado estáticamente (centro de masa sobre el eje)? (b) Con el sistema equilibrado estáticamente y con  $x = 30$  cm, hallar el momento cinético respecto al centro de masa si gira el sistema con  $\omega = 10$  rad/s. (c) ¿Cuál es el momento ejercido por los cojinetes en estas condiciones? (d) ¿Dónde habría que situar la masa de 12 kg para que el sistema se hallara equilibrado dinámicamente (momento y fuerza de inercia nulos)?

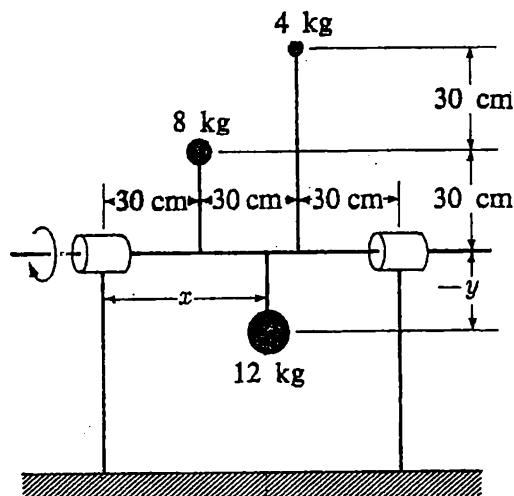


Figura 13-31

13-16. Se monta una varilla delgada y uniforme de masa  $M$  y longitud  $d$  por su centro de masa sobre un eje inclinado  $45^\circ$  respecto a su longitud. ¿Qué momento ejercen los cojinetes si gira la varilla con velocidad angular  $\omega$ ?

13-17. Una varilla delgada de masa  $M$  y longitud  $d$  está suspendida del techo por un punto de suspensión en uno de sus extremos. Se da a la varilla un movimiento inicial que hace que su extremo inicial describa una trayectoria circular con una velocidad angular  $\omega$ . (a) ¿Qué dirección tiene el vector velocidad angular? (b) Si es  $\theta$  el ángulo que forma con la vertical el eje de la varilla, ¿cuáles son las componentes de  $\omega$  según los ejes principales? (c) ¿Cuál es el momento cinético de la varilla respecto al punto de suspensión? (d) ¿Cuál es la velocidad de variación del momento cinético?

13-18. Un satélite terrestre pesa 50 kg y tiene la forma de un cilindro de 180 cm de longitud y 30 cm de diámetro. Supóngase uniforme la distribución de masa dentro del cilindro. Inicialmente, el satélite gira alrededor de su eje de revolución a razón de 10 rev/s. (a) ¿Cuáles son los ejes principales y cuáles los momentos de inercia correspondientes? (b) ¿Cuáles son los valores iniciales de la energía cinética de rotación y del momento cinético? (c) Al cabo de mucho tiempo, el satélite gira alrededor de su eje principal de mayor momento de inercia. ¿Cuál es, entonces, la velocidad de rotación y la energía cinética de rotación? (d) La energía cinética disipada, ¿elevará apreciablemente la temperatura del satélite?

13-19. En el capítulo 11 se vio que si la velocidad de variación de un vector

$A$  es  $(dA/dt)_{S'}$  respecto a un sistema  $S'$  de coordenadas que gira a la velocidad angular constante  $\omega$ , la velocidad de variación del mismo vector respecto a un sistema de coordenadas fijo  $S$  es  $(dA/dt)_S = (dA/dt)_{S'} + (\omega \times A)$ . Aplicar este resultado al vector momento cinético y determinar el momento de las fuerzas de inercia que se ejerce sobre un cuerpo en rotación en el sistema  $S'$ . Analizar el problema ilustrado en la figura 13-7 del texto desde este punto de vista.

13-20. Se sabe que el momento cinético de rotación de la Tierra no permanece absolutamente fijo en el espacio, sino que tiene una ligera precesión. En consecuencia, deberá ejercerse sobre la Tierra un momento resultante respecto a su centro de masa. (a) Describir cómo es posible que el campo gravitatorio solar proporcione este momento y (b) estimar la magnitud del mismo. (c) Estimar después la velocidad angular de precesión de la Tierra.

13-21. Un meteorito enorme, procedente del espacio exterior, choca contra la Tierra en el Polo Norte, formando un ángulo  $\theta$  con el eje terrestre. La masa del meteorito es 1/100 de la de la Tierra y tiene la velocidad de escape. ¿Perturbará este impacto al movimiento de rotación de la Tierra? ¿De qué manera? La Tierra puede considerarse como esfera homogénea e ignorar la influencia del meteorito sobre el momento de inercia de la Tierra respecto a su eje.

## TEMPERATURA Y CALOR

*Resumen.* Los conceptos de temperatura y calor se desarrollaron en un principio a partir de efectos macroscópicos y posteriormente se estableció su relación con el movimiento y la energía moleculares. Algunos de los temas tratados en este capítulo son la definición operativa de temperatura, los termómetros del tipo de dilatación lineal, el termómetro de gas a volumen constante y la escala absoluta de temperaturas. Los experimentos de interacciones térmicas condujeron a las ideas de equilibrio térmico, calor específico y a los mecanismos de transmisión del calor: conducción, convección y radiación. Termina el capítulo con una breve nota histórica.

En los capítulos anteriores nos hemos ocupado, casi siempre, del movimiento global de la materia, es decir, el movimiento descrito por la traslación del centro de masa y la rotación alrededor de él. No nos hemos ocupado en particular del posible movimiento interno de las partículas elementales de que está constituida la materia ni de las propiedades de la materia en sí. En este capítulo y en los siguientes estudiaremos algunas de las propiedades macroscópicas (globales) de la materia y de la explicación microscópica (atomística) de las mismas.

Todos sabemos que las moléculas de la materia no se hallan en reposo sino que están en movimiento continuo unas respecto a otras. En un gas, las moléculas se mueven por todo el volumen disponible, mientras que en un sólido las moléculas oscilan, o vibran, en torno a posiciones de equilibrio. Veremos más adelante que la *temperatura* es una medida de la *energía media de traslación* por molécula y que el *calor* es una medida de la energía molecular *total* (incluidas las energías de rotación y traslación). Las relaciones existentes entre los conceptos macroscópicos de temperatura y calor y los conceptos microscópicos del movimiento molecular, se desarrollaron gradualmente. Este desarrollo siguió a un camino muy intrincado que constituye una de las partes más atractivas de la Historia de la Física.\* En un apartado posterior se presentarán algunos apuntes históricos.

---

\* Véase *Harvard Case Histories in Experimental Science*, tomo I, editado por JAMES B. CONANT, Harvard University Press, Cambridge, Mass. (1957). En particular, Caso 1. «Robert Boyle's Experiments in Pneumatics», Caso 3. «The Early Development of the Concepts of Temperature and Heat» y Caso 4. «The Atomic-Molecular Theory» son los más pertinentes para lo que se trata en este capítulo.

En este capítulo vamos a ocuparnos principalmente de los aspectos macroscópicos de la temperatura y del calor. (Al lector le será útil, a pesar de todo, para retener la idea del movimiento molecular, es decir, la interpretación microscópica de estos conceptos.) Hay que distinguir entre temperatura y calor. La temperatura es una propiedad intensiva de un cuerpo, mientras que el calor es una propiedad extensiva. Si repartimos entre varios vasos un litro de agua a  $50^{\circ}\text{C}$  de temperatura, cada vaso conserva la temperatura inicial de  $50^{\circ}\text{C}$ . (Veremos que la temperatura es una medida de la energía *media* de traslación por molécula.) En cambio, el calor contenido en medio litro de agua a  $50^{\circ}\text{C}$  es la mitad del contenido en un litro de agua a  $50^{\circ}\text{C}$ . (Entendiendo que el calor es una medida de la energía molecular total y en medio litro de agua hay la mitad de moléculas que en un litro.)

**14-1 Temperatura.** La temperatura, al igual que la longitud, el tiempo y la masa, debe definirse operativamente y nos vemos obligados a decir que temperatura es lo que se mide con un termómetro. Pero, ¿qué es un termómetro y cómo está calibrado?

Consideremos primeramente un termómetro basado en la dilatación lineal del mercurio, del agua, del alcohol, o incluso de un metal. La escala de temperaturas de dicho instrumento se podrá establecer con ayuda de dos baños de referencia. Los más convenientes son el de hielo fundente y el del agua hirviendo a una atmósfera de presión, y se mide la dilatación de la sustancia termométrica colocando el instrumento en el baño frío en primer lugar y luego en el caliente. Esta dilatación se divide entonces en un cierto número de partes iguales que reciben el nombre de *grados*. [Casi siempre utilizaremos la escala centígrada o de Celsius\*, en la cual se asigna a los baños de referencia los valores  $0^{\circ}\text{C}$  y  $100^{\circ}\text{C}$ , respectivamente. En la escala Fahrenheit,† se asigna a dichos baños los valores  $32^{\circ}\text{F}$  y  $212^{\circ}\text{F}$ , respectivamente. Por tanto, un grado Fahrenheit sólo es  $5/9$  de grado centígrado.]

Evidentemente, los termómetros que empleen sustancias termométricas diferentes, deberán coincidir al compararlos en los puntos  $0^{\circ}\text{C}$  y  $100^{\circ}\text{C}$ , a causa del método empleado para establecer las escalas. Pero no deberán coincidir necesariamente a temperaturas intermedias. Las discrepancias a temperaturas intermedias se deben a la diferente manera de dilatarse que tienen los diversos líquidos o sólidos en diferentes regiones de temperatura. Nuestra elección de la sustancia termométrica para la definición de la escala de temperatura sería, pues, un tanto arbitraria. Desde este punto de vista, encontraremos que un gas resulta mucho más satisfactorio, como sustancia termométrica, que otras sustancias.

---

\* A. C. CELSIUS, astrónomo sueco (1701-1744).

† G. D. FAHRENHEIT, físico alemán (1686-1736).

**14-2 Termómetro de gas y escala absoluta de temperaturas.** Así como en los sólidos y líquidos varía mucho con la temperatura la dilatación por grado, el comportamiento de los gases tiende a ser el mismo en determinadas condiciones. Antes de estudiar los detalles del termómetro de gas, detengámonos brevemente a repasar la idea de presión de un gas y su medida.

*Presión de un gas.* La presión en un gas (o en un líquido) es la fuerza por unidad de superficie que se ejerce sobre las paredes del recipiente que lo contiene, o sobre cualquier otra superficie dentro del gas. Si se introduce en él una pequeña placa de prueba, veremos que el gas no ejerce sobre ella fuerza resultante y la presión que se ejerce sobre una cara de la placa está equilibrada por la presión sobre la otra cara, según se ilustra esquemáticamente en la figura 14-1(a). Entonces, para poder medir la presión con un instrumento que mida fuerzas, como, por ejemplo, un resorte dinamométrico, será necesario eliminar el gas existente a un lado de la placa. Puede esto lograrse encerrándola y haciendo el vacío en uno de los dos lados. De esta manera se obtiene un instrumento de medida de presiones (manómetro), como el indicado en la figura 14-1(b). En este dispositivo se mantiene en posición un émbolo móvil, de masa despreciable, por medio de un resorte y de manera que cierre un extremo de un cilindro en cuyo interior se ha hecho el vacío. Se calibra el resorte de manera que el desplazamiento del émbolo respecto a su posición de equilibrio determine de manera inmediata la fuerza exterior y, en consecuencia, la presión que se ejerce sobre el émbolo. El comportamiento de este instrumento de medida de presiones es, desde luego, análogo al de la curvatura de un tubito de hojalata originada por la presión atmosférica al extraer de su interior parte del aire existente.

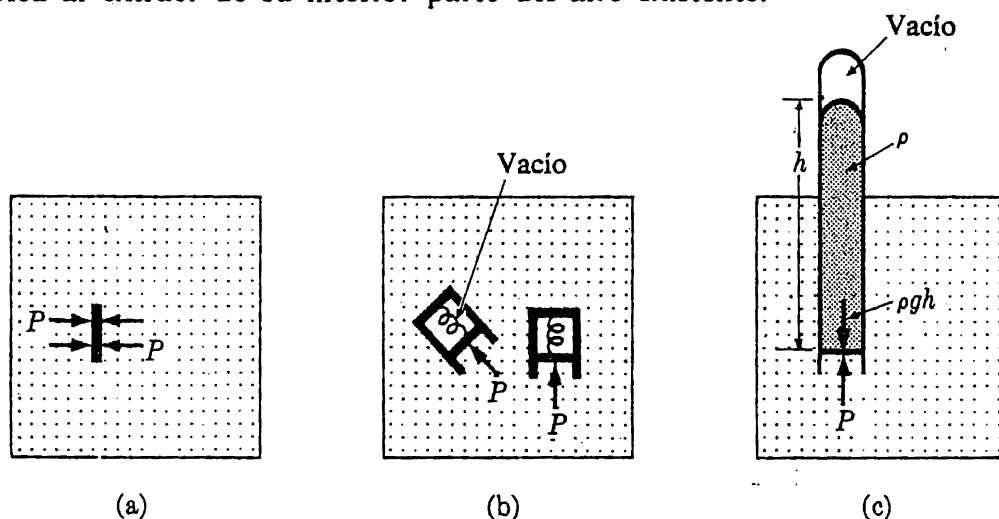


Fig. 14-1. (a) Cuando se introduce en un gas una placa de prueba, no se ejerce sobre el gas fuerza resultante alguna. (b) Si a un lado de la placa hay una cámara vacía, podrá medirse, en principio, la presión del gas con un resorte. (c) La fuerza del resorte puede sustituirse por el peso de una columna líquida que produzca una fuerza  $\rho gh$  por unidad de superficie. Esto sirve también para medir la presión del gas.

Podemos determinar ahora inmediatamente una propiedad fundamental de la presión. Haciendo girar la placa de prueba de la figura 14-1 en una dirección cualquiera, se ve que la presión en un gas o en un líquido es independiente de la orientación de la superficie sobre la que se mide la presión. Cuando el émbolo está dirigido hacia abajo, hallamos la misma presión que cuando está dirigido hacia arriba. Evidentemente, el émbolo también podrá estar en equilibrio si se equilibra la presión del gas con una fuerza que no esté ejercida por un resorte. Por ejemplo, con el émbolo hacia abajo, podemos sustituir la fuerza del resorte por el peso de una columna líquida, por ejemplo, una columna de agua o de mercurio, según se representa en la figura 14-1(c). Si es  $h$  la altura de la columna líquida requerida para el equilibrio, el líquido ejercerá por unidad de superficie del émbolo una fuerza  $\rho gh$  donde  $\rho$  es la densidad del líquido y  $g$  la aceleración de la gravedad. Esta fuerza por unidad de superficie es, pues, igual a la presión que había que medir. Este procedimiento de medida de la presión se emplea mucho. La presión se expresa frecuentemente en centímetros de mercurio. (La presión atmosférica, por ejemplo, es aproximadamente igual a 76 cm de mercurio.)

En el capítulo siguiente veremos que desde el punto de vista molecular, la presión del gas es consecuencia de los choques de las moléculas gaseosas con las paredes del recipiente, o con cualquier otra superficie existente dentro del gas. En el capítulo 3 estudiamos la fuerza que originaba un chorro de partículas y dimos lo más esencial de la relación entre el movimiento molecular y la presión. La magnitud de la fuerza y en consecuencia la presión del gas, se vio era proporcional al cuadrado de la velocidad de traslación de las moléculas y del número de moléculas por unidad de volumen. Por tanto, cuando se mantiene constante este último (gas a volumen constante), la presión sólo dependerá del valor medio del cuadrado de la velocidad de traslación (o, mejor aún, de la energía cinética media de traslación) de las moléculas.

*Termómetro de gas.* En la figura 14-2 se ha representado esquemáticamente el termómetro utilizado para definir la temperatura en función de la presión del gas. A este instrumento se le llama termómetro de gas a volumen constante. Aun cuando todos los gases tienden a comportarse de igual manera a presiones suficientemente bajas y temperaturas suficientemente elevadas, como gas patrón para el termómetro se ha elegido el hidrógeno, tanto por licuarse a una temperatura muy baja como por hallarse fácilmente disponible en forma pura. Se mantiene constante el volumen de gas existente en el depósito y en el tubo adjunto, enrasando el mercurio en la marca  $A$ . Sobre  $B$  se tiene el vacío y la presión en el depósito queda determinada por  $h$  que es la separación entre los niveles  $B$  y  $A$ .

La escala del termómetro de gas se obtiene de la manera siguiente. Se introduce el depósito de gas en un baño con hielo fundente y se mide la presión  $P_0$ . A continuación, se introduce dicho depósito en un baño de agua hirviendo a

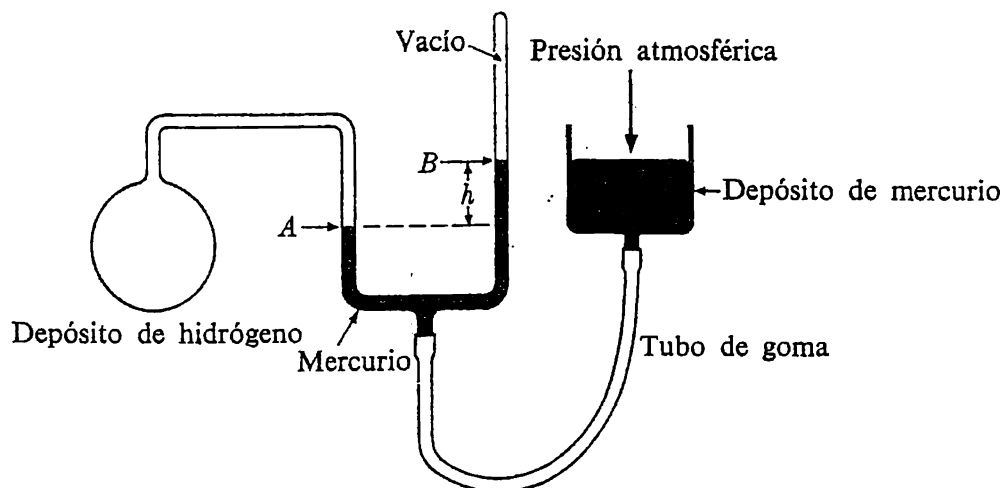


Fig. 14-2. Termómetro de gas a volumen constante. Para determinar la temperatura de un ambiente dado, se coloca en él el depósito de gas. El depósito de mercurio se mueve verticalmente hasta que el nivel del mercurio en el capilar de la izquierda alcanza una señal de enrase  $A$ . Ésta determina el volumen constante. El desnivel  $h$  entre  $A$  y  $B$  determina la presión del gas,  $P = \rho gh$ . Para un aparato dado, la presión  $P$  define la temperatura.

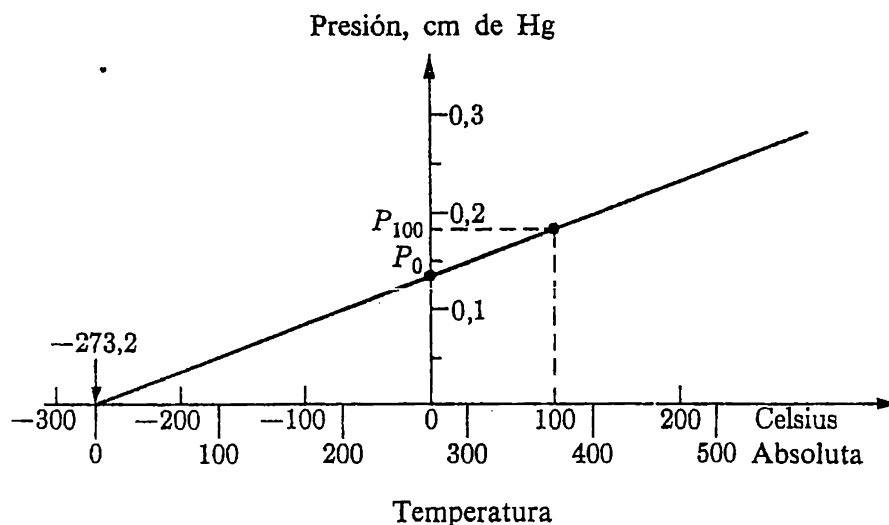


Fig. 14-3. Calibrado de un termómetro de gas a volumen constante. Se mide la presión del gas a las temperaturas de fusión y ebullición del agua. El cociente entre las presiones resulta ser  $P_{100}/P_0 \simeq 1,366$ . Por definición, se toman las temperaturas de estos dos baños como diferentes en  $100^\circ$ . La recta que pasa por estos dos puntos define la escala de temperaturas. La escala Kelvin, o de temperaturas absolutas, tiene el cero en el punto en que la recta corta al eje de temperaturas.

la presión de una atmósfera y se mide la nueva presión interior  $P_{100}$ . Se divide en 100 partes iguales la escala de presiones entre  $P_0$  y  $P_{100}$ . Para representar una unidad de temperatura, es decir, un grado centígrado, se elige entonces un incremento de presión igual a  $(P_{100} - P_0)/100$ .

En la figura 14-3 se ha ilustrado gráficamente este procedimiento, habiéndose tomado el eje de ordenadas como escala de presiones y el de abscisas como escala de temperaturas. Por definición, en la escala Celsius la temperatura del hielo fundente es  $0^{\circ}\text{C}$  y la del agua en ebullición a la presión atmosférica de 76 cm de mercurio es  $100^{\circ}\text{C}$ , por lo que podrán representarse gráficamente las presiones  $P_0$  y  $P_{100}$ . La recta que pasa por estos dos puntos establece y define la escala de temperaturas. Cuando se coloca el depósito de gas en un recinto a temperatura desconocida se podrá medir la presión y la temperatura quedará determinada por la gráfica.

La pendiente de la recta de la figura 14-3 está determinada por las presiones medidas  $P_0$  y  $P_{100}$ . En el caso del hidrógeno, medidas precisas del cociente  $P_{100}/P_0$  han dado el valor 1,366 y por tanto la pendiente de la recta para el hidrógeno está definida por  $(P_{100} - P_0)/100 = 0,366 P_0/100 = P_0/273,2$ . En otras palabras, la recta de la figura 14-3 corta al eje de temperaturas en el punto  $-273,2^{\circ}\text{C}$  y ateniéndonos literalmente a lo dicho antes, ello implicaría que un gas a la temperatura de  $-273,2^{\circ}\text{C}$  no ejercería presión alguna, lo que correspondería a una velocidad nula de las moléculas. Por tanto, la relación entre presión y temperatura medida en grados celsius, podrá expresarse algebraicamente en la forma

$$P = \frac{P_0}{273,2} t + P_0 = \frac{P_0}{273,2} (t + 273,2) \quad (14-1)$$

o sea

$$t + 273,2 = \frac{P}{P_0} 273,2$$

*Escala absoluta de temperaturas.* Si trasladamos el cero de la escala de temperaturas desde el punto de congelación del agua a  $-273,2^{\circ}\text{C}$ , obtenemos una nueva escala llamada *escala absoluta de temperaturas*. La relación existente entre la temperatura celsius  $t$  y la correspondiente temperatura absoluta  $T$ , también llamada temperatura *Kelvin*,\* será pues,

$$T = t + 273,2$$

según se indica en la figura 14-3. De la ecuación (14-1) y de la figura 14-3, se deduce que la temperatura absoluta es directamente proporcional a la presión, es decir,

$$T = \frac{P}{P_0} 273,2 \quad (14-2)$$

---

\* WILLIAM THOMSON KELVIN, físico y matemático británico (1824-1907).



Obsérvese que el tamaño de la unidad de temperatura es el mismo para ambas escalas; es decir, entre los puntos de congelación y ebullición del agua a una atmósfera hay  $100^\circ$ . Para indicar que la temperatura se expresa en grados absolutos o Kelvin, puede escribirse  $T^\circ\text{abs}$  o bien  $T^\circ\text{K}$ . (La letra  $T$  no la reservamos exclusivamente para indicar temperatura absoluta, sino que la emplearemos para expresar temperatura en general.)

Comparado con los termómetros líquidos y sólidos, el termómetro de gas resulta particularmente útil porque su escala de temperaturas, para un gas cualquiera de densidad suficientemente baja, resulta satisfactoria en todo el dominio de temperaturas. En otras palabras, el cociente entre las presiones del gas a las temperaturas de ebullición y congelación del agua,  $P_{100}/P_0 \simeq 1,366$ , es el mismo para todos los gases. Recordemos que la medida de este cociente propor-

TABLA 14-1

Temperatura $^\circ\text{K}$	Fenómenos
0	Cero absoluto
$\sim 0,005$	Temperatura más baja obtenida en el laboratorio
1	El helio se congela bajo presión
4	El helio hierve
20	El hidrógeno hierve
45	Superficie del planeta Plutón
90	El oxígeno hierve
234	El mercurio se funde
273,2	El agua se congela
373	El agua hierve
900	Turbina de vapor
2000	El hierro se funde
3000	Filamento de wolframio de una lámpara
4500	El carbono hierve
6000 - 10 000	Superficie de las estrellas
6170	El wolframio hierve
15 000	Casi todas las sustancias están ionizadas totalmente
25 000	Onda de choque con una velocidad 20 veces mayor que la del sonido
300 000	Globo de fuego de la bomba atómica, de 15 m de diámetro
$10^6$	Corona solar
$10^7 - 10^8$	Interior de las estrellas
$10^8$	Bomba de hidrógeno

ciona la base para el establecimiento de la escala de temperaturas en conjunto y del punto de cero absoluto en  $-273,2^{\circ}\text{C}$ . Nuestra aseveración de que la escala de temperaturas basada en gases diferentes resulta satisfactoria en todo el dominio de temperaturas implica, desde luego, que las temperaturas a que nos referimos sean superiores a la del punto de condensación del gas. Para la medida de temperaturas inferiores al punto de condensación del gas del termómetro (unos  $20^{\circ}\text{K}$  para el hidrógeno), es evidente que no puede emplearse el termómetro de gas y deberá definirse de nuevo la escala de temperaturas, según veremos en el capítulo 19.

Un termómetro que emplee una sustancia líquida o sólida se puede calibrar con un termómetro de gas colocando éste, junto con el otro, en un baño a temperatura variable. Los puntos correspondientes a  $0^{\circ}\text{C}$  y  $100^{\circ}\text{C}$  concuerdan, desde luego, pues se han tomado como puntos de referencia para la construcción de escalas en los termómetros, pero a otras temperaturas, pueden observarse divergencias. Un termómetro de mercurio en vidrio, que no haya sido corregido, señala un exceso de  $0,1^{\circ}\text{C}$  a  $50^{\circ}\text{C}$ .

*Dominio de temperaturas.* En las investigaciones científicas y técnicas modernas, el dominio de temperaturas en que se trabaja es extraordinariamente grande. No obstante, existe un límite inferior definido de las temperaturas que pueden alcanzarse, si bien no parece existir límite superior. En la tabla 14-1 se da una escala representativa del dominio de temperaturas para diversos fenómenos.

**14-3 Equilibrio térmico. Calor específico. Calorimetría.** Pasemos ahora a estudiar la interacción de cuerpos de temperaturas diferentes. Como no nos interesa el movimiento global de los cuerpos, los consideraremos en reposo. Nuestro interés se centra en las interacciones entre los movimientos térmicos o moleculares en el interior de los cuerpos. Consideremos el caso en que un cuerpo caliente, es decir, un conjunto de moléculas rápidas, se pone en contacto con un cuerpo frío en el cual las moléculas se mueven lentamente. Esperamos que las moléculas más lentas aumenten su velocidad y la disminuyan las rápidas, hasta alcanzar un cierto equilibrio. En otras palabras, «circulará» energía térmica (calor) del cuerpo más caliente al más frío, hasta que se alcance un estado de equilibrio. Deseamos hallar las temperaturas de los cuerpos antes y después de dicha interacción.

*Calor específico.* Estudiemos ahora los resultados experimentales obtenidos de experimentos de interacción térmica. Se ponen en contacto dos cuerpos que inicialmente tenían temperaturas diferentes y se observa que tienden a alcanzar una temperatura común intermedia. Los cambios de temperatura no se producen instantáneamente, sino que tienen lugar en forma gradual. La velocidad con que se produce este cambio depende de la naturaleza del contacto, de las

formas y tamaños de los cuerpos y de los materiales que los constituyen. Durante el tiempo en que varía la temperatura de un cuerpo, las diversas partes del cuerpo tienen temperaturas diferentes. Cuando la temperatura del cuerpo no varía con el tiempo, se dice que aquél está en *equilibrio térmico*. Por ahora, sólo nos ocuparemos de la temperatura de los cuerpos una vez han alcanzado su equilibrio térmico.

En el primer grupo de experimentos, utilizaremos cuerpos del *mismo* material, pero que tienen temperaturas iniciales *diferentes*. Al entrar los cuerpos en contacto, evolucionan hacia una temperatura final común de equilibrio  $T_f$ , y los cambios de temperatura resultan ser inversamente proporcionales a las masas respectivas de los cuerpos. Luego, tenemos  $m_a \Delta T_a = -m_b \Delta T_b$ , donde  $\Delta T_a = T_f - T_a$  es el cambio de temperatura sufrido por el cuerpo  $A$ , y  $\Delta T_b = T_f - T_b$  es el sufrido por el cuerpo  $B$ .

Cuando se ponen en contacto térmico dos cuerpos de materiales *diferentes*, en la determinación de los cambios de temperatura intervienen otros factores además de las masas. Por ejemplo, cuando se realizan experimentos térmicos con cuerpos de igual masa, uno de cobre y otro de plomo, se ve que la temperatura del plomo varía el triple que la del cobre; cuando se realizan experimentos térmicos con masas iguales de agua y cobre, la temperatura de éste varía unas once veces más que la del agua; y cuando se realizan experimentos análogos con plomo y agua, la variación de temperatura del plomo resulta ser treinta y tres veces mayor que la del agua. En cierto sentido, puede decirse que 1 g de plomo «actúa como» 1/33 g de agua y que 1 g de cobre actúa como 1/11 g de agua. Otros experimentos indican que 33 g de plomo actúan como 1 g de agua, etcétera. Por tanto, nos vemos conducidos a definir una cantidad que mida la «eficacia» de un material en los experimentos térmicos. Esta cantidad es el *calor específico*  $c$ . La razón de los calores específicos de dos cuerpos se define como la razón de los cambios de temperatura experimentados por dos cuerpos de igual masa al llevarlos a contacto térmico. Así pues, si los cambios de temperatura de dos cuerpos  $A$  y  $B$  de igual masa resultan ser  $\Delta T_a$  y  $\Delta T_b$ , la razón de sus calores específicos  $c_a$  y  $c_b$  se define de la manera siguiente

$$\frac{c_a}{c_b} = - \frac{\Delta T_b}{\Delta T_a} \quad (m_a = m_b)$$

En consecuencia, si se hace igual a la unidad el calor específico del agua, los calores específicos del plomo y el cobre serán 1/33 y 1/11, respectivamente, de acuerdo con los resultados experimentales. Podemos pasar a determinar los calores específicos de otras sustancias líquidas y sólidas, algunos de los cuales se consignan en la tabla 14-2. En el capítulo 16, tabla 16-2, se darán los calores específicos de algunos gases.

TABLA 14-2. CALORES ESPECÍFICOS DE ALGUNOS LÍQUIDOS Y SÓLIDOS CONOCIDOS, DETERMINADOS CON RESPECTO AL CALOR ESPECÍFICO DEL AGUA A 15°C

<i>Líquidos</i>		<i>Sólidos</i>	
Acetona	0,53	Hierro	0,55
Benceno	0,41	Aluminio	0,21
Alcohol metílico	0,60	Cobre	0,092
Aceite mineral	0,5	Plomo	0,031
Agua	1 a 15° C	Hielo	0,48 a - 20° C
		Vidrio	0,093
		Amianto	0,20
		Plata	0,056

Otros experimentos de interacciones térmicas con cuerpos de calores específicos y masas diferentes demuestran que los cambios de temperatura que se obtienen están relacionados por la ecuación

$$m_a c_a \Delta T_a = -m_b c_b \Delta T_b$$

o sea

$$m_a c_a (T_f - T_a) = -m_b c_b (T_f - T_b) \quad (14-3)$$

según era de esperar de nuestro estudio anterior y de los resultados experimentales.

**EJEMPLO.** En un litro de agua a 20° C se sumerge un pedazo de 500 g de aluminio a 300° C. Suponiendo que no se desprende calor del sistema, ¿cuál es la temperatura del sistema agua-aluminio, una vez alcanzado el equilibrio térmico?

Representando por  $T_f$  la temperatura de equilibrio y siendo  $c_{Al} = 0,21$ , tenemos  $500 \cdot 0,21(300 - T_f) + 1000(20 - T_f) = 0$  o sea  $T_f \simeq 46^\circ\text{C}$ .

Si se conoce el calor específico  $c_a$  de un cuerpo  $A$ , se podrá obtener el calor específico  $c_b$  de otro cuerpo  $B$  mediante un experimento de mezcla (contacto) en el que se midan  $\Delta T_a$  y  $\Delta T_b$ . Tenemos entonces,  $c_b = (m_a/m_b)(|\Delta T_a|/|\Delta T_b|)c_a$ . Mencionaremos que los calores específicos de, por ejemplo, los metales cobre y plomo, obtenidos mezclando uno y otro con agua, son compatibles con el valor que se obtiene para el cociente  $c_{Cu}/c_{Pb}$  mediante experimentos de contacto directo entre el cobre y el plomo.

**Calor.** Obsérvese la semejanza existente entre el resultado dado por la ecuación (14-3) y los distintos principios de conservación que hemos estudiado en capítulos anteriores. Un cambio cuantitativo  $m_a c_a \Delta T_a$ , de una propiedad de un cuerpo  $A$  va acompañado de un cambio cuantitativo  $m_b c_b \Delta T_b$ , igual y opues-

to, de una propiedad del cuerpo *B*. Ocurre como si la suma de las propiedades  $mcT$  de los dos cuerpos se mantuviera constante. La propiedad a que nos referimos recibe el nombre de *calor* y se representa por  $Q$ . En capítulos posteriores veremos que esta propiedad es equivalente a una energía y que podemos considerar el calor como la energía del movimiento de las moléculas de un cuerpo.

Si la variación del calor la representamos por

$$\Delta Q = cm \Delta T \quad (14-4)$$

podremos escribir el resultado de la ecuación (14-3) en la forma

$$\Delta Q_a + \Delta Q_b = 0 \quad \text{o sea} \quad \Delta Q_a = -\Delta Q_b \quad (14-5)$$

La variación del contenido calorífico de un cuerpo será, pues, positiva o negativa, según que aumente o disminuya la temperatura del cuerpo. Cuando se hallan en contacto térmico dos cuerpos, puede considerarse que el calor pasa del cuerpo más caliente al más frío, de tal manera que la cantidad de calor que sale de un cuerpo, penetra en el otro.

Los calores específicos de todas las sustancias, incluida el agua, varían algo con la temperatura. Para la mayoría de las sustancias, no son grandes las variaciones de los calores específicos en el intervalo de temperaturas entre 0°C y 100°C, por ejemplo; así, el calor específico del agua sólo varía un 1 % mientras que el del níquel varía un 10 %. Cuando la temperatura de un cuerpo varía de  $T_1$  a  $T_2$ , el calor que absorbe es

$$\Delta Q = m \int_{T_1}^{T_2} c(T) dT \quad (14-6)$$

expresión que se reduce a la (14-4) cuando es constante  $c$ .

La unidad de calor se define como el calor requerido para elevar la temperatura de *un gramo de agua de 14,5°C a 15,5°C* y se le llama *caloría pequeña* o simplemente *caloría*; a veces se utiliza una unidad 1000 veces mayor, llamada *kilocaloría* o *caloría grande*. En los países de habla inglesa es frecuente el empleo de la *British thermal unit* (Btu) que es la cantidad de calor necesaria para elevar 1°F la temperatura de una libra de agua.

El calor específico de un cuerpo se medirá, pues, en calorías por gramo y grado Celsius en el sistema cgs y en kilocalorías por kilogramo y por grado Celsius en el sistema Giorgi. Evidentemente, los valores numéricos de los calores específicos serán los mismos en uno y otro sistema.

*Fusión y vaporización.* Cuando las sustancias pasan de sólido a líquido o de líquido a gas, la experiencia indica que se absorbe una cantidad de calor relativamente grande, si bien la temperatura permanece constante. Estas absor-

ciones de calor no están relacionadas directamente con el calor específico, puesto que se trata de una absorción de calor que no va acompañada de una variación de temperatura. Estos calores absorbidos reciben el nombre de *calor latente de fusión* y *calor latente de vaporización* y son las cantidades de calor que absorbe un gramo de sustancia cuando se funde o se evapora, respectivamente. Los cuerpos pueden también pasar directamente del estado sólido al gaseoso y en este caso, el calor absorbido por gramo recibe el nombre de *calor latente de sublimación*. En las tablas 14-3 y 14-4 se consignan los calores latentes de fusión y de vaporización de algunas sustancias conocidas.

TABLA 14-3. CALORES LATENTES DE FUSIÓN

<i>Sustancia</i>	<i>Temperatura de fusión, °C*</i>	<i>Calor latente de fusión, cal/g</i>
Agua	0	79,7
Parafina	52,4	35,1
Plomo	327	5,86
Cobre	1083	42,0
Mercurio	-39	2,82
Plata	961	21,1

TABLA 14-4. CALORES LATENTES DE VAPORIZACIÓN

<i>Sustancia</i>	<i>Temperatura de ebullición, °C*</i>	<i>Calor latente de vaporización, cal/g</i>
Agua	100	539,6
Mercurio	357	65,0
Argón	-186	37,6
Helio	-268,6	6,0

\*A la presión de 76 cm de mercurio.

**14-4 Calor y energía.** Desde el punto de vista de la teoría cinética, el calor no es más que energía molecular y la identificación del calor como forma de la energía es algo inherente a la teoría. Sin embargo, históricamente, esta identificación se debe a la labor de JAMES JOULE (1818-1889), JULIUS MAYER (1814-1878) y otros que demostraron que *siempre que se disipa una cantidad dada de energía mecánica, se produce la misma cantidad de calor*. En el capí-

tulo 17 estudiaremos más detalladamente esta cuestión. Incidentalmente, las unidades de calor y de energía mecánica guardan la relación  $4,1815 \text{ joule} = 1 \text{ caloría}$ .

El lector debe tener presente que el desarrollo de la Mecánica y del calor ha tenido lugar por caminos totalmente diferentes. Por una parte se tiene el estudio de la *interacción mecánica* de cuerpos. Por otra el estudio de la temperatura y de la *interacción térmica* de cuerpos. Estas dos disciplinas, casi totalmente independientes, fueron reunidas por la obra de JOULE y, como ocurre siempre que se descubren nexos entre disciplinas, se progresó rápidamente en nuevos aspectos de la Ciencia. La relación entre calor y energía y el desarrollo de la teoría atómica de la química que se había producido poco antes, dieron paso al desarrollo y aceptación de la teoría cinética.

**14-5 Conducción del calor.** En los apartados anteriores considerábamos los estados de cuerpos en interacción térmica, antes y después de las interacciones, es decir, los estados inicial y final de equilibrio térmico de los cuerpos. Durante la interacción, el sistema no se halla en equilibrio térmico; las temperaturas de los cuerpos en interacción son diferentes y varían con el tiempo. Del cuerpo más caliente circula calor hacia el más frío y la cantidad de calor cedida por segundo depende de la diferencia de temperaturas entre los cuerpos y del material del medio interpuesto entre ellos. Existen tres tipos de cesión del calor: conducción, convección y radiación. En la conducción, el calor se cede solamente a causa del movimiento molecular y los choques entre moléculas rápidas y lentas, sin desplazamiento global de la materia. En cambio, la convección se debe al movimiento global de la materia y sólo tiene importancia en líquidos y gases. Por último, la radiación del calor es una interacción electromagnética entre cuerpos y no precisa de la existencia de un medio material entre los cuerpos. Por el momento, vamos a considerar solamente la conducción del calor. En un apartado posterior se estudiarán brevemente la convección y la radiación.

Para estudiar experimentalmente la conducción del calor podemos, al menos en el principio, utilizar un dispositivo como el representado esquemáticamente en la figura 14-4. Los dos extremos  $a$  y  $b$  de una barra recta uniforme se mantienen a las temperaturas constantes  $T_a$  y  $T_b$  respectivamente. Por ejemplo, el extremo  $b$  puede estar sumergido en un baño de hielo fundente, en cuyo caso  $T_b = 0^\circ\text{C}$ , y  $a$  puede mantenerse en contacto con una fuente térmica que mantenga una temperatura  $T_a$  constante. Se aísla térmicamente la superficie lateral de la barra de manera que el calor que penetra por  $a$  en la barra debe pasar al baño de hielo por  $b$ . El calor entregado a este baño en un segundo puede medirse mediante la cantidad de hielo que se funde en un segundo. También puede medirse la temperatura en  $a$ , así como la distribución de temperaturas

a lo largo de la barra. Imaginemos ahora que utilizamos dicho dispositivo experimental y que estudiamos el flujo calorífico, es decir, la cantidad de calor que circula por la barra en un segundo, en función de diversos parámetros, tales como la diferencia de temperaturas  $T_a - T_b$ , la longitud  $L$  de la barra, su sección recta  $A$  y el material que la constituye. Además, podemos estudiar el efecto del aislamiento de la superficie lateral de la barra tanto sobre el flujo calorífico como sobre la distribución de temperaturas a lo largo de la barra.

El resultado de una serie de medidas de este tipo indica que el flujo calorífico es (a) proporcional a la diferencia de temperaturas  $T_a - T_b$ , (b) inversamente proporcional a la longitud  $L$  de la barra, (c) proporcional al área de la sección recta de la barra y (d) dependiente del material de que esté ésta constituida. Además, hallamos que la temperatura a lo largo de la barra decrece linealmente desde  $T_a$  hasta  $T_b$  mientras la superficie lateral de la barra esté aislada evitando así las fugas de calor. Si se suprime este aislamiento térmico, la

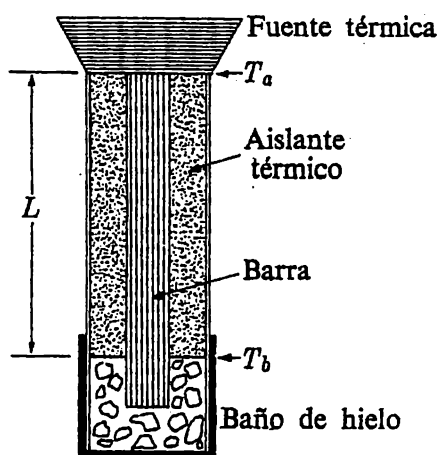


Fig. 14-4. Conducción del calor a lo largo de una barra.

distribución de la temperatura deja de ser lineal, según se indica esquemáticamente en la figura 14-5. En este último caso, el flujo calorífico a lo largo de la barra no es el mismo en todos los puntos de ésta.

De los resultados de experimentos realizados con una barra aislada térmicamente se deduce que el flujo calorífico es proporcional a la *pendiente* o *gradiente*  $(T_a - T_b)/L$  de la distribución de la temperatura a lo largo de la barra. En realidad, hallamos que aunque no sea lineal la distribución de la temperatura, el flujo calorífico en un cierto punto es proporcional al gradiente  $dT/dx$  en dicho punto. Como, además, el flujo calorífico es proporcional al área de la sección recta de la barra, podemos tomar la magnitud del flujo proporcional a  $(dT/dx)A$ .



El calor circula en el sentido de las temperaturas decrecientes. En otras palabras, si la temperatura crece con  $x$ , de manera que  $dT/dx$  es positiva, el flujo calorífico tiene lugar en el sentido negativo de las  $x$ ; y si la temperatura disminuye al aumentar  $x$ , con lo que  $dT/dx$  es negativa, el flujo calorífico tendrá lugar en el sentido positivo. En consecuencia, si llamamos  $q$  al flujo calorífico, contado positivo en el sentido positivo de las  $x$ ,  $dT/dx$  y  $q$  tendrán signos opuestos y obtenemos

$$q = -KA \frac{dT}{dx} \quad (14-7)$$

La constante de proporcionalidad  $K$ , que depende del material que constituye la barra, recibe el nombre de *conductibilidad calorífica*. En el sistema cgs, la conductibilidad calorífica se mide en  $\text{cal}/(\text{s} \cdot \text{cm} \cdot \text{grado})$  y en el sistema Giorgi en  $\text{kcal}/(\text{s} \cdot \text{m} \cdot \text{grado})$ . En la tabla 14-5 se consignan los valores de las conductibilidades caloríficas de algunos materiales conocidos.

En el estudio del experimento de conducción calorífica se supuso que la barra había estado en contacto con la fuente térmica  $a$  y el baño de hielo  $b$  un tiempo suficientemente largo para haber alcanzado lo que se llama *estado estacionario*. En tal caso, la temperatura a lo largo de la barra ya no varía con el tiempo y el flujo calorífico que penetra por  $a$  en la barra es igual al flujo saliente medido en  $b$ . Si no fuera así, habría un flujo total entrante en la barra y la temperatura de ésta debería aumentar continuamente. Claro está que durante los instantes inmediatos a haber puesto en marcha la fuente térmica variará la distribución de la temperatura en la barra y por  $a$  penetrará más calor del que sale por  $b$ . El tiempo necesario para alcanzar el estado estacionario es proporcional a la capacidad calorífica total de la barra e inversamente proporcional a su conductibilidad calorífica. En el apartado siguiente estudiaremos brevemente un caso en el cual varían con el tiempo la temperatura y el flujo a lo largo de la barra.

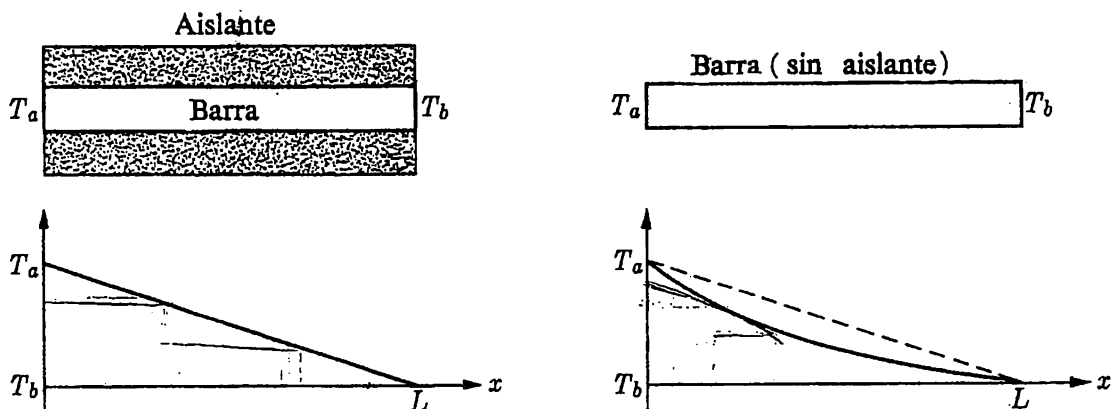


Fig. 14-5. Distribución de la temperatura a lo largo de una barra que está aislada térmicamente y a lo largo de otra que no lo está.

TABLA 14-5. CONDUCTIBILIDADES CALORÍFICAS

Sustancia	$K$ , cal/s·cm·grado
Aluminio	{ 0,49 a 100° C 0,56 a 300° C
Cobre	0,92
Plomo	0,08
Acero (1 % de carbono)	{ 0,125 a 100° C 0,089 a 600° C
Plata	0,97
Madera	$2 \cdot 10^{-4}$
Lana de vidrio (400 kg/m <sup>3</sup> )	$1,7 \cdot 10^{-4}$
Hormigón	$2 \cdot 10^{-3}$
Aire (seco)	$5,6 \cdot 10^{-5}$
Helio	$3,4 \cdot 10^{-4}$
Oxígeno	$5,6 \cdot 10^{-5}$
Agua	$1,32 \cdot 10^{-3}(1 + 0,003t)$ ; ( $t = 0$ a $t = 80^\circ \text{C}$ )
Aceite de máquinas	$(0,28 \text{ a } 0,40) \cdot 10^{-3}$

EJEMPLO 1. Se unen dos barras, una de cobre y otra de acero, en la forma indicada en la figura 14-6. La longitud de la barra de cobre,  $L_2 = 20$  cm es el doble de la longitud  $L_1$  de la barra de acero. Se mantiene un extremo de la barra de cobre a la temperatura  $T_2 = 0^\circ \text{C}$  y el extremo libre de la barra de acero se mantiene a la temperatura  $T_1 = 100^\circ \text{C}$ . Determinar la temperatura en la unión de las dos barras y el flujo calorífico total a través de ellas. El área  $A$  de la sección recta de las dos barras es la misma e igual a  $10 \text{ cm}^2$ . Las superficies laterales de las barras están aisladas térmicamente.

Representemos por  $T_j$  la temperatura desconocida en la junta de las dos barras. Si la conductibilidad calorífica de la barra de acero es  $K_1$ , el flujo calorífico total que atraviesa la barra de acero es  $q_1 = K_1 A (T_1 - T_j) / L_1$ . Análogamente, obtenemos  $q_2 = K_2 A (T_j - T_2) / L_2$  para la magnitud del flujo calorífico a través de la barra de cobre.

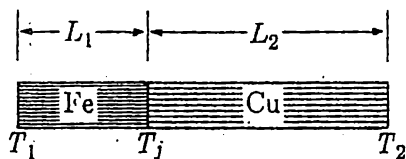


Figura 14-6

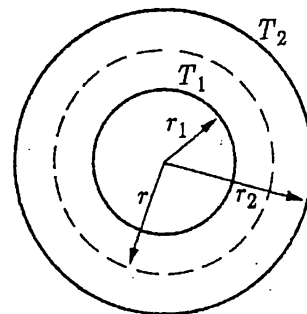


Figura 14-7

En el estado estacionario, tenemos  $q_1 = q_2$ , que nos da una ecuación para el cálculo de la temperatura  $T_j$  en la junta:

$$T_j = \frac{T_1 + T_2(K_2L_1/K_1L_2)}{1 + (K_2L_1/K_1L_2)}$$

Si introducimos los valores numéricos  $K_1 = 0,125$ ,  $K_2 = 0,92$  (véase Tabla 14-5) y si  $L_2 = 2 L_1$ , obtenemos

$$T_j = \frac{100}{(1 + 0,92)/(0,125 \cdot 2)} \simeq 21^\circ\text{C}$$

El flujo calorífico a través de las barras será, pues,

$$q = \frac{(0,92 \cdot 10)(21 - 0)}{20} \simeq 9,6 \text{ cal/s}$$

**EJEMPLO 2.** Un tubo cilíndrico largo tiene un radio interior  $r_1$  y un radio exterior  $r_2$ , según se indica en la figura 14-7. Las superficies interior y exterior del tubo se mantienen a las temperaturas  $T_1$  y  $T_2$ , respectivamente. ¿Cuál es el flujo medio a través del cilindro, por unidad de longitud del cilindro, y cuál es la distribución radial de temperatura si es  $K$  la conductibilidad calorífica del material del cilindro?

Consideremos el flujo calorífico a través de un cilindro de revolución de radio  $r$  interior al tubo en la forma indicada en la figura 14-7. Si representamos por  $dT/dr$  el gradiente de temperatura en  $r$ , el flujo calorífico a través de la superficie cilíndrica de radio  $r$  es

$$q_r = -K(2\pi r) \frac{dT}{dr}$$

ya que el área de la superficie cilíndrica, por unidad de longitud del tubo, es  $2\pi r$ . En el estado estacionario, este flujo calorífico es el mismo que el flujo calorífico total  $q$  por unidad de longitud a través del cilindro (independiente de  $r$ ). Por tanto, tenemos

$$\frac{dT}{dr} = \frac{-q}{2\pi Kr}$$

Esta ecuación se puede integrar directamente y obtenemos

$$T = -\left(\frac{q}{2\pi K}\right) \ln r + \text{const.}$$

Si hacemos  $T = T_1$  en  $r = r_1$ , y  $T = T_2$  en  $r = r_2$ , obtenemos para  $q$  la siguiente expresión:

$$q = 2\pi K \frac{T_2 - T_1}{\ln(r_1/r_2)}$$

La distribución correspondiente de temperaturas es, pues,

$$T = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}$$

**14-6 Flujo calorífico dependiente del tiempo.** En el experimento de conducción del calor descrito en el apartado anterior, sólo se consideraba el estado estacionario. En tal caso, la fuente térmica es análoga a un depósito infinito de calor, en el sentido de que puede mantener constante la temperatura de un extremo de la barra, a pesar de que se extrae continuamente calor de la fuente. En cambio, si la fuente térmica fuera un depósito finito de calor, su temperatura y el flujo calorífico que de él sale, *disminuirían* continuamente en el transcurso del tiempo. Correspondientemente, si el receptor de este calor es un depósito finito de calor, su temperatura *crecerá* continuamente con el tiempo, salvo en los casos en que se emplee el calor en producir un cambio de fase, tal como la fusión del hielo. En uno y otro caso, la diferencia de temperaturas de los dos depósitos caloríficos en interacción disminuirá continuamente hasta anularse, en cuyo momento se habrá alcanzado el equilibrio térmico.]

Para comprender la variación de temperatura con el tiempo durante la interacción térmica de dos cuerpos, consideraremos de nuevo el caso particular de una barra conductora del calor (fig. 14-4). Supongamos de nuevo que uno de los extremos de la barra se halla sumergido en un baño de hielo, con lo que se mantiene constante durante la interacción la temperatura de este extremo de la barra, y que el otro extremo se halla en contacto con un depósito finito de calor. Supondremos que la capacidad calorífica de la barra es pequeña frente a la capacidad calorífica del depósito fuente, con lo que se podrá considerar que la temperatura a lo largo de la barra se ajusta por sí misma instantáneamente a la distribución lineal de temperaturas de un estado estacionario, antes descrita. Además, supondremos que la conducción calorífica del depósito de calor es muy grande y que la temperatura de la fente es uniforme e igual a la temperatura del extremo de la barra que está en contacto con la fuente. Entonces, si en un instante  $t$  es  $T$  la temperatura de la fuente, la diferencia de temperaturas entre los extremos de la barra en dicho instante es  $T - 0 = T$  y el gradiente de temperaturas a lo largo de la barra es  $T/L$ , donde  $L$  es la longitud de la barra. En consecuencia, el flujo calorífico procedente de la fuente es

$$q = \frac{KA}{L} T \quad (14-8)$$

donde  $A$  es el área de la sección recta de la barra y  $K$  es su conductibilidad calorífica.

A consecuencia de este flujo calorífico, la fuente perderá durante un tiempo  $dt$  una cantidad de calor  $q dt$  y la variación correspondiente de temperatura  $dT$  de la fuente vendrá dada por  $cm dT = -q dt$ , donde  $m$  es la masa y  $c$  el calor específico del depósito fuente. Sustituyendo en la ecuación (14-8) la expresión  $q = -cm(dT/dt)$ , obtenemos para la variación de la temperatura de la fuente con el tiempo, la siguiente expresión:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{KA}{Lcm} T = -\frac{T}{\tau} \quad (14-9)$$

donde

$$\tau = \frac{Lcm}{KA}$$

Esta ecuación puede integrarse directamente dando  $\ln T = -(t/\tau) + \text{const}$ , o bien, puede expresarse en la forma

$$T = T_0 e^{-t/\tau} \quad (14-10)$$

donde  $T_0$  es la temperatura inicial de la fuente en el instante  $t = 0$ . Así pues, la temperatura de la fuente y en el principio (o en cualquier otro punto) de la barra disminuye exponencialmente con el tiempo, de manera determinada por la conducción calorífica de la barra y la capacidad calorífica del depósito fuente. Transcurrido el tiempo característico  $\tau$ , llamado tiempo de relajación del sistema, la temperatura de la fuente se habrá reducido en un factor  $1/e \simeq 1/3$ .

En este ejemplo se mantenía constante e igual a  $0^\circ\text{C}$  la temperatura del extremo receptor de la barra y la diferencia entre las temperaturas de la fuente y del receptor es, simplemente, la temperatura de la fuente. Dejamos como ejercicio resolver el problema correspondiente en el que exista un depósito receptor que pueda variar su temperatura. Incluso en este caso, la diferencia de temperatura entre la fuente y el receptor disminuye exponencialmente, como en la ecuación (14-10), sustituyendo  $cm$  por la capacidad calorífica total de la fuente y el receptor (véase prob. 14-17).

Si se incrementa el número de cuerpos o depósitos en interacción, o si tuviéramos una distribución continua de materia, el problema de determinar la variación de la temperatura con el tiempo puede resolverse fundamentalmente como en el ejemplo sencillo anterior. Sin embargo, el problema matemático se complica. Por ejemplo, para determinar la variación de temperatura de uno de los cuerpos o elementos del sistema, debemos considerar la interacción de todos los demás elementos del sistema. Obtenemos entonces una ecuación análoga a la ecuación (14-9) para cada miembro y cada una de esas ecuaciones contiene todas las temperaturas desconocidas de los cuerpos del sistema. En el caso límite de una distribución continua, en vez de discreta, de depósitos,

la variación de la temperatura con el tiempo se describe mejor mediante una ecuación diferencial que relacione la velocidad de variación de la temperatura en un punto con la variación por unidad de longitud del flujo calorífico, o con la variación por unidad de longitud del gradiente de temperaturas. Vamos a proceder a una deducción de dicha ecuación, la cual tiene gran importancia en muchas ramas de la Física relacionadas con los *fenómenos de transporte*, de los cuales es ejemplo la conducción del calor.

Consideremos una barra recta y larga cuya superficie lateral esté aislada térmicamente, con lo que sólo se tiene flujo calorífico en una dirección. Si, en tales condiciones, el gradiente de temperaturas  $dT/dx$  no depende de la posición a lo largo de la barra, se deduce que el flujo calorífico en la posición  $x_1$  es el mismo que en cualquier otra posición arbitraria  $x_2$ . El tramo de barra comprendido entre  $x_1$  y  $x_2$  recibe tanto calor por  $x_1$  como pierde por  $x_2$  y no habrá flujo total entrante en este tramo (o cualquier otro) de la barra. La distribución de la temperatura en la barra no variará con el tiempo y como  $dT/dx = \text{const.}$  la temperatura variará linealmente con  $x$ .

Entonces, para obtener la variación de temperatura de un elemento de la barra, será necesario que haya un flujo total entrante (o saliente) de calor a (o de) este elemento; es decir, la pendiente o gradiente  $dT/dx$  no puede ser ya constante sino que debe variar de una posición a otra. Consideremos un elemento de la barra comprendido entre  $x$  y  $x + \Delta x$ . El flujo calorífico entrante en  $x$  es  $-KA (dT/dx)_x$ , y el flujo saliente por el otro extremo es  $-KA(dT/dx)_{x+\Delta x}$  donde  $A$  es el área de la sección recta de la barra (fig. 14-8). El flujo total entrante por segundo a este elemento es, pues,

$$-KA \left( \frac{dT}{dx} \right)_x - \left[ -KA \left( \frac{dT}{dx} \right)_{x+\Delta x} \right] = KA \left( \frac{d^2T}{dx^2} \right) \Delta x$$

A consecuencia de este flujo calorífico total entrante, la temperatura deberá incrementarse. El incremento dependerá, desde luego, de la masa y del calor específico del elemento. Si es  $dT$  el incremento de temperatura, el flujo calorífico entrante correspondiente será  $(\rho A \Delta x) c dT$ , donde  $\rho A \Delta x$  es la masa del elemento y  $c$  el calor específico. Como ya hemos obtenido para el flujo de calor en *unidad de tiempo* la expresión  $KA (d^2T/dx^2) \Delta x$ , podemos obtener ahora la

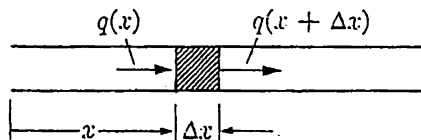


Fig. 14-8. La temperatura variará con el tiempo cuando el flujo calorífico varíe con  $x$ .

ecuación fundamental

$$\rho c A \frac{dT}{dt} = K A \frac{d^2 T}{dx^2}$$

o sea

$$\frac{dT}{dt} = \frac{K}{\rho c} \frac{d^2 T}{dx^2} \quad (14-11)$$

La velocidad de variación de la temperatura en un punto de la barra es proporcional a la variación por unidad de longitud de la pendiente de la gráfica de la temperatura, es decir, es proporcional a la segunda derivada de la temperatura respecto al espacio. Además, la velocidad de variación de la temperatura es proporcional a la conductibilidad calorífica del material e inversamente proporcional a la densidad y al calor específico. Por tanto, la cantidad  $\rho c/K$ , mide la «inercia» térmica del material: cuanto mayor sea dicha cantidad, tanto más tiempo tarda la temperatura en igualarse en un cuerpo que tenga inicialmente una distribución no uniforme de temperaturas. La ecuación (14-11) se conoce con el nombre de *ecuación de la difusión* y, según se ha dicho, las ecuaciones de este tipo juegan un papel importante en la Física. No sólo el flujo calorífico, sino otros muchos fenómenos de difusión se describen mediante ecuaciones de este tipo.

**14-7 Otros mecanismos de transmisión del calor.** En la conducción del calor, éste se transmite de un punto a otro por *movimiento molecular* solamente; las moléculas más rápidas ceden energía a las más lentas, sin que se produzca movimiento global de la materia. En los sólidos, este tipo de transmisión del calor es el más importante, por lo general. En cambio, en los gases y líquidos la transmisión del calor producida por el *movimiento global* o *convección* suele ser mayor que el producido por la conducción. Por ejemplo, los vientos en la atmósfera y las corrientes en los océanos transportan enormes cantidades de calor de una región a otra y el soplar sobre la sopa caliente constituye un medio eficaz de incrementar la transmisión de calor por convección. Existen otros muchos ejemplos corrientes de la importancia de la convección del calor. Inversamente, nuestros vestidos constituyen un medio para disminuir la pérdida de calor del cuerpo por convección.

La conducción y la convección del calor requieren ambas la presencia de un medio material. Sin embargo, es bien sabido que el calor se puede transmitir por el vacío. Esta forma de transmisión del calor recibe el nombre de *radiación calorífica* o *térmica* y al igual que los rayos X y gamma, las ondas luminosas y de radio, se sabe que se trata de radiación electromagnética. Puede comprobarse fácilmente que la radiación calorífica puede reflejarse, etc., de la misma

manera que las otras radiaciones electromagnéticas. Por ejemplo, una resistencia incandescente colocada en el foco de un espejo parabólico producirá una radiación que podrá detectarse fácilmente a 15 m mediante otro espejo parabólico; una cerilla colocada en el foco de éste, se encenderá al alcanzarla la radiación recibida.

Todos los cuerpos de la Naturaleza irradian calor y frecuentemente, al irradiarlo disminuye su temperatura; es evidente que se ha convertido energía térmica en radiación electromagnética. No obstante, en general, un cuerpo no sólo *irradia*, sino que también *absorbe* radiación de los cuerpos que le rodean. Si los cuerpos de un sistema aislado se ejercen interacciones *tan sólo* mediante radiación, las temperaturas de los cuerpos podrán variar con el tiempo al principio, como en cualquier otro caso de transmisión del calor, pero acabarán alcanzando un estado de equilibrio en el que las temperaturas de los cuerpos sean independientes del tiempo. Entonces, la radiación calorífica que emite el cuerpo será igual que la que absorbe. Si así no fuera, habría un flujo calorífico total entrante en el cuerpo y en consecuencia, una variación de su temperatura. Si un cuerpo *A* del sistema no absorbe tanta energía como otro *B*, también se deduce que la radiación de *A* debe ser menor que la de *B* si debe mantenerse el equilibrio; un buen absorbente es también un buen radiador.

Un cuerpo que absorba toda la radiación que sobre él incida recibe el nombre de *cuerpo negro*. Un cuerpo negro no es solamente el absorbente más eficaz, sino también el mejor radiador. El cuerpo negro es un cuerpo ideal; la mayoría de los cuerpos de la Naturaleza no absorben toda la energía que incide sobre ellos, sino que parte de ella la reflejan; hecho conocido por lo que respecta a la luz. Un signo de no reflexión de la luz es la ausencia de color, es decir, el cuerpo aparece negro.

La absorción y la radiación ideales de un cuerpo negro se pueden lograr con mucha aproximación en el laboratorio por medio de un orificio practicado en la pared de una cavidad pintada de negro en su interior. Casi toda la radiación que penetra en el orificio no vuelve a salir y el orificio se comporta como un absorbente perfecto, es decir, como un cuerpo negro.

La radiación procedente de un cuerpo negro depende de la temperatura de éste, habiéndose dedicado amplios estudios experimentales a la determinación de la relación existente entre la energía radiada y la temperatura del cuerpo. La interpretación de la radiación calorífica y de los resultados experimentales en relación con el movimiento molecular ha constituido uno de los problemas más importantes de la Física. En sus estudios acerca de la radiación del cuerpo negro, MAX PLANCK (físico alemán 1858-1947) hizo el descubrimiento, que posteriormente resultó revolucionario, de que para que su interpretación teórica de la radiación calorífica fuera compatible con los resultados experimentales, era necesario postular que la energía de un oscilador molecular es múlti-



plo de un cierto quantum de energía que es proporcional a la frecuencia de oscilación. Poco después de su presentación, este postulado, que puede considerarse como el trampolín a la Mecánica Cuántica, fue utilizado por BOHR en sus estudios de los espectros atómicos y por EINSTEIN en sus estudios acerca de la emisión electrónica producida por la radiación.

El estudio detallado de la naturaleza de la radiación térmica se sale del ámbito de este libro. Sólo diremos que los experimentos y la teoría de la radiación térmica indican que la cantidad de energía total radiada por unidad de superficie por un cuerpo negro mantenido a una temperatura constante de  $T^\circ$  abs está dada por

$$q = \sigma T^4 \quad (14-12)$$

donde  $\sigma$  es una constante:  $\sigma = 5.66 \cdot 10^{-5} \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{grado}^{-4} \cdot \text{s}^{-1}$ . La radiación debida a un cuerpo no negro es inferior en valor al dado por la ecuación (14-12); y el factor que relaciona ambos valores depende en gran manera de la naturaleza de la superficie del cuerpo.

**14-8 Notas históricas.** Los hechos experimentales que hemos presentado referentes a la Termometría y al Calor fueron establecidos a principios de la segunda mitad del siglo XVIII. La historia es complicada; muchas personas contribuyeron al desarrollo del tema. Se cree que GALILEO, hacia 1592, ideó un instrumento que respondía a la temperatura. Se trataba esencialmente de un globo que contenía aire y terminaba en un tubo de vidrio. El extremo libre de éste estaba sumergido en agua y la altura a que se hallaba dentro del tubo la superficie de separación entre el agua y el aire dependía de la temperatura del gas en el globo, así como de la presión atmosférica. Durante el siglo XVII, debido a no haber acuerdo acerca de cuales debían ser los puntos fijos en la escala de temperaturas, se desarrollaron diversas formas de termómetros líquidos y muchas escalas diferentes de temperaturas. A veces, las escalas eran totalmente arbitrarias: quizá no hacían más que colocar una regla graduada en centímetros al lado del tubo de vidrio. A veces, los puntos fijos se tomaban de acuerdo con las conveniencias: fusión de la mantequilla, el día más cálido del verano, el día más frío del invierno, la temperatura del cuerpo humano y, desde luego, las del hielo fundente y del agua en ebullición. Acabaron adoptándose estos últimos de una manera general y al ir evolucionando tanto los perfeccionamientos como las técnicas de medida de las temperaturas, se especificó que la presión a la que debían considerarse estos dos puntos fijos fuera la de una atmósfera (76 cm de mercurio). Ya en 1750 se empleaban tanto los termómetros celsius (punto de hielo a  $0^\circ$ , punto de ebullición a  $100^\circ$ ) como los fahrenheit (punto de hielo a  $32^\circ$ , punto de ebullición a  $212^\circ$ ). Por aquél entonces se aceptó comúnmente el mercurio como líquido termométrico.

Durante mucho tiempo no se separaron los conceptos de calor y temperatura. Ello es comprensible, ya que las medidas cuantitativas de calor no son demasiado fáciles de realizar, ni siquiera en un laboratorio moderno con termómetros pequeños y precisos, a causa de los múltiples efectos más bien sutiles que complican la medida. También nuestra sensibilidad al frío y al calor tiende a llevarnos a confusión: un objeto metálico nos parece más frío al tacto que un objeto de madera, aun cuando ambos se hallen a la misma temperatura.

A poder disponer de buenos termómetros siguió, al cabo de poco tiempo, el magnífico trabajo de JOSEPH BLACK (médico escocés, 1728-1799) quien indicó que los cuerpos en equilibrio de temperaturas no contenían cantidades de calor iguales, sino que la cantidad de calor de un cuerpo depende de alguna otra propiedad (calor específico) distinta de la masa o el volumen. Anteriormente, FAHRENHEIT había realizado experimentos de mezclas en los que se mezclaba agua a una temperatura con agua u otra sustancia, tal como mercurio, a temperatura diferente. Estos y otros experimentos llevaron a BLACK a introducir la noción importantísima de calor específico. Poco después se realizó la medida de los calores específicos y latentes de muchas sustancias.

### PROBLEMAS

14-1. El coeficiente de dilatación lineal  $\alpha$  se define a partir de la relación  $l = l_0(1 + \alpha T)$ , donde  $l_0$  es la longitud de una barra a  $T = 0^\circ \text{C}$  y  $l$  es la longitud a la temperatura  $T$ . El coeficiente  $\alpha$  suele depender algo de la temperatura. En la figura 14-9 puede verse esta dependencia en los casos del cobre y del aluminio. Supongamos ahora que se dispone de un termómetro del tipo de dilatación lineal que utiliza el cobre y el aluminio como sustancias termométricas y los puntos de congelación y ebullición del agua como puntos de referencia o calibrado. (a) Dicho termómetro, ¿daría una indicación demasiado baja o demasiado alta, en comparación con un termómetro de gas, en el intervalo de  $0^\circ \text{C}$  a  $100^\circ \text{C}$ ? ¿y entre  $100^\circ \text{C}$  y  $500^\circ \text{C}$ ? (b) ¿En qué puntos coincidirán las indicaciones de los dos termómetros? (c) ¿En qué dominio de temperaturas indicará el termó-

metro de aluminio una temperatura más elevada que el de cobre y viceversa? (*Sugerencia.* Representar gráficamente la longitud verdadera en función de la temperatura.)

14-2. Supongamos que, en un experimento con un termómetro de gas a volumen constante se mide el cociente entre las presiones  $P_{100}$  y  $P_0$  y resulta ser igual a 1,34. ( $P_{100}$  corresponde al punto de ebullición del agua y  $P_0$  al de congelación.) ¿Cuál sería, en la escala celsius, el punto correspondiente al cero absoluto?

14-3. Para obtener la fusión de deuterones regulada, se precisa una temperatura de 100 millones de grados. Explicar cualitativamente la razón por la cual se precisa una temperatura tan elevada en este proceso.

14-4. En 50 g de agua a  $60^\circ \text{C}$  se sumergen juntos diez gramos de aluminio,

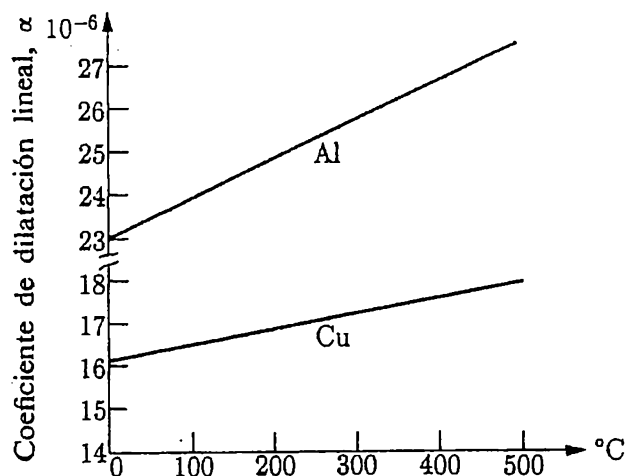


Figura 14-9

diez de cobre y diez de plomo, a  $0^{\circ}\text{C}$ ,  $20^{\circ}\text{C}$  y  $40^{\circ}\text{C}$ , respectivamente. ¿Cuál es la temperatura final?

14-5. Se sumerge un pedazo de cobre en 100 g de agua a  $50^{\circ}\text{C}$ . Cuando el sistema alcanza el equilibrio, sólo quedan 90 g de agua a  $100^{\circ}\text{C}$ . ¿Qué puede decirse de la masa y la temperatura del pedazo de cobre?

14-6. Masas iguales (100 g) de plomo y agua, inicialmente a  $10^{\circ}\text{C}$ , se colocan sobre mecheros Bunsen exactamente iguales, cada uno de los cuales suministra 25 cal/s. Dibujar gráficas que indiquen en cada caso cómo crecen las temperaturas con el tiempo.

14-7. Una resistencia eléctrica que desprende 20 calorías por segundo se introduce en 100 g de hielo, originalmente a  $-20^{\circ}\text{C}$ , contenidos en un recipiente aislado térmicamente. Dibujar una gráfica de la temperatura del agua en función del tiempo, partiendo del instante en que se conecta la resistencia al circuito eléctrico y continuando hasta el instante en que se haya evaporado toda el agua.

14-8. Si se convirtiera en calor toda la energía cinética de un satélite terrestre de 10 kg (supóngase una órbita a una

altura de 300 km) ¿qué masa de agua se vaporizaría? Supóngase que el agua está inicialmente a  $0^{\circ}\text{C}$ .

14-9. Si se utilizara la potencia útil máxima de un automóvil (tómese 100 CV) para agitar 400 litros de agua contenida en un barril, ¿qué tiempo se precisaría para elevar  $20^{\circ}\text{C}$  la temperatura del agua? (1 CV = 75 kpm/s = 736 W.)

14-10. ¿Cuántos metros cuadrados de ventana de vidrio de 4 mm conducirían tanto calor como un muro de hormigón de  $10\text{ m}^2$  y 10 cm de espesor? Las diferencias de temperatura entre las superficies interior y exterior de la ventana y del muro son iguales. Estimar la cantidad de calor que atraviesa el muro de hormigón en una hora si la temperatura del interior es de  $20^{\circ}\text{C}$  y la del exterior  $-10^{\circ}\text{C}$ . ( $K_{\text{gl}} \simeq K_{\text{co}}$ .)

14-11. Una barra recta de sección  $A = 2\text{ cm}^2$  une un depósito a la temperatura de  $100^{\circ}\text{C}$  con un depósito de hielo a  $0^{\circ}\text{C}$ . La barra consta de dos partes, una de cobre de longitud  $L_1 = 30\text{ cm}$  y la otra de acero de longitud  $L_2 = 20\text{ cm}$ . La superficie lateral de la barra está aislada térmicamente y el acero está en con-

tacto con el hielo. (a) ¿Cuál es la temperatura en la unión de los dos metales? (b) ¿Cuánto hielo se funde por minuto?

14-12. Una esfera de radio  $R_1$  tiene en su superficie una temperatura  $T_1$ . Se añade a la esfera una capa esférica de radio interior  $R_1$  y radio exterior  $R_2$ . Si es  $T_2$  la temperatura de la superficie exterior de la capa, y es  $K$  la conductibilidad calorífica de la capa esférica, ¿cuál será el flujo calorífico saliente de la esfera? ¿Cómo varía la temperatura con la posición en la capa?

14-13. Una tubería de 4 cm de diámetro transporta vapor de agua a una temperatura de  $120^\circ\text{C}$ . Se recubre la tubería con un material aislante del calor, de 5 cm de espesor, que tiene una conductibilidad calorífica de  $10^{-4}$  cal/s.cm. grado. Se mide la temperatura en el exterior del aislante y resulta ser de  $40^\circ\text{C}$ . (a) ¿Qué valor tiene el gradiente de temperatura en el material aislante cerca de la tubería? (b) ¿Cuál es el flujo calorífico radial por centímetro de longitud de la tubería?

14-14. Una barra cuya superficie lateral está aislada térmicamente, tiene una sección recta cuya área aumenta linealmente de un extremo al otro. El área al principio de la barra es  $A_1$  y al final es  $A_2 = 3 A_1$ . Las temperaturas al principio y al final de la barra son  $T_1$  y  $T_2$ , respectivamente. Hágase un esquema cualitativo de la distribución de temperatura a lo largo de la barra.

14-15. En la figura 14-10 se ha representado una barra recta uniforme cuyos extremos se mantienen a las temperaturas constantes  $T_1$  y  $T_2$ . Pueden verse tres curvas de distribución de temperatura. (a) Determinar cuál de estas curvas indica una barra con superficie lateral aislada térmicamente y cuál carece de dicho aislamiento perdiendo calor

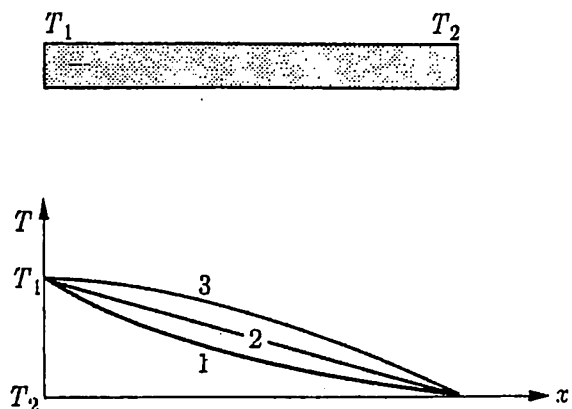


Figura 14-10

por su superficie lateral. (b) Describir un caso físico que corresponda a una distribución de temperatura correspondiente a la curva restante. Razonar la respuesta.

14-16. Se calienta eléctricamente un pedazo de cobre de 25 g y recibe 0,4 W de potencia que se convierte en calor. Al mismo tiempo, el pedazo de cobre pierde calor por conducción a sus alrededores que se hallan a una temperatura constante de  $0^\circ\text{C}$ . La temperatura de equilibrio del cobre se establece en  $5^\circ\text{C}$ . ¿Al cabo de cuánto tiempo de cortar la corriente será  $1,84^\circ\text{C}$  la temperatura del cobre? (El calor específico del cobre es  $0,091$  cal/g.grado.)

14-17. Hacemos referencia al apartado 14-7. Dos cuerpos, cada uno de masa  $m$  y calor específico  $c$ , tienen temperaturas diferentes  $T_1$  y  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ). Estos cuerpos están unidos por una barra conductora del calor (despréciase la capacidad calorífica de la barra), con lo que se conducirá calor de un cuerpo al otro. Si se unen los cuerpos en el instante  $t = 0$ , determinar la variación subsiguiente con el tiempo de la diferencia de temperatura entre los cuerpos. La conductibilidad calorífica de la barra es  $K$ , el área de su sección  $A$  y su longitud  $L$ . Considérese

que el único mecanismo de cesión de calor entre los cuerpos es por conducción. Supóngase uniforme la distribución de temperatura en cada cuerpo.

14-18. En un instante  $t$ , la distribución de temperatura en una barra recta, larga y uniforme (aislada térmicamente) es

$$T = A \frac{1}{x_0} e^{-(x/x_0)^2}$$

donde  $A$  es una constante y  $x_0 = \sqrt{at}$  ( $a = \text{const}$ ). (a) Trazar cualitativamente una gráfica de la distribución de la temperatura a lo largo de la barra en los instantes  $t > 0$ . (b) En un instante fijo  $t = t_1$ , determinar la región de la barra en que es positiva (negativa) la velocidad de variación de la temperatura. (c) A continuación, considérese una posición fija

$x = x_1$  de la barra. Demostrar que la temperatura en dicho punto alcanza su valor máximo en el instante  $t_m^2 = x_1^2/a$ .

14-19. Considérese la Tierra como un cuerpo negro y estímesese la potencia radiada por la Tierra por metro cuadrado si se toma como temperatura de la superficie  $10^\circ \text{C}$ .

14-20. Imaginemos un cuerpo esférico en el espacio exterior. Supongamos que el cuerpo no recibe radiación alguna. ¿Cuánto tardaría en reducirse a la mitad la temperatura de la esfera si se considera que sólo existe la radiación que ella emite? La densidad de la esfera es  $\rho$ , su radio  $R$  y su calor específico  $c$ . Supongase que la esfera es un cuerpo negro radiante y que la conductibilidad calorífica es infinita, con lo que la temperatura será uniforme en toda la esfera.

## ÁTOMOS Y MOLÉCULAS

*Resumen.* En este capítulo se consignan algunas de las ideas y hechos fundamentales acerca de átomos y moléculas que se precisarán en los capítulos posteriores. Empezamos con un estudio de las primeras evidencias experimentales de la estructura atómica de la materia, expresadas por las leyes de las proporciones definidas y de las proporciones múltiples en las reacciones químicas (Lavoisier y Proust) y los fundamentos de la teoría atómica de la materia de Dalton. Luego sigue el problema de incorporar la ley de Gay-Lussac de las reacciones gaseosas en la teoría de Dalton y la solución de Avogadro del problema. Se introducen el número de Avogadro y la masa atómica y se aplican a cálculos de masas y tamaños de átomos y moléculas.

En el capítulo anterior empezamos a dirigir nuestra atención al movimiento interno de la materia y describimos brevemente en forma cualitativa la relación existente entre los conceptos de temperatura, calor y movimiento molecular. En el capítulo 16 proseguiremos esos estudios de introducción estudiando la teoría cinética (molecular) de los gases, y algo más adelante estudiaremos brevemente las propiedades moleculares de líquidos y sólidos. Como en nuestros futuros estudios haremos frecuentemente referencia a átomos y moléculas, resulta adecuado presentar ahora un estudio de algunas de las nociones elementales acerca de unos y otras. Comenzaremos con un repaso de algunas de las observaciones experimentales sobre las que se asentó en un principio la teoría atómica de la materia.

**15-1 La ley de las proporciones múltiples y la teoría atómica de la materia según Dalton.** La idea de la estructura atómica de la materia es muy antigua; se remonta a DEMÓCRITO (400 a. C.) quien proponía que la materia estaba constituida por bloques indivisibles (átomos) inconcebiblemente pequeños, cada uno de ellos rodeado por el vacío. Sin embargo, al igual que toda idea científica, ésta no pudo dar fruto hasta que se pudo expresar cuantitativamente y soportar por algunas observaciones experimentales. La idea permaneció más o menos olvidada durante 2000 años, hasta que revivió gracias a una serie de descubrimientos pertenecientes, la mayoría de ellos, al campo de la Química. JOHN

DALTON (químico inglés, 1766-1844), JOSEPH GAY-LUSSAC (físico y químico francés, 1778-1850) y AMADEO AVOGADRO (científico italiano, 1776-1856) contribuyeron a restablecer la teoría atómica de la materia y expresarla cuantitativamente.

A finales del siglo XVIII se iniciaron en forma sistemática experimentos de análisis cuantitativo de reacciones químicas, debidos a ANTOINE LAURENT LAVOISIER (químico francés, 1743-1794) y JOSEPH LOUIS PROUST (químico francés, 1754-1826). Los resultados de estos experimentos pueden resumirse en unas cuantas leyes sencillas: (1) La ley de la *conservación de la masa*, que dice que la masa total de un compuesto químico es siempre igual a la suma de las masas de los distintos constituyentes. (2) Además de esta relación para las masas, se halló que los elementos se combinan siempre en ciertas proporciones definidas en la masa. Por ejemplo, se vio que una parte de oxígeno se combina siempre con 1,52 partes en masa de magnesio y con 3,7 partes en masa de estaño. Las observaciones de este tipo formaron la base de la *ley de las proporciones definidas (en masa)* para las reacciones químicas. (3) Se halló que cuando el oxígeno (u otra sustancia) se combina de más de una manera con otro elemento, por ejemplo, cobre, las cantidades de oxígeno en estos compuestos están relacionadas por proporciones *múltiplo*, es decir, guardan entre sí la misma razón que dos números enteros sencillos.

Simultánea e independientemente de los trabajos de LAVOISIER y PROUST, estudiaba temas análogos JOHN DALTON maestro de Manchester, Inglaterra. La importancia de la contribución de Dalton al tema se atribuye, más que a sus logros experimentales, al modelo conceptual que desarrolló. En esencia, DALTON suponía que (a) la materia está constituida por partículas discretas indivisibles, átomos, que permanecen invariables al combinarse con otros átomos, (b) todos los átomos de un mismo elemento son iguales, pero los átomos de elementos diferentes difieren entre sí en la masa y (c) en la combinación química de dos elementos, los átomos se combinan en proporciones numéricas sencillas.

En otras palabras, la interpretación atómica de Dalton de la combinación de dos sustancias  $A$  y  $B$  era que uno o más átomos de  $A$  se combinan con uno o más átomos de  $B$ . Supongamos que se sabe que  $n_a$  átomos de  $A$  se combinan con  $n_b$  átomos de  $B$  para formar la sustancia  $A + B$ . Si son  $m_a$  y  $m_b$ , las masas de los átomos de  $A$  y  $B$ , las masas totales de  $A$  y  $B$ , después de la combinación son  $M_a = n_a m_a$  y  $M_b = n_b m_b$ . Estas masas  $M$  en combinación, pueden medirse fácilmente con gran precisión. Si se conoce el cociente  $n_a/n_b$  entre los números de átomos de las dos sustancias, se deduce que puede determinarse directamente el cociente entre las masas atómicas a partir del cociente medido de las masas totales. Es, decir,

$$\frac{m_a}{m_b} = \frac{n_b}{n_a} \frac{M_a}{M_b} \quad (15-1)$$

Al aplicar esta interpretación, DALTON tuvo que formular hipótesis referentes al cociente  $n_a/n_b$ ; por ejemplo, supuso que el agua estaba formada por un número igual de átomos de hidrógeno y de oxígeno. Entonces, como una parte de hidrógeno se combina con ocho de oxígeno para formar agua, llegó a la conclusión (errónea) de que el átomo de oxígeno era ocho veces más pesado que el de hidrógeno. Estas hipótesis arbitrarias acerca de  $n_a/n_b$  llevaron pronto a incompatibilidades. DALTON se vio forzado a reajustar continuamente los valores supuestos de sus cocientes intentando alcanzar una descripción compatible, en función de las proporciones múltiplo de átomos, con su ley de las proporciones múltiples en masa de las reacciones químicas.

Después de la formulación de Dalton y de la interpretación atómica de la ley de las proporciones múltiples en masa (1803), durante los años de 1805 a 1808 estudió GAY-LUSSAC la manera en que se combinan en volumen los gases para formar compuestos. Halló relaciones muy parecidas a las de Dalton: los gases a igual presión y temperatura se combinan en proporciones múltiplo sencillas en *volumen*. Por ejemplo, se encontró que se combinaban 2 volúmenes de hidrógeno y 1 de oxígeno para formar 2 volúmenes de vapor de agua; 1 volumen de hidrógeno y 1 volumen de cloro se combinan para formar 2 volúmenes de cloruro de hidrógeno; y se combinan 1 volumen de oxígeno y 1 volumen de nitrógeno para formar 2 volúmenes de óxido nítrico.

DALTON señaló que si los gases se combinan en proporciones múltiplo sencillas en volumen, y también en proporciones múltiplo sencillas en átomos, debería existir una relación sencilla entre los números de átomos por unidad de volumen de los gases en reacción. DALTON supuso que volúmenes iguales de gases diferentes contienen, en igualdad de condiciones de presión y temperatura, números iguales de átomos. Esta hipótesis, que en un principio parecía razonable, condujo a incompatibilidades: por ejemplo, 1 volumen de nitrógeno ( $n$  átomos) se combina con 1 volumen de oxígeno ( $n$  átomos) para formar 2 volúmenes de óxido nítrico. Según la hipótesis de DALTON de números iguales de átomos en volúmenes iguales, deberían haber  $2n$  átomos de compuesto en los 2 volúmenes de óxido nítrico. En cambio, el modelo atómico de la combinación de los átomos exige que  $n$  átomos de oxígeno y  $n$  de nitrógeno formen  $n$ , no  $2n$ , átomos del compuesto óxido nítrico.

Este tipo de incompatibilidad fue resuelto en 1811 por AVOGADRO, quien modificó la hipótesis de DALTON postulando que volúmenes iguales de gases diferentes en igualdad de presión y temperatura contienen el mismo número de átomos *compuestos*, no átomos elementales. A los átomos compuestos les llamó AVOGADRO *moléculas*. Esta hipótesis resolvía las incompatibilidades aparentes entre las observaciones de DALTON y GAY-LUSSAC e hizo posible la interpretación de la ley de GAY-LUSSAC de las proporciones múltiplo sencillas en volumen, mediante las proporciones múltiplo en átomos. Como ejemplo,



TABLA 15-1. TABLA PERIÓDICA DE LOS ELEMENTOS

(Los números entre paréntesis indican el número másico del isótopo más estable conocido)

Los electrones exteriores están en la	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	O	Electrones por capa
Capa K o primera	1 H 1,0080								2 He 4,003	2
Capa L o segunda	3 Li 6,940	4 Be 9,013	5 B 10,82	6 C 12,011	7 N 14,008	8 O 16,000	9 F 19,00		10 Ne 20,183	2, 8
Capa M o tercera	11 Na 22,991	12 Mg 24,32	13 Al 26,98	14 Si 28,09	15 P 30,975	16 S 32,066	17 Cl 35,457		18 Ar 39,944	2, 8, 8
Capa N o cuarta	19 K 39,100	20 Ca 40,08	21 Sc 44,96	22 Ti 47,90	23 V 50,95	24 Cr 52,01	25 Mn 54,94	26 Fe 55,85	27 Co 58,94	2, 8, 18, 8
	29 Cu 63,54	30 Zn 65,38	31 Ga 69,72	32 Ge 72,60	33 As 74,91	34 Se 78,96	35 Br 79,916		36 Kr 83,80	
Capa O o quinta	37 Rb 85,48	38 Sr 87,63	39 Y 88,92	40 Zr 91,22	41 Nb 92,91	42 Mo 95,95	43 Tc (99)	44 Ru 101,10	45 Rh 102,91	
	47 Ag 107,880	48 Cd 112,41	49 In 114,82	50 Sn 118,70	51 Sb 121,76	52 Te 127,61	53 I 126,91		54 Xe 131,30	2, 8, 18, 18, 8
Capa P o sexta	55 Cs 132,91	56 Ba 137,36	57-71 Fam. del La*	72 Hf 178,50	73 Ta 180,95	74 W 183,86	75 Re 186,22	76 Os 190,2	77 Ir 192,2	
	79 Au 197,0	80 Hg 200,61	81 Tl 204,39	82 Pb 207,21	83 Bi 209,00	84 Po (210)	85 At (210)		86 Rn (222)	2, 8, 18, 32, 18, 8
Capa Q o séptima	87 Fr (223)	88 Ra 226,05	89 — Fam. del Ac**							

*Familia de los lantánidos	57 La 138,92	58 Ce 140,13	59 Pr 140,92	60 Nd 144,27	61 Pm (145)	62 Sm 150,35	63 Eu 152,0	64 Gd 157,26	65 Tb 158,93	66 Dy 162,51	67 Ho 164,94	68 Er 167,27	69 Tm 168,94	70 Yb 173,04	71 Lu 174,99	2, 8, 18, 32, 9, 2
**Familia de los actínidos	89 Ac (227)	90 Th 232,05	91 Pa (231)	92 U 238,07	93 Np (237)	94 Pu (244)	95 Am (243)	96 Cm (247)	97 Bk (247)	98 Cf (251)	99 Es (254)	100 Fm (253)	101 Md (256)	102 No (253)	103	2, 8, 18, 32, 32, 9, 2

consideremos la combinación de nitrógeno y oxígeno antes mencionada. Si se supone que tanto la molécula de oxígeno como la de nitrógeno constan de dos átomos, al combinarse una molécula de nitrógeno y una de oxígeno forman dos moléculas de óxido nítrico y en consecuencia dos volúmenes de gas óxido nítrico.

Con la hipótesis de AVOGADRO fue posible obtener una explicación de las reacciones entre gases en función de las proporciones múltiplo por átomos. Se estableció entonces que las moléculas de hidrógeno, oxígeno, cloro, nitrógeno, etc., por ejemplo, tenían dos átomos. A estas moléculas se les llama *diatómicas*. En cambio, los gases helio, neón, argón, kriptón y xenón sólo tienen un átomo por molécula; son *monoatómicas*.

**15-2 Masas atómicas y moleculares.** Como, según la hipótesis de AVOGADRO, volúmenes iguales de gases diferentes en igualdad de presiones y temperaturas contienen números iguales de átomos compuestos, se deduce que *el cociente entre las densidades de dos gases es igual al cociente entre sus masas moleculares*. Entonces, a partir de medidas de densidades se podrá establecer una escala de masas *relativas* de moléculas, y si se conoce el número de átomos de las moléculas, una escala correspondiente de masas atómicas *relativas*. Desde luego, de esta manera sólo podrá obtenerse el cociente entre masas moleculares. Para establecer una escala numérica se tomó como referencia el oxígeno, al que se asignó una masa atómica 16 (masa molecular 32). La elección del oxígeno se debió a que reacciona con gran número de sustancias. La elección del valor numérico 16 se justificaba porque los valores numéricos de los demás elementos tomaban entonces valores convenientes que partían de 1 (o, mejor, 1,008) para el hidrógeno que es el elemento más ligero.

El número asignado a un elemento, es decir, 16 al oxígeno, 1,008 al hidrógeno, 12 al carbono, etc., recibe el nombre de *masa atómica* (o peso atómico) del elemento en cuestión. Conocida la composición de la molécula, se obtiene la masa molecular correspondiente sumando las masas atómicas de los constituyentes. Por ejemplo, la masa molecular del oxígeno  $O_2$ , es 32 y la masa molecular del agua  $H_2O$ , es 18.

**15-3 Número de Avogadro. Masas y tamaños de las moléculas.** Una cantidad de sustancia que contenga un número de gramós igual a la masa molecular recibe el nombre de *masa molecular gramo* ( $M$ ), o simplemente *mol* de la sustancia. Análogamente, el volumen ocupado por un mol,  $V = M/\rho$  ( $\rho$  = densidad de la sustancia), recibe el nombre de *volumen molar*. Como la razón entre moles de sustancias diferentes es igual a la razón de las masas de las moléculas correspondientes, resulta evidente que el número de moléculas que constituyen

un mol es el *mismo* para todas las sustancias. Si se conociera este número  $N_0$  se obtendría la masa de una molécula a partir de la relación  $N_0 m = M$ , o sea

$$m = \frac{M}{N_0} \quad (15-2)$$

Esta misma relación valdrá para la masa de un átomo si es  $M$  la masa de un átomo-gramo, es decir, el número de gramos igual a la masa atómica de la sustancia.

El número  $N_0$ , llamado número de Avogadro, puede medirse de varias maneras más o menos directas. Una de las primeras estimaciones del número de Avogadro (y del tamaño molecular) se logró a partir de un estudio de películas de aceite sobre el agua (LORD RAYLEIGH 1890). Si sobre una superficie de agua limpia se deposita una pequeña cantidad de ácido oleico, éste se extenderá sobre una superficie extraordinariamente grande; un miligramo cubrirá casi 10 000 cm<sup>2</sup>. Como la densidad del ácido oleico es de 0,9 g/cm<sup>3</sup> aproximadamente, el espesor de la película será del orden de 10<sup>-7</sup> cm y, por tanto, una de las dimensiones de la molécula de ácido oleico (masa molecular  $M = 282,5$ ) deberá ser, como máximo, la mencionada. Si suponemos que las tres dimensiones de la molécula son aproximadamente iguales a 10<sup>-7</sup> cm, el volumen por molécula será 10<sup>-21</sup> cm<sup>3</sup>. Como el volumen por mol es de unos 300 cm<sup>3</sup> ( $M/\rho = 282,5/0,9$ ), el número de moléculas por mol, según estas hipótesis es  $3 \cdot 10^{23}$ .

Este es un método relativamente sencillo con el cual se obtiene una estimación del número de AVOGADRO. Los valores precisos de  $N_0$  se han obtenido mediante estudios roentgenográficos de los cristales. En este caso, pueden determinarse con precisión la estructura del cristal y la separación entre átomos y, por tanto, el número de átomos existentes en un volumen dado o en la masa de una sustancia de masa molecular conocida. Otro método para la determinación precisa de  $N_0$  se basa en la medida de la carga electrónica y de la carga eléctrica transportada de un electrodo a otro cuando se deposita electrolíticamente una masa dada de material. De ahora en adelante, utilizaremos el valor corrientemente aceptado para el número de AVOGADRO:

$$N_0 = 6,025 \cdot 10^{23} \text{ moléculas/mol}$$

Dado el número de AVOGADRO, se puede expresar en una escala absoluta las masas atómicas y moleculares. Por ejemplo, la masa de un átomo de oxígeno es  $m = 16/N_0 \simeq 2,65 \cdot 10^{-23}$  g, y la masa del átomo de hidrógeno es 1/16 de este valor.

*Tamaño de las moléculas.* El significado del tamaño de un objeto depende del método u operación utilizados para su medida. Cuando colocamos una regla graduada junto a un objeto y determinamos la longitud de éste leyendo sobre la regla los puntos de coincidencia con los extremos del objeto, la longitud del objeto está definida por las posiciones de las superficies desde las cuales se reflejó la luz. Si realizamos la medida en un cuarto oscuro, podremos utilizar nuestros dedos o algún otro medio de contacto para establecer las posiciones en el espacio cuando la fuerza repulsiva entre nuestros dedos y el objeto se haga suficientemente grande para deformar algo los tejidos nerviosos de nuestros dedos.

Análogamente, los tamaños atómicos y moleculares pueden determinarse por medio de dos tipos fundamentales de experimentos. En el primero podemos utilizar la reflexión de la luz o de otra radiación electromagnética como medio de medida, y en el segundo determinamos dónde se hacen grandes las fuerzas repulsivas entre los átomos. Los tamaños atómicos y moleculares estimados a partir de los volúmenes molares son de este último tipo. (Recordemos que los líquidos y los sólidos, comparados con los gases, son prácticamente incompresibles.) Por ejemplo, el hidrógeno líquido tiene una densidad de 0,07 g/cm<sup>3</sup>. El volumen por mol (del hidrógeno atómico) es  $1,008/0,07 \simeq 14,4$  cm<sup>3</sup> y el volumen ocupado por un átomo será, por tanto,  $v \simeq 14,4/(6,02 \cdot 10^{23})$  cm<sup>3</sup>. La dimensión lineal aproximada del átomo de hidrógeno deberá, pues, ser

TABLA 15-2. TAMAÑOS ATÓMICOS

<i>Elemento</i>	<i>Masa atómica, M</i>	<i>Densidad <math>\rho</math>, g/cm<sup>3</sup></i>	<i>Volumen por mol <math>M/\rho</math>, cm<sup>3</sup></i>	<i>Tamaño atómico aproximado, <math>d \sim (M/\rho N_0)^{1/3}</math></i>
Hidrógeno	1,008	0,07*	14,4	$2,9 \times 10^{-8}$ cm
Carbono	12,01	2,25†	5,35	2,1
Oxígeno	16,00	1,14‡	14,1	2,9
Aluminio	26,97	2,70	10,0	2,5
Potasio	39,1	0,85	46,00	4,2
Hierro	55,85	7,8	7,15	2,3
Cobre	63,54	8,9	7,13	2,3
Plata	107,88	10,5	10,25	2,6
Plomo	207,21	11,34	18,4	3,1
Uranio	238,07	18,7	12,7	2,8

\*Líquido, a  $-252^\circ$  C

†Grafito

‡Líquido, a  $-184^\circ$  C

$d \simeq (v)^{1/3}$  o sea  $2,9 \cdot 10^{-8}$  cm. En la tabla 15-2 se consignan algunos tamaños atómicos calculados de esta manera. Obsérvese lo sorprendentemente pequeña que es la variación con la masa atómica. Ningún átomo tiene un radio mucho mayor o mucho menor que  $10^{-8}$  cm.

## PROBLEMAS

15-1. Cuando reacciona el magnesio con el oxígeno 1,52 partes (en masa) de magnesio se combinan con 1 parte de oxígeno. Según la hipótesis de DALTON, ¿qué conclusión podemos sacar acerca del cociente entre las masas atómicas del magnesio y del oxígeno?

15-2. Basándose en los trabajos de LAVOISIER, DALTON, GAY-LUSSAC y AVOGADRO, explicar la aseveración de que la razón de las masas moleculares de dos gases es igual a la razón de sus densidades (supóngase iguales las temperaturas y las presiones).

15-3. Estimar la separación media de las moléculas del oxígeno a la presión atmosférica y a la temperatura de  $273^\circ$  K en cuyo caso la densidad del oxígeno es de 1,43 g/litro. ¿Cuál es la separación correspondiente para las del helio, hidrógeno y argón? Explíquese.

15-4. En un experimento con película de ácido oleico ( $M = 282,5$ ;  $\rho = 0,9$  g/cm<sup>3</sup>), se encuentra que un miligramo de ácido cubre una superficie de agua de 0,9 m<sup>2</sup>. ¿Cuál es el espesor de la película? Si se supone que tiene el espesor de un átomo, estimar el número de AVOGADRO mediante este experimento.

15-5. ¿Cuántas moléculas constituyen 64 g de oxígeno? ¿12 g de hidrógeno? ¿1 g de uranio?

15-6. ¿Cuál es la masa de un átomo de plata? Estimar el número de átomos de plata existentes en un centímetro cúbico.

15-7. La densidad del hierro es 7,8 g/cm<sup>3</sup>. ¿Cuál es su volumen molar?

15-8. Estimar la fuerza atractiva gravitatoria que se ejercen dos átomos de cobre. La densidad del cobre es  $\rho = 8,9$  g/cm<sup>3</sup>.

## TEORÍA CINÉTICA DE LOS GASES

*Resumen.* Tras un breve estudio de la evidencia experimental del movimiento interno de la materia y de las hipótesis que fundamentan la teoría cinética de los gases, se expresan la temperatura y presión de un gas en función de la energía cinética media de traslación de sus moléculas. Se determina la velocidad molecular y se comparan los resultados con los de experimentos de salida de un gas por un orificio y de haces moleculares. Este último experimento se utiliza como introducción al estudio de la distribución de velocidades moleculares. A continuación se presenta la distribución de Maxwell-Boltzmann, se trata la energía interna de un gas monoatómico y, como introducción a la equipartición de la energía, se estudia la mezcla de dos gases y se compara con los resultados de los experimentos de salida por un orificio. Se amplía el principio de la equipartición de la energía y se aplica al cálculo de calores específicos. Se estudian fenómenos de los gases relacionados directamente con los choques entre moléculas, se calculan la frecuencia de choque y el recorrido libre medio, y se analiza un experimento de dispersión a partir del cual puede determinarse el tamaño molecular. Por último, se ilustra la teoría de los fenómenos de transporte en los gases mediante cálculos de la conducción del calor y del coeficiente de viscosidad.

El éxito de la teoría atómica o molecular de la materia en la interpretación de reacciones químicas, pronto condujo a intentos de comprender otras propiedades de la materia mediante una teoría molecular. Uno de dichos intentos se dirigió hacia una teoría cinética molecular de los gases. Aun cuando ya DANIELL BERNOULLI había sugerido en 1738 las líneas generales que debía presentar una teoría de partículas para los gases, la teoría detallada se desarrolló en la segunda mitad del siglo XIX gracias a los trabajos de RUDOLF CLAUSIUS (físico alemán, 1822-1888), JAMES CLERK MAXWELL (físico inglés, 1831-1879), LUDWIG BOLTZMANN (físico austríaco, 1844-1906) y otros. La teoría cinética de los gases sigue aceptándose hoy en día con muy pocas modificaciones respecto a la forma que le dieron sus autores, si bien se ha perfeccionado y sigue perfeccionándose con el fin de incluir el caudal de conocimientos, continuamente en aumento, acerca de las fuerzas intermoleculares y de las modernas técnicas teó-

ricas y experimentales. En este capítulo nos proponemos estudiar la teoría cinética de los gases en su forma elemental y estudiar algunas de sus consecuencias.

**16-1 Primeras hipótesis.** El punto de partida de la teoría cinética de los gases es un modelo molecular o de partículas del gas, en el cual las moléculas se hallan en movimiento totalmente desordenado. Una evidencia bastante directa de este movimiento totalmente desordenado la proporcionan las observaciones del movimiento browniano. Las partículas de humo, por ejemplo, observadas a través de un microscopio se ven moverse en forma sincopada y totalmente desordenada. Sabemos hoy que este fenómeno se debe a que las moléculas del aire se hallan en movimiento totalmente desordenado y chocan contra una partícula de humo, primero por un lado, luego por otro, etc. (véase fig. 16-1). La separación entre las moléculas debe suponerse grande frente a las dimensiones de las mismas, en vista del hecho de que el volumen de una masa dada de gas se reduce muchísimo cuando éste se condensa pasando a la fase líquida, en la cual puede suponerse que las moléculas estarán mucho más apretadas. Con este enjambre de moléculas en movimiento o de partículas en interacción como modelo del gas, puede parecernos desesperanzadora la tarea de intentar determinar el movimiento de las partículas ya que, según vimos, el problema del movimiento de más de dos partículas en interacción es prácticamente imposible de resolver mediante una solución teórica general. Desde el principio, pues, deberemos introducir hipótesis simplificadoras acerca del movimiento con el fin de poder llevar a cabo un análisis.

Supondremos, pues, que las moléculas se mueven por el interior del recipiente, al azar, sin ejercerse interacciones o choques entre sí. Centraremos nuestra atención en el movimiento de una molécula que será representativa de las otras. A continuación, habiendo estudiado su movimiento, podemos obtener las propiedades o efectos del movimiento de todo el grupo de moléculas promediando adecuadamente. Sin embargo, para tomar estos promedios, deberemos aclarar el significado de la expresión «movimiento totalmente desordenado». Supondremos que el movimiento de las moléculas está regido por el azar, es decir, que pueden aplicarse a las moléculas las leyes de probabilidad de igual manera que se aplican a juegos como el lanzamiento de una moneda o de los dados. Todas las posiciones en el recipiente del gas se consideran igualmente probables o disponibles para todas las moléculas y, en consecuencia, se supone que el número medio de partículas por unidad de volumen es el mismo en todos los puntos del recipiente. Así, si es  $N$  el número total de moléculas en el volumen  $V$ , el número medio  $n$  de moléculas por unidad de volumen es

$$n = \frac{N}{V} \quad (16-1)$$

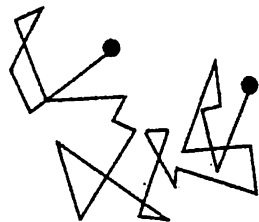


Fig. 16-1. Movimiento browniano

Cuando en nuestros estudios de la teoría cinética hagamos referencia a un *valor medio*, querremos significar que es el valor medio de un conjunto. En otras palabras, en la interpretación de la ecuación (16-1) hemos de imaginar un gran número, un conjunto, de recipientes iguales de volumen  $V$ , cada uno

de ellos con  $N$  partículas. En tal caso, si pudiéramos hacer una fotografía instantánea y realizar un recuento de todas las moléculas existentes en todos los recipientes, hallaríamos que el número medio de partículas que se encuentran en un centímetro cúbico, por ejemplo, en el centro de los recipientes, sería el mismo que el número medio de partículas en un centímetro cúbico situado en otra posición (si es correcta nuestra hipótesis de uniformidad).

Supondremos que, no sólo todas las posiciones en el recipiente, sino todas las direcciones de movimiento son igualmente probables. En el conjunto de recipientes habrá, por término medio, tantas moléculas que se muevan en una dirección y sentido como en la misma dirección pero sentido contrario. La transmisión media de masa, cantidad de movimiento y energía en una dirección cualquiera será, pues, nula. La energía cinética media de las moléculas contenidas en el recipiente no será, desde luego, nula. Imaginaremos las moléculas como esferas perfectamente elásticas, todas iguales.

Si seguimos el procedimiento antes descrito, cosa que haremos en la primera parte del desarrollo de la teoría cinética, no tendremos que ocuparnos de los choques entre moléculas. Sin embargo, cuando estudiemos más adelante los efectos y propiedades de un gas que dependan directamente de los choques, consideraremos la influencia del tamaño de las moléculas y los choques que se producen entre ellas.

**16-2 Presión de un gas e interpretación molecular de la presión y de la temperatura.** Como primer paso en nuestro estudio de la teoría cinética de los gases, intentaremos hallar la presión de un gas en función del movimiento molecular. Vimos en el capítulo 13 que, a temperatura constante, la presión es inversamente proporcional al volumen. Desde el punto de vista de la teoría cinética, al moverse las moléculas chocan contra las paredes del recipiente. En cada choque se cede cantidad de movimiento a la pared y si es grande el número de choques por segundo, el efecto de éstos será análogo al de un empuje continuo o presión sobre la pared. Para estudiar cuantitativamente el problema, consideraremos  $N$  moléculas en un recipiente ortoédrico de volumen  $V$ . El número de moléculas por unidad de volumen será, pues,  $n = N/V$ . Evidentemente, la situación es en todo análoga a la tratada en el capítulo 3 al estudiar



la fuerza que ejercía un chorro de partículas al incidir sobre una pared. Un chorro de  $n$  partículas por unidad de volumen que se mueven con celeridad  $v$  e inciden normalmente contra una pared, origina  $nv$  impactos por segundo y por unidad de superficie de la misma. En un tiempo  $\Delta t$ , todas las partículas de una columna de longitud  $v \Delta t$  habrán chocado contra la pared. En esta columna hay  $n v \Delta t A$  moléculas, por tanto el número de choques por unidad de tiempo es  $nv$  (fig. 16-2). Si cada choque es perfectamente elástico, cada partícula rebotará con una celeridad  $v$  y la cesión de cantidad de movimiento a la pared será  $2mv$ , donde  $m$  es la masa de la partícula. La cantidad de movimiento cedida a la pared por unidad de superficie y en unidad de tiempo es, pues,  $2mv \cdot nv = 2nmv^2$ , y será la presión que el chorro de partículas ejerce contra la pared.

Al seguir un razonamiento análogo en el cálculo de la presión de un gas,

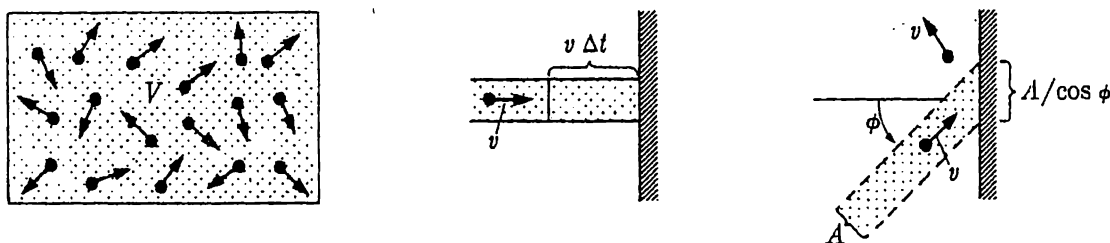


Fig. 16-2. Cuando un chorro de  $n$  partículas por unidad de volumen choca contra una pared con incidencia normal y celeridad  $v$ , el número de choques por segundo es  $nv$  por unidad de superficie de la pared. La presión correspondiente es  $2nmv^2$  si son perfectamente elásticos los choques. Cuando las moléculas se mueven en todas direcciones con igual probabilidad, la presión sobre la pared es  $P = \frac{1}{3}nmv^2$ .

supondremos también que todos los choques de las moléculas con las paredes del recipiente son perfectamente elásticos. En cambio, ya no será razonable suponer que todas las moléculas se mueven en la misma dirección, como en el caso del ejemplo sencillo del chorro. En su lugar, supondremos que todas las direcciones de movimiento son igualmente probables. A consecuencia de ello, la presión sobre las paredes del recipiente será menor que  $2nmv^2$ ; en realidad, del análisis anterior se deduce que la presión  $P$  sólo es un sexto del valor  $2nmv^2$ . Es decir,

$$P = \frac{n}{3} \overline{mv^2} = \frac{2}{3} n \frac{\overline{mv^2}}{2} \quad (16-2)$$

donde  $\overline{v^2}$  es el valor medio del cuadrado de la velocidad de todas las moléculas contenidas en el recipiente.

Para demostrar este resultado haremos referencia a la figura 16-3, donde hay  $nA \Delta x$  moléculas en el volumen  $A \Delta x$  inmediato a una de las paredes.

Supongamos que  $n_1$  de estas moléculas tienen una componente  $x$  de la velocidad igual a  $v_{1x}$ . Como los movimientos en los dos sentidos de la dirección  $x$  son igualmente probables, por término medio se moverán hacia la pared la mitad de las moléculas de  $A \Delta x$ . En consecuencia, en un tiempo  $\Delta t = \Delta x/v_{1x}$ , habrán chocado contra la pared  $n_1 A \Delta x/2$  moléculas de componente  $x$  de la velocidad igual a  $v_{1x}$ . (Algunas moléculas saldrán por los bordes de la caja elemental, pero como el número de moléculas que atraviesan por segundo una superficie es proporcional al área de ésta, el número de moléculas que saldrán por los bordes será nulo cuando  $\Delta x$  tienda a cero.) Algunas moléculas, tales como las que se encuentren a mitad de camino entre las caras paralelas de  $A$ , chocarán al cabo de un tiempo menor que  $\Delta t$ , pero *todas* las moléculas contenidas en la caja, en número de  $n_1 A \Delta x/2$ , habrán chocado durante el tiempo  $\Delta t$ . El número de moléculas de la componente  $x$  de la velocidad que consideramos, que chocan en un segundo contra la pared será, pues,  $n_1 A \Delta x/2 \Delta t = n_1 A v_{1x}/2$ . Si suponemos perfectamente elásticos los choques, la cantidad de movimiento cedida a la pared por una de las moléculas es  $2mv_{1x}$ .

La fuerza media que se ejerce sobre el área  $A$  es igual al producto de la cantidad de movimiento cedida en un choque por el número de choques por segundo:

Fuerza media sobre  $A$

= (cantidad de movimiento cedida por choque) · (número de choques por segundo),

$$F_1 = 2mv_{1x} \frac{nAv_{1x}}{2} = n_1 m v_{1x}^2 A \quad (16-3)$$

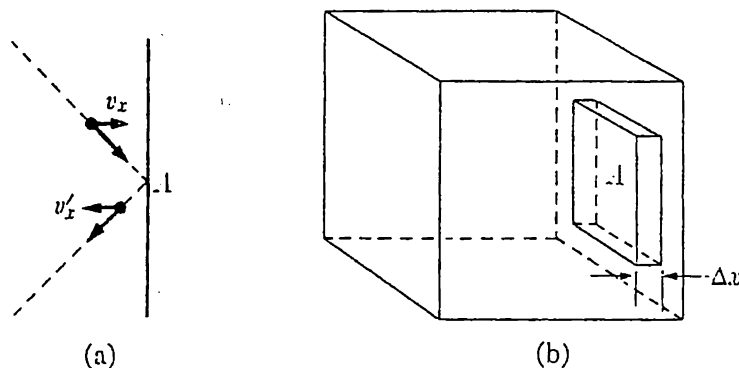


Fig. 16-3. (a) Una molécula con una componente  $x$  de la velocidad igual a  $v_x$  choca contra la pared y rebota con una componente de velocidad  $v'_x = -v_x$ , con lo que cede a la pared una cantidad de movimiento  $2mv_x$ . (b) Si en la caja grande hay  $n$  moléculas por unidad de volumen, en el volumen pequeño que se indica habrán  $nA\Delta x$  y contra la pared chocarán  $nAv_x/2$  en un segundo.

La contribución a la presión media de las  $n_1$  moléculas, es decir, la fuerza por unidad de superficie, es pues  $P_1 = F_1/A = mn_1v_{1x}^2$ .

Análogamente, si tenemos  $n_2$  partículas cuya componente  $x$  de la velocidad es  $v_{2x}$ , su contribución a la presión será  $mn_2v_{2x}^2$ . Así, si el número de partículas es  $n_1, n_2, n_3, \dots$ , con componentes  $x$  de la velocidad  $v_{1x}, v_{2x}, v_{3x}, \dots$ , la presión total será

$$P = m(n_1v_{1x}^2 + n_2v_{2x}^2 + n_3v_{3x}^2 + \dots) = mn(\overline{v_x^2})$$

Hemos introducido aquí el valor medio  $\overline{v_x^2}$  del cuadrado de las componentes de velocidad de todas las moléculas:  $\overline{v_x^2} = (n_1v_{1x}^2 + n_2v_{2x}^2 + \dots)/(n_1 + n_2 + \dots) = (n_1v_{1x}^2 + n_2v_{2x}^2 + \dots)/n$  donde  $n = n_1 + n_2 + \dots$  es el número total de moléculas por unidad de volumen.

En vez de expresar la presión en función del valor medio del cuadrado de la componente  $x$  de la velocidad  $\overline{v_x^2}$ , utilizaremos el del cuadrado de la velocidad total  $\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$ . Como el movimiento se supone totalmente al azar, tendremos  $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$ , y  $\overline{v_x^2} = \overline{v^2}/3$ . En consecuencia, la presión total podrá escribirse en la forma

$$P = n \frac{m\overline{v^2}}{3} = \frac{2}{3}n \frac{m\overline{v^2}}{2}$$

que es la misma que la ecuación (16-2). En futuras discusiones, será corriente que llamemos  $\overline{v^2}$  al valor medio del cuadrado de la velocidad, en vez de llamarle  $\overline{v^2}$ . A la raíz cuadrada de  $\overline{v^2}$  se le da el nombre de *velocidad cuadrática media*:

$$v_{cm} = \sqrt{\overline{v^2}}$$

Por tanto, la presión es proporcional a la *energía cinética de traslación* por unidad de volumen del gas. De la definición dada en el capítulo 14 para la temperatura, la temperatura absoluta  $T$  resulta ser proporcional a la presión,  $T = 273P/P_0$ . Como hemos demostrado que  $P$  es proporcional a la energía cinética media de traslación de las moléculas, también se deduce que la temperatura absoluta, según la teoría cinética de los gases, es proporcional a la *energía cinética media de traslación* de las moléculas. Se acostumbra a expresar esta proporcionalidad en la forma

$$\frac{2}{3} \frac{m\overline{v^2}}{2} = kT \quad \text{o sea} \quad \frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2} kT \quad (16-4)$$

Importa observar que sólo interviene la energía de traslación y no otras energías de rotación o vibración de las moléculas. La razón de ello es que el resulta-

do se obtiene de la cesión de cantidad de movimiento a las paredes, a la cual sólo contribuye el movimiento de traslación. Además, el resultado es aplicable a cualquier tipo de gas, monoatómico o diatómico, independientemente de la masa molecular. La constante  $k$ , que es independiente de  $m$ , recibe el nombre de *constante de Boltzmann* y, en función de esta constante, la relación (16-2) entre la presión y la energía cinética puede expresarse en la forma

$$P = nkT \quad (16-5)$$

**16-3 Ecuación de estado de los gases perfectos.** Si introducimos en la ecuación (16-5) el número total de partículas  $N = nV$ , obtenemos  $P = (N/V)kT$ , o sea

$$PV = NkT = RT \quad (16-6)$$

donde la nueva constante  $R$  es igual a  $Nk$ . La relación (16-6) se conoció mucho antes de formularse la teoría cinética de los gases. A partir de experimentos sencillos, ROBERT BOYLE halló que, a temperatura constante, el producto de la presión por el volumen de una cantidad de gas dada permanecía constante (ley de Boyle-Mariotte) JACQUES CHARLES (físico francés, 1746-1823) y JOSEPH GAY-LUSSAC ampliaron la ley de Boyle para que incluyera la dependencia de la temperatura y formularon la ecuación de estado de los gases perfectos dada por la ecuación (16-6). En realidad, cuando se define la temperatura mediante el termómetro de gas, la ecuación de estado se deduce directamente de la ley de Boyle y de la definición de temperatura. En las notas históricas que se dan al final de este apartado se estudian algunos de los primeros experimentos que condujeron a la ley de Boyle y a la ecuación de estado de los gases perfectos.

Debe hacerse constar que la definición de temperatura mediante el termómetro de gas sólo es aplicable cuando la densidad del gas termométrico es suficientemente baja, por lo que la validez de la ecuación de estado queda limitada a gases de densidad suficientemente baja y temperatura suficientemente elevada. Desde el punto de vista de la teoría cinética, esta última limitación surge de las hipótesis de que las separaciones entre moléculas son muy grandes frente a las dimensiones moleculares y que pueden despreciarse las interacciones entre moléculas. No vamos a estudiar por ahora los límites de aplicación de la ecuación de estado de los gases perfectos, sino que lo posponemos para el capítulo siguiente.

**Constante universal de los gases.** La teoría cinética de los gases, pues, ha llevado a un resultado compatible con los resultados experimentales conocidos. Además, ha proporcionado una interpretación cinética (molecular) de la temperatura: el producto de la presión por el volumen es proporcional a la temperatura y al número total de moléculas. Como un mol de un gas cualquiera contie-

ne siempre el mismo número de moléculas, el número de Avogadro, se deduce que el producto de la presión por el volumen por mol es el mismo para todos los gases a la misma temperatura. En otras palabras, si la ecuación (16-6) se refiere a *un mol* de gas, el número de moléculas es el número de Avogadro  $N_0$  y la constante

$$R = N_0 k \quad (16-7)$$

es la misma para todos los gases. A esta constante se le da el nombre de *constante universal de los gases*. Esta constante puede determinarse experimentalmente midiendo el cociente  $R = PV/T$  para un mol de gas.

A la temperatura  $T = 273,2^\circ\text{K}$  y a la presión atmosférica de una atmósfera, el volumen de un mol de gas resulta ser 22,4 litros y, por tanto, la constante de los gases resulta ser

$$R = 1 \cdot 22,4/273,2 = 0,0821 \text{ atmósfera} \cdot \text{litro/mol} \cdot ^\circ\text{K}$$

Las dimensiones de la constante  $R$  son las de energía/mol $\cdot^\circ\text{K}$  y, desde luego, puede expresarse en otras unidades. Tenemos, por ejemplo,

$$\begin{aligned} R &\simeq 0,0821 \text{ atmósfera} \cdot \text{litro/mol} \cdot ^\circ\text{K} \\ &\simeq 8,31 \cdot 10^7 \text{ erg/mol} \cdot ^\circ\text{K} \\ &\simeq 8,31 \text{ joule/mol} \cdot ^\circ\text{K} \simeq 2 \text{ cal/mol} \cdot ^\circ\text{K} \end{aligned} \quad (16-8)$$

De  $R = 8,31 \cdot 10^7$  y  $N_0 = 6,02 \cdot 10^{23}$  se deduce que la constante de Boltzmann  $k = R/N_0$  [véase ec. (16-7)], que puede considerarse como la constante de los gases por molécula, tiene el valor

$$k = \frac{8,31 \cdot 10^7}{6,02 \cdot 10^{23}} = 1,38 \cdot 10^{-16} \text{ erg/}^\circ\text{K} \quad (16-9)$$

La ley de los gases de la ecuación (16-6), con  $R$  dada por la ecuación (16-8) se refiere a un mol, es decir, a  $6,02 \cdot 10^{23}$  partículas. Para cualquier otra cantidad de gas, tenemos

$$PV = \mu RT$$

donde  $\mu$  es el número de moles de gas.

**EJEMPLO.** En un volumen de 2 litros y a la temperatura de  $300^\circ\text{C}$  se tienen 10 g de helio. ¿Cuál es la presión?

La masa molecular del helio es 4 y el número de moles que intervienen en este caso es  $10/4 = 2,5$ . De la ecuación de estado del gas se deduce que  $PV = 2,5 \cdot 0,082 \cdot 573$ , de donde obtenemos  $P = 59 \text{ atm}$ .

La presión, volumen y temperatura de un gas reciben el nombre de *variables de estado*, y cuando se dan sus valores, queda especificado el *estado* del gas. Obsérvese que las variables de estado no son independientes entre sí, sino que están relacionadas mediante la ecuación (16-6), por cuya razón recibe ésta el nombre de *ecuación de estado*. Cuando se dan dos variables, la tercera se puede hallar directamente a partir de esta ecuación. En ocasiones, se da la densidad  $\rho$  del gas, en vez de su volumen, como variable de estado. Si consideramos 1 g de gas, es decir  $1/M$  moles, tenemos  $\rho V = 1$ , y la ecuación de estado se puede escribir en la forma

$$P = r\rho T \quad (16-10)$$

donde  $r = R/M$  es la constante de los gases por gramo de gas.

*Notas históricas.* Los primeros experimentos con gases, que fueron realmente aleccionadores, se deben a EVANGELISTA TORRICELLI (1608-1647), matemático italiano y en otro tiempo alumno de GALILEO. El aparato utilizado por TORRICELLI era esencialmente igual a nuestro actual barómetro. Se llena de mercurio un tubo largo de vidrio cerrado por un extremo. Se invierte el tubo lleno, sumergiendo su extremo abierto en una cubeta de mercurio destapada. La altura que alcanza el mercurio dentro del tubo, medida sobre la superficie libre del mercurio en la cubeta, es de unos 76 cm. Si el tubo de vidrio tuviera una longitud inferior a 76 cm, continuaría lleno de mercurio.

Cuando se realizó por primera vez este experimento (1643), se conocían el concepto de presión como fuerza por unidad de superficie y los principios generales del equilibrio de los líquidos. TORRICELLI presentó entonces la idea de la existencia de un «mar de aire» que rodeara la Tierra o, en otras palabras, una presión atmosférica general. Así, en los experimentos de equilibrio representados en la figura 16-4 la fuerza (hacia abajo) que se ejerce sobre el área imaginaria  $A$  de la sección del extremo del tubo, está dada por el producto de la presión  $P = \rho gh'$  por el área  $A$ , donde  $\rho$  es la densidad del mercurio y  $g$  la aceleración de la gravedad. La fuerza hacia arriba en ese mismo punto es  $P'A = [\rho g(h' - h) + P_0]A$ , donde  $P_0$  es la presión del «mar de aire» sobre la superficie libre del mercurio. Como el mercurio está en equilibrio, tenemos  $P'A = PA$  (la fuerza hacia arriba debe equilibrar a la fuerza hacia abajo) y  $P_0 = \rho gh$ . Es decir, la presión atmosférica  $P_0$  es  $\rho gh$ , donde  $h$  (experimentalmente unos 76 cm) es la altura de la columna de mercurio medida desde la superficie libre del mercurio en la cubeta. Obsérvese que hemos tomado nula la presión en la superficie más elevada del mercurio, lo cual implica que no haya aire sobre ella. Este es uno de los primeros y más satisfactorios métodos de producir un vacío.

La interpretación de TORRICELLI de su experimento no fue aceptada plenamente en un principio. Posteriormente, PASCAL y BOYLE realizaron importantes

comprobaciones experimentales de su interpretación. PASCAL se preparó para realizar un experimento de TORRICELLI a dos alturas diferentes, para probar la cuestión de que si la presión de un fluido varía con la profundidad, lo mismo debía ocurrir con la presión atmosférica en la atmósfera. En 1648, se transportó un aparato de TORRICELLI a lo alto de una montaña y se realizó un experimento que sostenía la interpretación de TORRICELLI.

Por otra parte, BOYLE puso a prueba la noción de que si se extraía el aire de la región que se halla sobre el mercurio de la cubeta (fig. 16-4), la altura de la columna de mercurio debería bajar ya que, según TORRICELLI, era el aire que presionaba hacia abajo sobre la superficie libre del mercurio quien soportaba la columna. Para realizar este experimento, BOYLE necesitó una bomba y aun cuando no era absolutamente necesario, diseñó y construyó una que podía vaciar (parcialmente) una región tal como *A* de la figura 16-4(b). El nivel del mercurio disminuyó cuando se extrajo aire de *A*. Este experimento, y otros en los cuales se aumentaba la presión en *A* y se variaba la presión en *B*, ofrecieron nueva confirmación de que la atmósfera podía considerarse como un mar de aire.

Los experimentos anteriores llevaron a BOYLE a estudiar las propiedades compresivas del aire, que él llamaba el «muelle de aire». El aparato utilizado

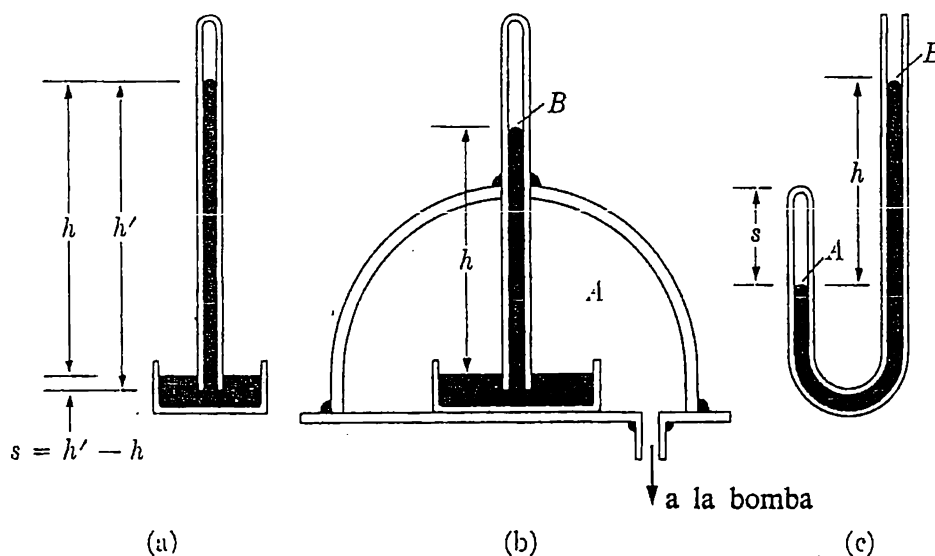


Fig. 16 - 4. (a) Experimento de Torricelli. El tubo estaba lleno de mercurio inicialmente. Luego se invertía y se sumergía el extremo abierto cerca de la superficie libre del mercurio de la cubeta destapada. (b) Uno de los experimentos de Boyle. Cuando *A* se halla en la atmósfera libre, la altura de la columna de mercurio es de unos 76 cm, pero cuando se extrae parte del aire de *A*, el nivel baja. (c) Aparato experimental de Boyle para el estudio del «muelle de aire». El volumen del gas en estudio es proporcional a  $s$  y se halla sometido a una presión igual a la atmosférica más  $\rho gh$ , donde  $\rho$  es la densidad del mercurio.

por BOYLE en sus experimentos era ingeniosamente sencillo [véase fig. 16-4 (c)]. Cuando es nula la diferencia de alturas de los niveles de mercurio *A* y *B*, la presión del gas existente sobre *A* debe ser la atmosférica. Al añadir mercurio en *B*, el gas existente sobre *A* se encuentra comprimido a un volumen menor y se halla sometido a una presión  $P = P_0 + \rho gh$ . También realizó BOYLE otros experimentos para estudiar el aire a presiones inferiores a la atmosférica. Es interesante señalar que BOYLE no formuló por sí mismo la hipótesis de que  $PV = \text{const.}$ ; fueron personas a quienes había mostrado sus logros experimentales los que formularon la relación.

**Vacío.** Es costumbre, al referirse a la presión en una región evacuada parcialmente, hablar de la altura de una columna de mercurio soportada por la presión residual, en vez de dar la presión verdadera en barías (dynas/cm<sup>2</sup>) o en kp/cm<sup>2</sup>. La presión atmosférica, que es de  $1,013 \cdot 10^6$  barías o  $1,033$  kp/cm<sup>2</sup>, suele expresarse simplemente diciendo «76 cm de mercurio». Las bombas de BOYLE probablemente podían reducir la presión a 1 cm de mercurio, aproximadamente, en un recinto como el *A* de la figura 16-4(b). Las mejores bombas de vacío modernas pueden alcanzar presiones 10 000 veces menores que la mencionada, o sea  $10^{-3}$  mm de mercurio. La presión del gas residual en una válvula de radio es de, aproximadamente,  $10^{-6}$  mm de mercurio y, con gran cuidado y paciencia, llegan a obtenerse presiones del orden de  $10^{-8}$  y  $10^{-10}$  mm de mercurio. La presión del gas en nuestra galaxia (la Vía Láctea) es aproximadamente de  $10^{-16}$  mm de mercurio y la presión del gas entre las galaxias es del orden de  $10^{-20}$  mm de mercurio.

Las medidas de presiones inferiores al milímetro de mercurio no pueden hacerse directamente con una columna de mercurio, aun cuando las medidas resultantes suelen expresarse en fracciones de milímetros de mercurio. Las presiones superiores a la atmosférica suelen medirse en atmósferas, o directamente en kilopond por centímetro cuadrado. Así, una presión de 10 atmósferas es una presión de  $10,33$  kp/cm<sup>2</sup>.

**16-4 Velocidades moleculares. Experimentos de salida de un gas por un orificio y de haces moleculares.** Quizá el resultado más importante obtenido de la teoría cinética es la relación (16-4) existente entre la energía cinética media de una molécula y la temperatura del gas. Según esta relación, la velocidad cuadrática media de las moléculas está dada por

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad (16-11)$$

La velocidad es proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura absoluta. Para dar una idea de las velocidades que intervienen, consideremos el hidrógeno (H<sub>2</sub>), para el cual  $M = 2$ . Entonces, con  $R = 8,31 \cdot 10^7$  erg/mol·°K, ob-



tenemos una velocidad de  $v \simeq 1900$  m/s a la temperatura ambiente  $T = 300^\circ\text{K}$ . Para el oxígeno ( $\text{O}_2$ ,  $M = 32$ ) a la misma temperatura, obtenemos  $v \simeq 475$  m/s.

Algunas de las primeras objeciones formuladas a la teoría cinética de los gases se basaban en lo muy grandes que resultaban estas velocidades previstas. Si las velocidades moleculares suelen ser de centenares de metros por segundo, ¿por qué tarda tanto un gas liberado en un rincón de una sala en distribuirse por toda ella? Hoy podemos contestar que las moléculas del gas no se mueven en línea recta de un punto a otro, sino que chocan entre sí tras haber recorrido una distancia corta y para alcanzar un punto lejano deberán recorrer grandes distancias siguiendo trayectorias en forma de línea quebrada, a lo largo de las cuales se produce un número increíblemente elevado de choques.

La relación existente entre la velocidad molecular y la temperatura permite una comprobación experimental directa de la teoría cinética de los gases. En este mismo apartado veremos, más adelante, experimentos con haces moleculares por medio de los cuales se puede medir la velocidad molecular. No obstante, antes de presentar los resultados de estos experimentos podemos realizar un experimento mucho más sencillo para determinar el cociente entre las velocidades moleculares de dos gases diferentes.

*Salida de un gas por un orificio.* Vamos a estudiar la salida de un gas a través de un orificio practicado en la pared del recipiente que lo contiene, representada esquemáticamente en la figura 16-5. En la región exterior al orificio se ha practicado el vacío. Las moléculas del gas, que de otra manera hubieran chocado con la pared, ahora pueden escapar a través del orificio. Al estudiar la interpretación cinética de la presión, determinábamos el número de moléculas que chocaban en unidad de tiempo contra la unidad de superficie de la pared. Este número era  $nv_x/2$ , y puede expresarse ahora en la forma

$$\text{Número de choques por unidad de superficie en unidad de tiempo} = \frac{n\bar{v}}{4} \quad (16-12)$$

donde  $\bar{v}$  es la velocidad media ( $\bar{v}$  se define en el apart. 16-5. Dejamos al lector como ejercicio, demostrar la relación  $v_x = \bar{v}/2$ ). Cuando el área de orificio es  $A$ , el número de moléculas que escapan por segundo a su través es

$$Q = \frac{An\bar{v}}{4}$$

La cantidad de moléculas que salen en unidad de tiempo es proporcional al número de moléculas por unidad de volumen y a la velocidad media. Si suponemos que en una mezcla de dos gases las moléculas de uno y otro se mueven

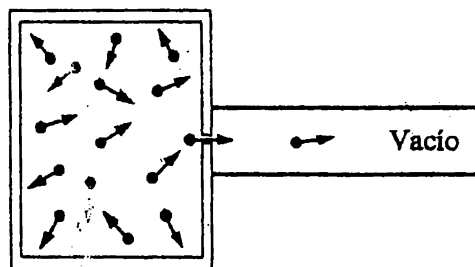


Fig. 16-5. Salida de un gas por un orificio.

independientemente con velocidades dadas por la ecuación (16-11), nos veremos obligados a admitir que las velocidades de moléculas diferentes son inversamente proporcionales a la raíz cuadrada de sus masas (apart. 16-7).

Si en el recipiente hay dos gases diferentes, el cociente entre los números de moléculas de uno y otro que salen por el orificio en unidad de tiempo es


$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{n_1 \bar{v}_1}{n_2 \bar{v}_2} = \frac{n_1}{n_2} \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}$$

En otras palabras, la composición del chorro gaseoso que sale por el orificio no será la misma que la del recipiente. Según la teoría cinética, está modificada por un factor igual a la raíz cuadrada del cociente de las masas moleculares; luego el chorro contiene más moléculas ligeras que pesadas (más lentas). Ese efecto ha sido observado y se puede determinar el cociente entre las masas moleculares de los gases analizando la composición del chorro gaseoso. Sin embargo, existe un procedimiento más conveniente y preciso basado en el estudio de la disminución de la presión en el recipiente del cual sale el gas. Para analizar cuantitativamente este problema, partiremos del número de moléculas que en unidad de tiempo salen a través del orificio. Según lo anteriormente visto, dicho número es  $Q = An\bar{v}/4 = AN\bar{v}/4V$ , donde, como antes,  $N$  es el número total de moléculas contenido en el volumen  $V$ . La velocidad de variación de este número es, pues,

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{A\bar{v}}{4V} N = -\alpha N, \quad \alpha = \frac{A\bar{v}}{4V}$$

Con  $dN/N = -\alpha dt$ , tenemos  $N = -\alpha t + \text{const}$ , con lo que si es  $N'$  el número de moléculas en el instante  $t = 0$ , el número de moléculas en un instante posterior será

$$N = N'e^{-\alpha t} = N'e^{-t/\tau}$$

donde  $1/\tau = \alpha = A\bar{v}/4V$ . 

Al cabo de un tiempo  $\tau$ , llamado *tiempo de relajación*, el número de moléculas presentes en el recipiente habrá quedado dividido por  $e$ . Como se conoce  $\bar{v}$  en función de la temperatura y de la masa molecular, la medida de los tiempos de relajación de gases que salen a través de orificios de área conocida ofrece un método para la determinación de la masa molecular. No obstante, el área del orificio no suele conocerse con gran precisión y hay que limitar el estudio a la determinación de los cocientes de tiempos de relajación y, por tanto, de los cocientes de las masas moleculares de gases diversos. Este tratamiento de los fenómenos de salida del gas por un orificio sólo es válido cuando el orifi-

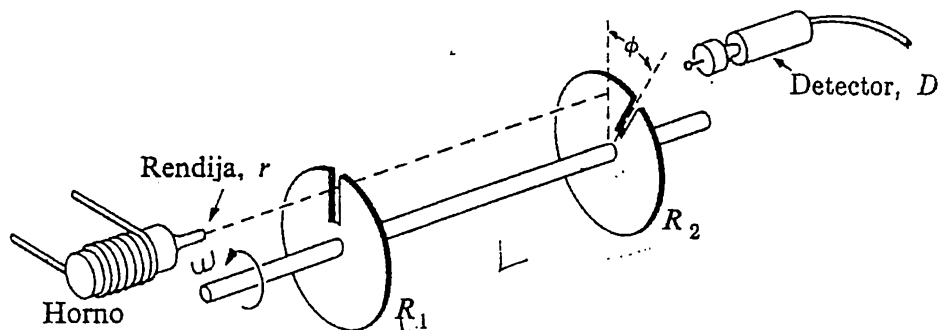


Fig. 16-6. Experimento con un haz molecular mediante el cual pueden determinarse las velocidades moleculares.

cio es muy pequeño, de tal manera que exista una probabilidad muy pequeña de que una molécula choque con otra al recorrer una distancia igual al diámetro del orificio. Si éste fuera grande, gran cantidad del gas en la proximidad del orificio se vería perturbado y nuestra descripción de las velocidades moleculares dejaría de ser la adecuada.

*Experimentos con haces moleculares.* Puede obtenerse una comprobación experimental más directa de la teoría cinética mediante experimentos con haces moleculares. En estos experimentos se vaporiza una sustancia en un horno y se deja salir el gas del horno a través de un orificio practicado en una de sus paredes, pasando el gas a una región en la que se había practicado el vacío. En esta región, se colima el haz molecular por medio de rendijas de manera que se forme un haz bien definido. Éste pasa a través de un medidor o de un selector de velocidades y por último se deposita en un detector.

En la figura 16-6 puede verse un ejemplo de ese tipo de aparato. El chorro de átomos emitido por el horno pasa por una rendija y luego por otra existente en una rueda giratoria  $R_1$ . Sobre el mismo eje que  $R_1$  está montada otra rendija  $R_2$  en la que existe otra rendija desplazada un ángulo  $\phi$  respecto a la rendija de la rueda  $R_1$ . El haz pasará también a través de esta segunda rendija si el tiempo que tardan las moléculas en recorrer el espacio comprendido entre las dos ruedas coincide con el que tarda el eje y las ruedas en girar un ángulo  $\phi$ . Si es  $L$  la separación de las ruedas,  $\omega$  su velocidad angular, y  $\phi$  la separación angular de las rendijas, la velocidad de las moléculas que pasan a través de las dos ruedas tendrá por magnitud  $v = \omega L / \phi$ . Como las rendijas tienen una anchura determinada, las moléculas que pasan por las dos rendijas y alcanzan el detector  $D$  tendrán velocidades comprendidas en un cierto dominio de valores. (Para pasar a través de las dos rendijas, una molécula que penetre próxima al borde delantero de la primera rendija móvil, no precisará tener una velocidad tan elevada como otra molécula que penetre próxima al borde de atrás.) Variando  $\omega$ , podremos seleccionar con este aparato moléculas de diferentes velocidades.

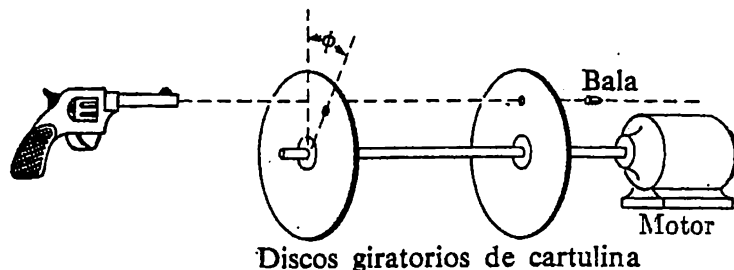


Fig. 16-7. Medida de la velocidad de una bala mediante discos giratorios.

El método de medida es enteramente análogo al conocido método de medida de la velocidad de una bala, representado esquemáticamente en la figura 16-7. Se dispara una bala que atraviese dos discos de cartulina montados sobre un mismo eje giratorio y separados una cierta distancia. Los orificios practicados por la bala al atravesar los discos están desplazados un ángulo  $\phi$ , a partir del cual puede determinarse la velocidad de la bala si se conoce la separación de los discos y su velocidad angular. En los experimentos de haces moleculares, las rendijas corresponden a los orificios practicados por la bala que, en este caso, se practican previamente.

Existen otros tipos de experimentos con haces moleculares mediante los cuales se puede medir la velocidad de las moléculas. En la figura 16-8 puede verse un dispositivo en el cual un haz molecular penetra a través de una rendija practicada en un tambor giratorio. Si el tambor está en reposo, el haz incidirá sobre la pared del tambor en el punto diametralmente opuesto a la rendija, pero si el tambor gira, el haz incidirá sobre un punto desplazado lateralmente y a partir de este desplazamiento se podrá determinar la velocidad molecular.

Cualquiera que sea el método empleado, los experimentos indican siempre que, en un gas a cierta temperatura, las moléculas no tienen todas la misma celeridad. Aun existiendo una celeridad definida predominante, encontramos todas las celeridades, desde las muy bajas hasta las muy elevadas. Por ejemplo, en el experimento de la figura 16-6 habrán moléculas que atraviesan el selector de velocidades no sólo para una velocidad angular específica, sino para todo un dominio de velocidades angulares. Análogamente, en el experimento del tambor giratorio el haz molecular no se deposita en un punto sólo, sino que se distribuye a lo largo de una banda, según se indica en la figura 16-8. Midiendo la distribución a lo largo de esta banda de la densidad de depósito molecular, puede determinarse la distribución relativa de celeridades entre las moléculas. Puede obtenerse la misma información a partir del experimento del disco giratorio, midiendo el depósito molecular correspondiente a velocidades angulares diferentes de los discos. La distribución de celeridades en el haz no es la misma que en el horno, si bien la distribución en éste puede deducirse de los datos de la distribución medida.

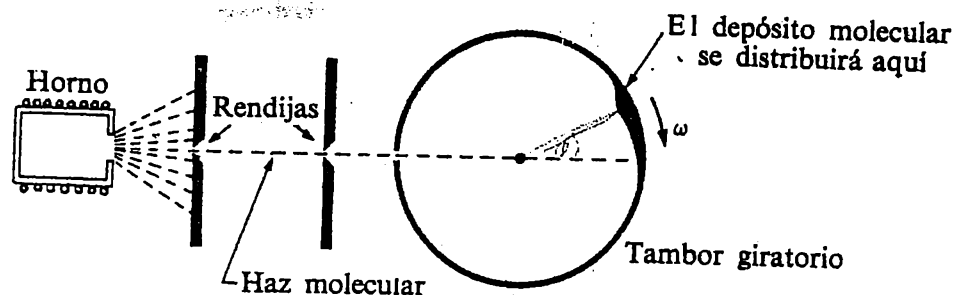


Fig. 16-8. Método del tambor giratorio para la medida de la velocidad de las moléculas.

Como en los experimentos se obtiene una distribución de celeridades, en vez de una celeridad única, no podrá realizarse una comparación de los resultados experimentales con el valor calculado en la ecuación (16-11). Recordemos que este valor era el de la velocidad cuadrática media de las moléculas y para compararla con los resultados experimentales debemos determinar el valor medio del cuadrado de las velocidades moleculares medidas. Ya hemos mencionado que para cada régimen de funcionamiento del selector de velocidades existe un dominio  $\Delta v$  de celeridades determinado que depende de la anchura de la rendija. Así, si representamos por  $\Delta n_1$  al número de moléculas correspondiente a la banda de celeridades comprendidas entre  $v_1$  y  $v_1 + \Delta v_1$ , por  $n_2$  el número de moléculas de la banda comprendida entre  $v_2$  y  $v_2 + \Delta v_2$ , etc., el valor medio del cuadrado de las velocidades de las moléculas vendrá dado por

$$\overline{v^2} = \frac{\Delta n_1 v_1^2 + \Delta n_2 v_2^2 + \Delta n_3 v_3^2 + \dots}{N}$$

$$N = \Delta n_1 + \Delta n_2 + \Delta n_3 + \dots$$

La raíz cuadrada de este resultado es la velocidad cuadrática media. Los resultados experimentales obtenidos de esta manera concuerdan satisfactoriamente con la velocidad prevista por la teoría cinética. No obstante, puede avanzarse más en el análisis teórico y resulta posible, no sólo determinar la velocidad cuadrática media, sino también la distribución de las celeridades entre las moléculas. Esta distribución fue deducida por MAXWELL y otros muchos antes de que se realizaran los anteriores experimentos.

**16-5 Distribución de Maxwell-Boltzmann.** En los experimentos anteriores, el número de moléculas detectado para un determinado régimen de funcionamiento depende de la anchura de la rendija, ya que ésta determina el «dominio»  $\Delta v$  de celeridades aceptadas. El dominio aceptado puede variar con la ve-

locidad de régimen, pero los datos tomados a diferentes regímenes pueden referirse a un dominio de celeridades patrón, ya que para valores pequeños del dominio el número de moléculas con celeridades comprendidas en el dominio  $\Delta v$  es proporcional a  $\Delta v$ . En otras palabras, si, en los experimentos, el dominio de celeridades es  $\Delta v_1$  y es  $\Delta n_1$  el número de moléculas con celeridades comprendidas entre  $v_1$  y  $v_1 + \Delta v_1$ , el número de moléculas por dominio de celeridades unitario será simplemente  $\Delta n_1/\Delta v_1$ . Si es  $N$  el número total de moléculas, la fracción de éste que corresponde al dominio de celeridades unitario de la velocidad  $v_1$  será  $(\Delta n_1/N)/\Delta v_1$ . Representando por  $f(v_1)$  a esta fracción del número total de moléculas por dominio unitario, podemos ver claramente que la fracción del número total de moléculas que corresponde al dominio  $\Delta v_1$  puede escribirse en la forma  $(\Delta n_1/N) = f(v_1) \Delta v_1$ . Análogamente, la fracción del número total de moléculas de otra celeridad  $v_2$  es  $f(v_2) \Delta v_2$ , etc. Evidentemente, la suma de todas las fracciones del número total de moléculas es la unidad, con lo cual  $f(v_1) \Delta v_1 + f(v_2) \Delta v_2 + f(v_3) \Delta v_3 + \dots = 1$ ; que expresado en forma de integral será

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1 \quad (16-13)$$

A la función  $f(v)$ , fracción del número total de moléculas por dominio de celeridades unitario se le da el nombre de *función de distribución de las celeridades*.

Puede sernos útil dar ahora un ejemplo conocido de función de distribución. Imaginemos que queremos medir la distribución de estaturas de los habitantes de una ciudad. Primeramente, mediremos la estatura de cada individuo. Luego, para poner de manifiesto cómo se distribuyen dichas estaturas, podemos ordenar los datos y hallar el número de individuos cuya estatura se halla comprendida entre 120 cm y 122 cm, entre 122 cm y 124 cm, entre 124 cm y 126 cm, etc. Estos datos se podrían presentar en forma de gráfica o histograma, en donde podríamos representar  $\Delta n$  en función de  $h$  ( $\Delta n$  = número de personas con estaturas comprendidas entre  $h$  y  $h + \Delta h$ , es decir, entre 122 cm y  $122 + 2 = 124$  cm). Desde luego, si hubiéramos subdividido a la población en grupos cuyas estaturas estuvieran comprendidas entre 120 cm y 121 cm, 121 cm y 122 cm, etc., cada ordenada de la gráfica sería la mitad que antes. En cambio, si representáramos  $\Delta n/\Delta h$  en función de  $h$ , la ordenada dependería muy poco de  $\Delta h$ . Si 10 000 personas tienen estatura comprendida entre 120 cm y 122 cm ( $\Delta n/\Delta h = 10\,000/2 = 5\,000$  personas/cm), sólo 5 000 tendrían su estatura comprendida entre 120 cm y 121 cm ( $\Delta n/\Delta h \simeq 5\,000/1 = 5\,000$  personas/cm) y al ir tomando intervalos  $\Delta h$  cada vez más estrechos, el valor de  $\Delta n/\Delta h$  tenderá a un cierto límite que, en este caso, no será muy diferente de 5 000. Si el número total de personas medidas es  $N = 100\,000$ , la fracción del número total de personas a quienes corresponde una estatura comprendida entre  $h$  y  $h + \Delta h$  será  $(1/N) (\Delta n/\Delta h) \Delta h$  que en nuestro ejemplo daría  $(1/20) \Delta h$  cuando  $h = 120$  cm. El valor límite de la cantidad  $(\Delta n/N)/\Delta h = f(h)$

cuando  $\Delta h$  tiende a cero es la función de distribución de estaturas. La fracción de la población con estaturas comprendidas entre  $h$  y  $h + \Delta h$  será, pues,  $f(h)\Delta h = \Delta n/N$ . No habrán personas de estatura nula o infinita, por lo que la función de distribución pasará por un máximo.

La función de distribución de celeridades obtenida por MAXWELL y BOLTZMANN es

$$f(v) = Bv^2 e^{-v^2/v_0^2} \quad (16-14)$$

donde

$$v_0^2 = \frac{2kT}{m}$$

La constante  $B$  debe tener un valor que satisfaga a la condición (16-13). Veremos (prob. 16-15) que el valor apropiado de la constante es

$$B = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{v_0^3} \quad (16-15)$$

Derivando la función de distribución de celeridades  $f(v)$  podemos hallar fácilmente que tiene un valor máximo igual a  $4e^{-1}/\sqrt{\pi} v_0$  a la celeridad

$$v_0 = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \quad (16-16)$$

(Véase prob. 16-16.) También podemos determinar otras propiedades características de la función de distribución. Ya indicamos en la ecuación (16-12a) un método por medio del cual se puede obtener el valor medio de los cuadrados de las velocidades moleculares. Si en dicha expresión introducimos  $\Delta n/N = f(v) dv$  se deduce que el valor medio del cuadrado de la velocidad puede expresarse mediante la integral

$$\overline{v^2} = \int_0^\infty v^2 f(v) dv \quad (16-17)$$

y, análogamente, la celeridad media viene determinada por

$$\bar{v} = \int_0^\infty v f(v) dv \quad (16-18)$$

Para determinar estos valores medios deberán conocerse las integrales de la forma  $\int_0^\infty v^s \exp(-v^2/v_0^2) dv$  para  $s = 3$  y  $4$ . En algunos de los problemas del final de este capítulo podrá precisarse conocer esta integral para otros valores de  $s$  consignados en la tabla 16-1. A partir de los valores dados y del valor de

B, hallamos que la *celeridad media* es

$$v_1 = \bar{v} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_0 \simeq 1,12v_0 \quad (16-19)$$

Tabla 16-1

$$I_s = \int_0^{\infty} v^s e^{-v^2/v_0^2} dv.$$

s	0	1	2	3	4
$I_s$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} v_0$	$\frac{v_0^2}{2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{4} v_0^3$	$\frac{v_0^4}{2}$	$\frac{3}{8}\sqrt{\pi} v_0^5$

y la *velocidad cuadrática media* es

$$v_2 = \sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3}{2}} v_0 \simeq 1,22v_0 \quad (16-20)$$

donde  $v_0 = \sqrt{2kT/m}$ . Sobre la curva de distribución de la figura 16-9 se han indicado las distintas celeridades que presenta la función de distribución de celeridades del nitrógeno a 273°K.

EJEMPLO. ¿Cuál es la celeridad más probable  $v_0$  de las moléculas del nitrógeno a la temperatura de 20° C y qué fracción del número total de moléculas corresponde al dominio de velocidades comprendidas entre  $0,9v_0$  y  $1,1v_0$ ?

La celeridad más probable es  $v_0 = \sqrt{2RT/M}$ . La masa molecular del nitrógeno es  $14 \cdot 2 = 28$ , pues el nitrógeno es diatómico. La celeridad más probable será, pues,

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 10^7 \cdot 293}{28}} = 4,2 \cdot 10^4 \text{ cm/s.}$$

La fracción del número total de moléculas que corresponde al intervalo comprendido entre  $0,9v_0$  y  $1,1v_0$  es

$$\frac{\Delta n}{N} = \int_{0,9v_0}^{1,1v_0} f(v) dv$$

que puede escribirse en forma aproximada de la manera siguiente:

$$\frac{\Delta n}{N} = \int_{0,9v_0}^{1,1v_0} f(v) dv \simeq f(v_0)0,2v_0$$

† ver integración numérica: regla pitagorica



Con

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{v_0^3} e^{-v^2/v_0^2}$$

obtenemos  $f(v_0) = 4/(\sqrt{\pi} \cdot v_0 \cdot e)$  y multiplicando por  $0,2v_0$  se tiene  $\Delta n/N = 0,2 \cdot 4/(\sqrt{\pi} \cdot e) \simeq 0,17$ . En otras palabras, alrededor del 17 % del número total de moléculas tienen celeridades comprendidas en el intervalo entre  $0,9v_0$  y  $1,1v_0$ .

La distribución de Maxwell-Boltzmann indica que la distribución de celeridades depende de la temperatura. El valor máximo  $4/(\sqrt{\pi} \cdot v_0 \cdot e)$  de la función de distribución disminuye al aumentar la temperatura mientras la posición del máximo se desplaza hacia las celeridades más elevadas, según se indica en la figura 16-10. Aun cuando varíen con la temperatura el máximo y la forma de las curvas, todas limitan entre ella y el eje de abscisas la misma área. Es decir,  $\int_0^\infty f(v) dv = 1$ .

Según la función de distribución, habrán moléculas con celeridades de todos los valores entre cero e infinito. Consecuencia de esta distribución es que algunas moléculas de la atmósfera tendrán celeridades superiores a la llamada velocidad de escape del planeta. En consecuencia, un planeta se halla sometido continuamente a una pérdida de atmósfera, pérdida que es particularmente importante a temperaturas elevadas y para gases ligeros.

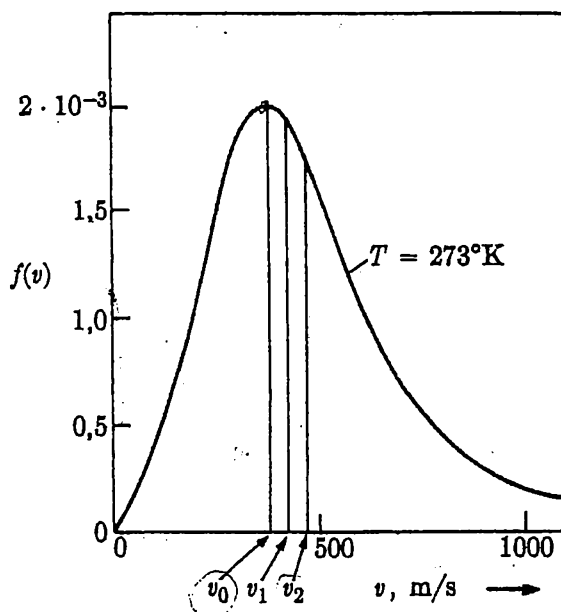


Fig. 16-9. Función de distribución de celeridades para el nitrógeno a 273° K. La celeridad más probable  $v_0$  la celeridad media  $v_1 = \bar{v} = \int v f(v) dv$  y la velocidad cuadrática media  $v_2 = \sqrt{\int v^2 f(v) dv}$ , son las indicadas.

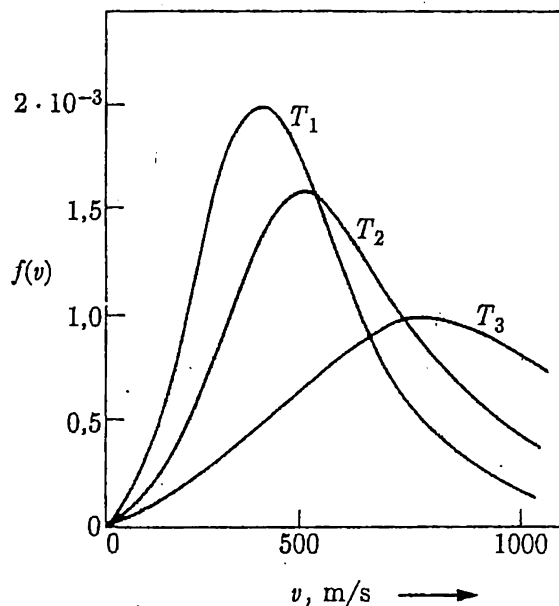


Fig. 16-10. La función de distribución varía con la temperatura.  $T_3 > T_2 > T_1$ .

**16-6 Calor específico.** En el capítulo 14 se introdujo el concepto de calor como cantidad que se conserva cuando se ejercen interacciones térmicas entre cuerpos. Recordemos que si en una interacción térmica la variación de temperatura de un cuerpo de masa  $m$  resulta ser  $\Delta T$ , el contenido calorífico del cuerpo varía en una cantidad  $\Delta Q = cM \Delta T$ , donde  $c$  es el calor específico del cuerpo. La teoría cinética nos ha dado ahora una interpretación de la temperatura mediante la energía cinética de las moléculas. Si dos gases de temperaturas diferentes se ejercen interacción, sabemos que variarán las temperaturas de ambos, pero que la energía cinética total de las moléculas permanecerá invariable. Es natural, pues, suponer que el calor corresponde a la energía mecánica total del movimiento molecular. Esta hipótesis ha resultado perfectamente compatible con los resultados experimentales y el principio generalizado de la conservación de la energía, y puede considerarse como un hecho probado (véase cap. 17).

Según la teoría cinética, una masa  $M$  de gas tiene una energía cinética total de  $Nmv^2/2 = Mv^2/2 = 3NkT/2$ , donde  $N$  es el número de moléculas existentes. Al aumentar la temperatura en  $\Delta T$ , la energía cinética total aumenta en  $3Nk \Delta T/2$ . Por otra parte, según la definición de calor específico, el calor absorbido  $Mc \Delta T$  corresponde a una elevación de temperatura  $\Delta T$ . Luego, si identificamos el calor absorbido con el incremento de energía cinética, obtenemos  $3Nk \Delta T/2 = Mc \Delta T$ . Para un mol de gas tenemos  $N_0 k = R$ , y  $M$  es la masa molar. El calor específico de un mol de gas es, pues,  $Mc = C$ , o sea que el calor específico molar es  $C = 3R/2$ . Hemos visto que la constante universal  $R$  de los gases, tiene el valor  $8,31 \cdot 10^7$  erg/mol $\cdot^\circ\text{C}$  o sea  $8,31$  J/mol $\cdot^\circ\text{C}$ . Si tomamos  $4,185$  J de energía mecánica como equivalentes a  $1$  caloría de calor, según in-

dican los experimentos en los que se disipa energía mecánica (véase apart. 17-1), podemos expresar  $R$  como  $1,99 \text{ cal/mol}\cdot^\circ\text{C}$ . Luego, podemos prever que el calor específico de un gas sea  $C = 3R/2 = 2,98 \text{ cal/mol}\cdot^\circ\text{C}$  o sea, aproximadamente,  $3 \text{ cal/mol}\cdot^\circ\text{C}$ .

Es importante que comparemos esta predicción con los resultados experimentales de las medidas de gases reales. Pero antes vamos a decidir cómo va a medirse el calor específico de un gas, ya que al calentar éste tiende a expandirse y, por tanto, deberemos elegir o un volumen constante o una presión constante. Podemos concebir que varíen el volumen y la presión simultáneamente, pero no que se mantengan ambos constantes si ha de variar la temperatura.

En el desarrollo de la teoría cinética y de la ecuación de estado de los gases perfectos, de donde obteníamos  $C = 3R/2$ , se suponía que las paredes del recipiente se mantenían en posiciones fijas, con lo que en los choques elásticos entre moléculas y paredes, la energía de aquéllas no variaba. En cambio, si se movieran las paredes habría habido en el choque una variación de la energía molecular, según estudiaremos con más detalle en el capítulo próximo. En consecuencia, la teoría se refiere a un gas a volumen constante. Para indicar que el calor específico se refiere a las condiciones de volumen constante, representaremos el calor específico molar correspondiente por  $C_v$ :

$$C_v = \frac{3}{2}R \quad (16-21)$$

Más adelante estudiaremos el calor específico a presión constante y hallaremos que está relacionado de manera muy sencilla con  $C_v$ .

En la tabla 16-2 se consignan los valores de los calores específicos de algunos gases representativos en la región entre  $0^\circ\text{C}$  y  $30^\circ\text{C}$ . Expresados en  $\text{cal/g}\cdot^\circ\text{C}$  parece haber muy poca regularidad u orden en los calores específicos. Varían desde un valor elevado de 2,4 hasta uno bajo de 0,015  $\text{cal/g}\cdot^\circ\text{C}$ . Se precisa 16 veces más calor para elevar un grado la temperatura de un gramo de hidrógeno que para hacer lo mismo con un gramo de vapor de mercurio. Cuando se expresan los calores específicos en  $\text{cal/mol}\cdot^\circ\text{C}$ , los valores para los distintos gases (excepto el éter) son ya mucho menos diferentes. Nos encontramos con el hecho alentador de que el calor específico molar de algunos gases es igual a  $3 \text{ cal/mol}\cdot^\circ\text{C}$ , tal como predecía la primera versión de la teoría cinética. Sin embargo, aparecen otros resultados que se apartan mucho del valor previsto. Los gases cuyos calores específicos están de acuerdo con nuestra predicción son los gases monoatómicos: helio, neón, argón, kriptón, xenón y mercurio. Los calores específicos de los gases poliatómicos son mayores, pero veremos que estos resultados también admiten interpretación según la teoría cinética. (Las moléculas de los gases poliatómicos pueden tener energía cinética de rotación

TABLA 16-2. CALORES ESPECÍFICOS DE LOS GASES

Gas	$C_v$		$C_p$	$\gamma = C_p/C_v$
	cal/g. °C	cal/mol. °C	cal/mol. °C	
H <sub>2</sub>	2,4	4,8	6,8	1,41
He	0,755	3,02	5,00	1,66
N <sub>2</sub>	0,176	4,93	6,93	1,40
O <sub>2</sub>	0,155	4,99	6,99	1,40
Ne	0,153	3,1	5,1	1,64
Cl <sub>2</sub>	0,0848	6,01	8,15	1,36
A	0,075	3,0	5,0	1,67
Kr	0,0359	2,9	4,9	1,68
Xe	0,0228	3,0	5,0	1,67
Hg*	0,0150	3,0	5,0	1,67
NO	0,166	4,97	6,97	1,40
CO	0,179	5,017	7,014	1,40
CO <sub>2</sub>	0,153	6,86	8,89	1,30
HCl	0,137	5,02	7,08	1,41
SO <sub>2</sub>	0,117	7,5	9,7	1,29
Eter	0,416	30,8	33,3	1,08

\*A 300° C.

y vibración, además de la correspondiente a la traslación de sus centros de masa.) En la tabla 16-2 hemos indicado también los valores medidos del calor específico a presión constante  $C_p$  y del cociente  $C_p/C_v$  que estudiaremos en el capítulo siguiente.

*Equipartición de la energía.* Si se incrementa localmente la temperatura de un gas, el incremento local correspondiente de energía cinética se distribuirá por todo el volumen del gas hasta que la energía cinética por unidad de volumen sea la misma en todos los puntos. La energía cinética media de traslación por molécula, en este estado de equilibrio térmico, será  $3kT/2$ . Obsérvese que esta energía no depende de las masas de las moléculas. Todos los gases, independientemente de sus masas moleculares, tendrán a la temperatura  $T$  una energía cinética de traslación molecular de este valor. Análogamente, si se mezclan en un mismo recipiente dos gases distintos, se alcanzará el equilibrio térmico cuando las temperaturas de ambos gases sean iguales. La energía cinética media de las moléculas de los dos gases será entonces la misma, a pesar de la diferencia de sus masas moleculares. Los choques sucesivos entre moléculas en

el recipiente tienden, pues, a distribuir uniformemente la *energía cinética* (y no la celeridad, por ejemplo) por todo el volumen. Esta distribución uniforme de energía cinética entre las moléculas de masas diferentes constituye el ejemplo más sencillo del *principio de equipartición de la energía*. Este principio, no sólo es aplicable a las moléculas sino también a partículas mayores, como las de humo, que están en equilibrio térmico en el gas. Ya hemos estudiado un experimento, la salida de gases por un orificio (apart. 16-2), que constituye una comprobación experimental directa de la equipartición de la energía en las mezclas.

**EJEMPLO.** Una partícula de humo de masa  $m = 5 \cdot 10^{-14}$  g se mueve a través de aire cuya temperatura es  $30^\circ$  C. ¿Cuál es la velocidad cuadrática media de la partícula de humo? Si puede considerarse ésta como esfera de radio  $r = 2 \cdot 10^{-5}$  cm, estimar el número de choques por segundo que realiza con las moléculas del gas.

Según el principio de equipartición de la energía, suponemos que no sólo las moléculas del gas, sino también cualquier otra partícula que pueda moverse libremente por el gas adquiere una energía de traslación  $3kT/2$  a consecuencia de la interacción con el gas. La velocidad cuadrática media de la partícula es, pues,

$$\sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-16} \cdot 293 / (5 \cdot 10^{-14})} \simeq 1,6 \text{ cm/s.}$$

El área de la superficie de la partícula de humo es  $4\pi r^2$ . El número de choques moleculares por unidad de superficie es  $n\bar{v}/4$  por segundo y el número de choques con la partícula será, pues,  $4\pi r^2 n\bar{v}/4$  por segundo. A la presión atmosférica, el volumen de «un mol» de aire es  $(293/273)22,4 \simeq 26,2$  litros, el número de partículas por unidad de volumen es  $n = (6,02 \cdot 10^{23})/26,2 \cdot 10^3 \simeq 2,3 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$  y la celeridad media (con  $M = 28$ ) es  $420 \text{ m/s}$ . El número de choques con la partícula de humo en unidad de tiempo es, pues,  $4\pi \cdot (2 \cdot 10^{-5})^2 \cdot (2,3 \cdot 10^{19}) \cdot (420 \cdot 10^2)/4 \simeq 1,2 \cdot 10^{15}$  por segundo.

*Moléculas diatómicas y poliatómicas.* En el estudio de los resultados experimentales referentes al calor específico hemos visto que los valores que predice la ecuación (16-19) sólo son aplicables a moléculas monoatómicas (a temperaturas ordinarias), según se desprende de la tabla 16-2. En el caso de moléculas diatómicas y poliatómicas, el calor específico molar resulta ser mayor que el valor de  $3 \text{ cal/mol} \cdot ^\circ\text{C}$  correspondiente a las moléculas monoatómicas. La interpretación molecular de este resultado indica que un gas diatómico o poliatómico posee más energía cinética que un gas monoatómico a la misma temperatura. ¿Cómo podemos explicar esta diferencia entre gases monoatómicos y diatómicos, con arreglo a la teoría cinética?

En primer lugar, observamos que la teoría cinética exige que la energía cinética de traslación sea siempre  $3kT/2$  por molécula, *independientemente de cuál sea la masa o naturaleza* de la molécula. En consecuencia, el gas diatómico o poliatómico deberá poseer, además de la energía de traslación, otras formas

de energía. Es razonable suponer que, además del movimiento de traslación, estas moléculas estén animadas de movimiento de rotación y quizá de vibración. Cuando se mueven las moléculas de un gas, uno de los átomos de una molécula diatómica se verá alcanzado en cualquier dirección y no sólo se comunicará cantidad de movimiento a la molécula, sino también momento cinético. La energía de rotación de la molécula dará cuenta de parte del calor específico del gas. ¿cómo podremos determinar la manera en que la energía total de la molécula se divide entre energía de traslación y de rotación (o vibración)? Ya hemos mencionado que, a volumen constante, la mayoría de los gases diatómicos consignados en la tabla 16-2 tienen calores específicos de alrededor de  $5 \text{ cal/mol} \cdot ^\circ\text{C}$ , mientras que para los gases monoatómicos es aproximadamente  $3R/2$  o sea  $3 \text{ cal/mol} \cdot ^\circ\text{C}$ . Los gases diatómicos, pues, además de  $3 \cdot (R/2)$  por mol que expresa sólo su energía cinética de traslación, tiene otro término igual a  $2 \cdot (R/2)$ . Esta parte aditiva, en función de la energía media por molécula, es  $2 \cdot (kT/2)$ .

Podemos interpretar este resultado de la manera siguiente. La energía cinética de traslación es  $mv^2/2 = mv_x^2/2 + mv_y^2/2 + mv_z^2/2 = 3kT/2$ , y vemos que a cada una de las tres componentes de la velocidad está asociada una energía cinética  $kT/2$ . Si suponemos ahora que, en equilibrio térmico, cada grado de libertad de rotación adquiere también una energía  $kT/2$  y si suponemos además que se excitan dos de los tres grados de libertad de la rotación, podremos interpretar la energía de rotación  $2kT/2$  de la molécula diatómica. Aun cuando esta interpretación nos dará, sin duda, la energía  $(3 + 2)kT/2 = 5kT/2$  que exigen los resultados experimentales, nos podemos preguntar por qué sólo consideramos dos de los tres grados de libertad de rotación. Aclararemos esto de la manera siguiente.

Imaginemos que la molécula diatómica tiene la forma de una haltera o, si se quiere, de dos esferas o átomos en contacto, como se indica en la figura 16-11.

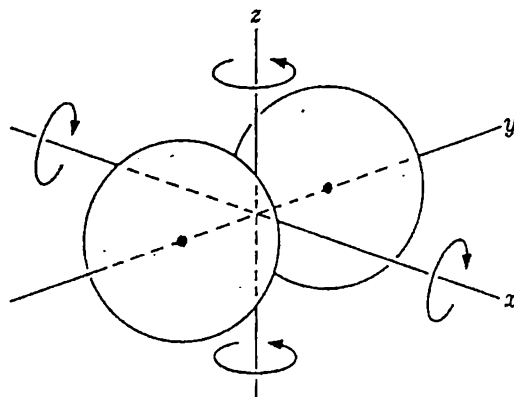


Fig. 16-11. Una molécula diatómica adquiere energía cinética de rotación alrededor de los dos ejes indicados.

A causa de los choques, es claro que deberemos suponer que la molécula se pondrá en rotación alrededor de los ejes de las  $x$  y de las  $z$  representados en la figura. En cambio, si suponemos, como antes, que las moléculas son esferas lisas, no habrá posibilidad de ceder momento cinético respecto al eje  $y$ . Por tanto, si la molécula inicia su movimiento sin rotación alrededor de dicho eje, permanecerá siempre en este estado de movimiento. Además, en el cálculo del calor específico de un gas monoatómico no considerábamos rotación de los átomos y si ha de ser compatible la teoría, tampoco hemos de considerar la rotación correspondiente de la molécula diatómica. (La justificación completa sólo puede darla la teoría cuántica.) Por tanto, aceptando la interpretación de la equipartición de la energía dada anteriormente, la velocidad angular de rotación de la molécula diatómica está expresada por

$$\frac{I_x \omega_x^2}{2} = \frac{kT}{2} \quad (16-22)$$

donde  $I_x$  es el momento de inercia de la molécula.

**EJEMPLO.** Así como podemos calcular las velocidades de rotación de las moléculas diatómicas de una manera en todo análoga a la empleada para calcular las velocidades de traslación de las moléculas, para medir las velocidades de rotación no existe ningún método directo análogo. A pesar de todo, será interesante ver cuál es la velocidad de rotación de las moléculas de oxígeno a la temperatura ambiente, por ejemplo.

Un átomo de oxígeno tiene una masa  $m = M/N_0 = 16/(6,02 \cdot 10^{23}) = 2,65 \cdot 10^{-23}$  g. Si la molécula consiste en dos átomos esféricos de radio  $r$  en contacto y si toda la masa de un átomo se halla concentrada en su centro, el momento de inercia de la molécula es

$$I = 2 mr^2$$

Entonces, por el principio de equipartición de la energía, tenemos

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} kT = \frac{1}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-16} \cdot 300 \simeq 2,1 \cdot 10^{-14} \text{ erg}$$

Si tomamos el radio atómico  $r$  igual a  $1,4 \text{ \AA} = 1,4 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ , tenemos para el momento de inercia

$$I = 2 \cdot 2,65 \cdot 10^{-23} \cdot (1,4 \cdot 10^{-8})^2 \simeq 1,04 \cdot 10^{-38} \text{ g} \cdot \text{cm}^2$$

La velocidad angular es, pues,  $\omega = \sqrt{kT/I} = 1,4 \cdot 10^{12} \text{ rad/s}$  o sea unas  $10^{11}$  rotaciones por segundo.

Generalizando los resultados de estas observaciones referentes a la distribución de la energía, podemos decir que a cada grado de libertad del movi-

miento corresponde una energía  $kT/2$ . En otras palabras, si escribimos la energía total de una molécula y es  $l$  el número de términos que contiene el cuadrado de una velocidad o una velocidad angular, la energía media de la molécula será  $lkT/2$ . Esto ilustra el *principio de equipartición de la energía*.

Basándonos en esto podíamos esperar que el calor específico de las moléculas poliatómicas sea  $6R/2$ , ya que sería posible la rotación alrededor de los tres ejes. Sin embargo, la situación no es tan sencilla, puesto que en la tabla 16-2 las tres moléculas poliatómicas consignadas tienen por calores específicos 6,86; 7,5 y 30,8 cal/mol·°C. En realidad, no es necesario acudir a un gas poliatómico para hallar este tipo de discrepancia. En la figura 16-12 se han indicado las medidas del calor específico del hidrógeno, que es un gas diatómico, realizadas a diferentes temperaturas. Aún cuando existe una región de temperaturas en la cual el calor específico es  $5R/2$ , tal como predice la teoría anterior,  $C_v$  puede variar desde  $3R/2$  a temperaturas muy bajas, hasta  $7R/2$  a temperaturas muy elevadas. Podemos comprender el valor  $7R/2$  sin salirnos de la teoría de la equipartición si suponemos que, además de tener movimiento de rotación, la molécula también vibra. En el capítulo 8 estudiamos las vibraciones moleculares y vimos que la fuerza intermolecular entre dos moléculas es análoga a la fuerza de un resorte en la proximidad del punto de equilibrio. La energía de vibración del movimiento armónico molecular es  $H = mv^2/2 + Kx^2/2$ ; es decir, la suma de las energías cinética y potencial. Si a cada uno de esos términos le asignamos un valor  $kT/2$ , obtenemos para el calor específico  $7R/2$  ( $3R/2$  para la traslación,  $2R/2$  para la rotación y  $2R/2$  para la vibración). Sin embargo, el comportamiento del calor específico a otras temperaturas, las transiciones entre  $5R/2$  y  $7R/2$  y en particular el comportamiento del calor específico en la región de temperaturas comprendidas entre 0°K y 100°K, no se

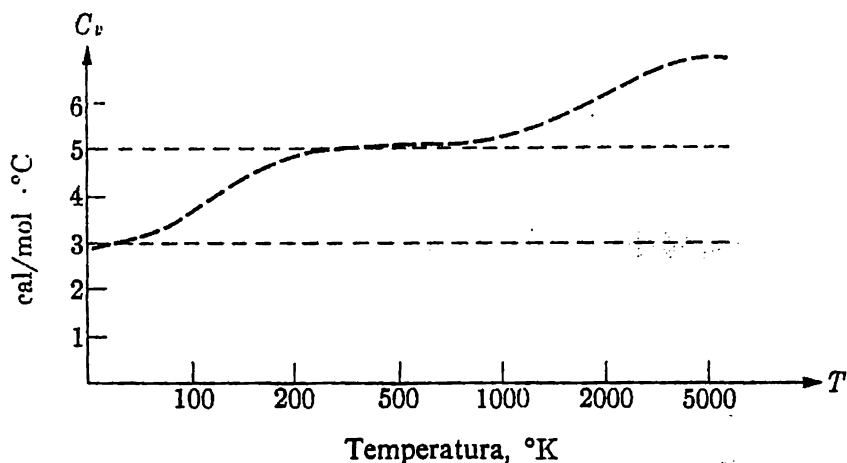


Fig. 16 - 12. Calor específico de un volumen constante de gas hidrógeno, en función de la temperatura.



pueden explicar con la teoría cinética. Este problema del calor específico fue uno de los primeros que representaron un serio conflicto entre los experimentos y la teoría clásica del movimiento y que llevaron al desarrollo de la teoría cuántica. La teoría clásica concuerda con la cuántica, solamente en la región de las temperaturas elevadas.

En el caso de un gas poliatómico existen varios modos posibles de vibración además de los tres grados de libertad de traslación y los tres de rotación y el calor específico puede alcanzar valores muy elevados, según se indica en la tabla 16-2.

*Explicación cuántica de la variación del calor específico con la temperatura.* Según la Mecánica clásica (newtoniana), un cuerpo rígido puede girar con un momento cinético cualquiera. Desde luego, no existe límite evidente alguno para lo despacio que pueda girar una rueda de bicicleta. Sin embargo, la teoría cuántica exige que el momento cinético de un cuerpo sólo pueda tener ciertos valores fijos  $l = nh/2\pi$ , donde  $h = 6,625 \cdot 10^{-27}$  erg·s es la constante de Planck y  $n$  es un entero, 0, 1, 2, 3, ... La constante de Planck representa un momento cinético muy pequeño; por ejemplo, una rueda de bicicleta que gire a 3 revoluciones por segundo tiene un momento cinético de  $10^7$  erg·s, aproximadamente. Ello significa que para dicha rueda de bicicleta en movimiento, el valor de  $n$  en la cantidad  $nh/2\pi$  será aproximadamente igual a  $10^{34}$ . Por tanto, para todos los fines prácticos, una rueda de bicicleta podrá girar con un momento cinético del valor que se quiera, porque  $n$  es un entero tan grande y los enteros  $n$  se hallan tan poco separados (relativamente) en el caso de un objeto del tamaño de una rueda de bicicleta girando a una velocidad razonable.

En cambio, en el caso de un objeto del tamaño de una molécula la situación es totalmente distinta. La energía cinética de rotación es  $E_{\text{rot}} = I\omega^2/2$ , o bien  $l^2/2I$  expresada en función del momento cinético. Con la restricción cuántica tenemos, pues,  $E_{\text{rot}} = n^2h^2/8\pi^2I$  y la energía cinética de rotación mínima que puede tener una molécula (aparte de cero) es  $h^2/8\pi^2I$ , valor correspondiente a  $n = 1$ . Hemos visto que según el principio de equipartición de la energía, a cada grado de libertad que tenga una molécula hay que asociarle una energía media  $kT/2$ , pero en el caso de objetos del tamaño de una molécula de hidrógeno (a  $10^\circ\text{K}$  p. e.),  $kT/2$  es menor que la energía cinética de rotación mínima posible. En otras palabras, la restricción cuántica impide que las moléculas adquieran energía cinética de rotación a bajas temperaturas. Tan sólo cuando  $kT$  se hace mucho mayor que la energía cinética de rotación mínima, podrán adquirir las moléculas la energía cinética de rotación especificada por el principio de equipartición de la energía.

Análogamente, también existe una restricción cuántica a los valores de la energía de vibración que puede tener una molécula. Los valores posibles son  $E_{\text{vib}} = nhf_0$ , donde  $n$  es un número entero y  $f_0$  es la frecuencia propia de vibración  $\sqrt{K/m}$ . La energía mínima de vibración para el hidrógeno es aún mayor

que la energía mínima de rotación y por eso el hidrógeno sólo podrá vibrar al mismo tiempo que gira, a las temperaturas más elevadas. *En el límite de las temperaturas elevadas, el calor específico del hidrógeno es el que predice el principio clásico de la equipartición de la energía.* A temperaturas bajas aparecen divergencias respecto a él debidas a fenómenos cuánticos.

A partir de estas consideraciones también podemos ofrecer una explicación razonable (aunque no totalmente correcta, según la Mecánica cuántica) de por qué los átomos simples (moléculas monoatómicas) no adquieren energía cinética de rotación y por qué las moléculas diatómicas pueden girar aparentemente sólo alrededor de dos de los tres ejes posibles de rotación. Mientras un átomo genérico tiene un radio de  $10^{-8}$  cm, el núcleo, que contiene prácticamente toda la masa del átomo, sólo tiene un radio de  $10^{-12}$  o  $10^{-13}$  cm. Ello significa que una molécula diatómica tendrá para dos de los ejes el mismo momento de inercia relativamente grande, mientras que el correspondiente al tercer eje, que es el definido por la recta que une los núcleos, es muchísimo menor. Análogamente, el momento de inercia de un átomo es muy pequeño respecto a sus tres ejes. Como la energía cinética de rotación mínima posible es inversamente proporcional al momento de inercia, resulta claro que las rotaciones alrededor de estos ejes de momentos de inercia tan pequeños requerirían energías enormemente grandes.

**16-7 Choques entre moléculas. Recorrido libre medio. Experimento de dispersión.** Hasta ahora no ha habido necesidad de realizar un estudio cuantitativo del efecto de los choques entre moléculas. Sólo hemos considerado dichos choques desde un punto de vista cualitativo; en otras palabras, como el fenómeno físico al que se debe el establecimiento del equilibrio térmico y que produce equipartición de la energía. Sin embargo, admitida esta equipartición, no hemos precisado considerar los choques en nuestra deducción de, por ejemplo, la ecuación de estado de los gases perfectos y del calor específico de los gases. No obstante, sin un estudio cuantitativo de los choques moleculares no pueden comprenderse muchos efectos y propiedades de los gases y moléculas, tales como la conducción del calor y la viscosidad. Además, como dichos choques están íntimamente relacionados con los tamaños de las moléculas, deberán tenerse en cuenta en los experimentos destinados a determinar tamaños moleculares. Antes de estudiar estas cuestiones, presentaremos un análisis teórico sencillo de los choques entre moléculas, a partir del cual podemos determinar, en función de las dimensiones moleculares y la densidad del gas, el número de choques en unidad de tiempo y el llamado *recorrido libre medio*.

*Choques en unidad de tiempo y recorrido libre medio.* Imaginemos un gas como conjunto de moléculas esféricas de radio  $r$ , según se representa en la figura 16-13. Existirán  $n$  de dichas moléculas por unidad de volumen. Centre-mos nuestra atención en una de ellas, indicada por la letra  $A$  en la figura. Al

avanzar  $A$ , chocará contra toda molécula cuyo centro se halle a una distancia inferior a  $2r$  del centro de  $A$ . Se trata de determinar el número de choques que sufrirá una molécula en función de su celeridad, radio y número de moléculas por unidad de volumen. El problema resulta algo complicado si se tiene en cuenta el hecho de que todas las moléculas están en movimiento. No obstante, sin sacrificar demasiado la esencia del problema, podemos simplificarlo considerablemente suponiendo en reposo todas las moléculas excepto la  $A$ . Podremos determinar fácilmente, entonces, el número de moléculas que chocan por segundo contra  $A$ . Para mayor sencillez, supongamos que la masa de  $A$  es mucho mayor que la de las demás moléculas, con lo que podremos despreciar la variación de velocidad de  $A$  en cada choque. Así pues,  $A$  avanzará como un arado, apartando a todas las moléculas que halle en su camino. Según se indica en la figura 16-13, serán alcanzadas por  $A$  todas las moléculas que se hallen dentro de un cilindro de radio  $2r$ , es decir, de radio doble que el molecular. En un tiempo  $\Delta t$ , la molécula  $A$  barrerá un cilindro de longitud  $v \Delta t$  y volumen  $\pi(2r)^2 v \Delta t$ . El número de moléculas que se hallan en este cilindro es  $n \cdot \pi(2r)^2 v \Delta t$ , y  $A$  choca con todas ellas. El número de choques que realiza  $A$  por segundo es, pues,

$$\nu = 4\pi r^2 \cdot nv \quad (16-23)$$

El tiempo medio entre choques será, pues,  $\tau = 1/\nu$ , y la distancia media recorrida entre choques es  $l = v\tau$ . A esta distancia se le llama *recorrido libre medio*. Si introducimos el valor  $\tau = 1/\nu$  dado por la ecuación (16-7), obtenemos

$$l = \frac{1}{4\pi r^2 \cdot n} \quad (16-24)$$

En este análisis simplificado, los resultados obtenidos difieren sólo ligeramente de los correspondientes a un análisis más riguroso en el que se tengan

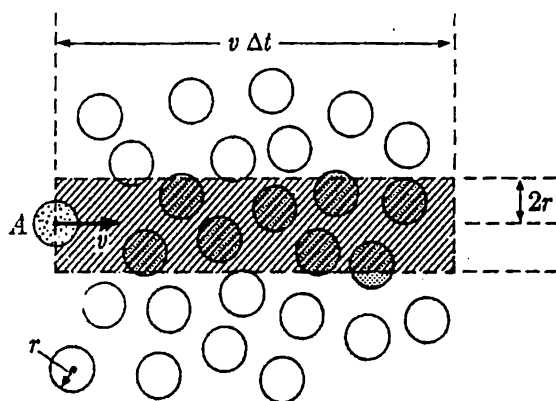


Fig. 16 - 13. Todas las moléculas cuyo centro se halle a una distancia inferior a  $2r$  del centro de  $A$ , chocarán con  $A$ .

en cuenta los movimientos de las moléculas, los cambios de dirección en los choques y la distribución de velocidades entre las moléculas. En lugar del factor  $1/4\pi$  de las ecuaciones (16-23) y (16-24), encontramos entonces  $1/(\sqrt{2} \cdot 4\pi)$ . La celeridad  $v$  de la ecuación (16-23) debe interpretarse como la celeridad media  $\bar{v}$ .

Como la presión de un gas es proporcional al número de partículas por unidad de volumen, de la ecuación (16-24) se deduce que el recorrido libre medio es inversamente proporcional a la presión del gas. En efecto, si sustituimos  $n = N_0/V = N_0P/RT$ , donde  $N_0$  es el número de Avogadro, obtenemos  $l = RT/4\pi r^2 N_0 P$ . Con un radio molecular de unos  $10^{-8}$  cm, encontramos que el recorrido libre medio es del orden de  $10^{-5}$  cm en un gas a la presión atmosférica y a una temperatura aproximada de  $300^\circ\text{K}$ ; es decir, es mil veces mayor que las dimensiones moleculares supuestas. Para obtener un recorrido libre medio de un metro, la presión debe ser solamente de  $1,5 \cdot 10^{-5}$  mm de Hg. Esta presión se encuentra, por ejemplo, a una altura de 150 km en nuestra atmósfera. (En la región entre las estrellas de la Vía Láctea sólo llega a haber un átomo por centímetro cúbico y el recorrido libre medio correspondiente es de varios miles de millones de kilómetros.) Como los átomos tienen celeridades del orden de 500 m/s a temperaturas ordinarias, la frecuencia de choque a la presión atmosférica es del orden de  $v/l = 50\,000/10^{-5} = 5 \cdot 10^9$  choques por segundo.

*Experimento de dispersión.* Los experimentos de dispersión a partir de los cuales pueden determinarse recorridos libres medios proporcionan una de las medidas más importantes de los tamaños de átomos y moléculas. Estudiaremos un haz molecular mientras atraviesa una región llena de gas, en vez de tratarse del vacío como en las medidas de velocidad estudiadas en el apartado anterior. Con auxilio de bombas, podremos variar a voluntad la densidad del gas en esta región. Es evidente que cuando una molécula del haz choque con una del gas, a la que llamaremos *molécula blanco*, se desviará y saldrá del haz. En consecuencia, cuando el haz atraviese el gas, la intensidad de aquél, es decir, el número de moléculas del haz que atraviesan la unidad de superficie en unidad de tiempo, disminuirá al aumentar la distancia recorrida. Midiendo esta disminución podremos averiguar algo acerca de los choques que se producen en unidad de tiempo y del recorrido libre medio y en consecuencia, acerca de las dimensiones de las moléculas. Siguiendo el estudio anterior de los choques moleculares, podremos analizar fácilmente un experimento de dispersión de un haz molecular.

Consideremos un haz de átomos lanzados hacia un detector  $D$  en la forma indicada en la figura 16-14. Si, como antes, suponemos que tanto los átomos del haz como los del blanco son esferas duras de radio  $r$ , un átomo del haz chocará con un átomo blanco si el centro del átomo del haz pasa por el interior de un círculo de radio  $2r$  trazado alrededor del centro del átomo blanco. En

otras palabras, por lo que respecta a los choques, la sección recta eficaz de un átomo blanco presentada al centro de un átomo del haz es  $4\pi r^2$ . En consecuencia, si despreciamos el solapamiento de las secciones de diferentes átomos blanco, se deduce que los  $nA dx$  átomos contenidos en el elemento de volumen  $A dx$  del haz de sección  $A$ , ofrecen un área de obstrucción total  $(nA dx) \cdot 4\pi r^2$ . El tanto por uno de moléculas del haz que chocarán con las moléculas blanco a lo largo de la distancia  $dx$  es igual a la fracción de área obstruida, es decir  $(nA dx \cdot 4\pi r^2)/A$ . En otras palabras, si representamos por  $I(x)$  la intensidad de átomos en la posición  $x$ , la cantidad en que disminuirá la intensidad a lo largo de la distancia  $dx$  es  $I n 4\pi r^2 dx$ . La variación con  $x$  de la intensidad del haz estará descrita por la ecuación

$$\frac{dI}{I} = -4\pi r^2 n dx$$

Esta ecuación puede integrarse directamente y hallamos

$$I = I_0 e^{-4\pi r^2 n x} = I_0 e^{-x/l} \quad (16-25)$$

donde  $l = 1/4\pi r^2 n$  es el recorrido libre medio que se halló en la ecuación (16-24). Se ha representado por  $I_0$  la intensidad del haz molecular en  $x = 0$ .

Estudiemos brevemente cómo puede realizarse una medida del recorrido libre medio. En la figura 16-15 puede verse un esquema del aparato adecuado. En la figura no se ha representado la bomba de vacío capaz de reducir la presión del sistema a menos de  $10^{-5}$  mm de mercurio y mediante la cual se introduce el gas dispersor, argón, por ejemplo. En la cápsula de la izquierda hay un poco de potasio metálico. El potasio, calentado eléctricamente, se funde y origina un gas de átomos de potasio en el interior de la cápsula o horno. Parte de los

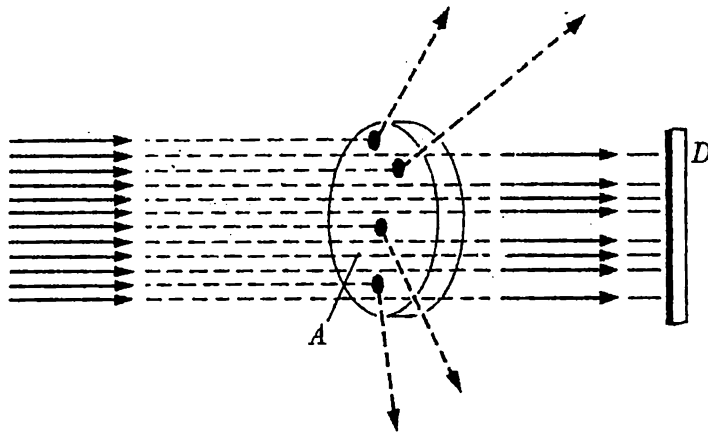


Fig. 16-14. Las moléculas blanco de un elemento de volumen  $A dx$  ofrecen un área de obstrucción  $4\pi r^2 n A dx$  y dispersan una fracción  $4\pi r^2 n A dx / A = 4\pi r^2 n dx$  del haz incidente.

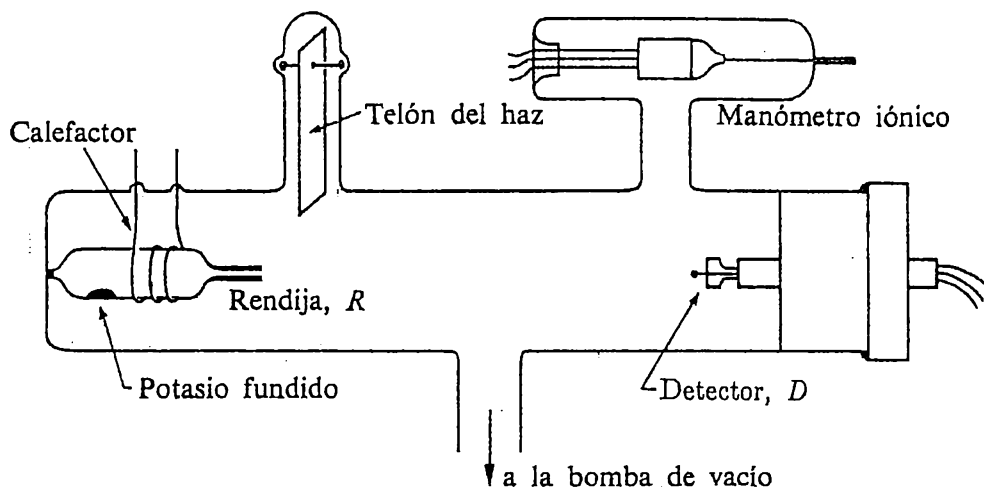


Fig. 16-15. Esquema del aparato para la medida de un recorrido libre medio. Con ayuda de un imán puede colocarse el telón del haz en una posición que impida la llegada al detector de cualquier haz directo.

átomos de potasio atraviesen la rendija  $R$  y a causa de la forma y orientación de ésta pasan a la cámara de vacío hacia el detector  $D$ . Si se construye y alinea con cuidado la rendija, todos los átomos del haz alcanzarán el detector salvo, claro está, los que sean dispersados. La presión en la cámara de vacío la mide el manómetro iónico. Éste no es un instrumento de medida absoluto, en el sentido de que debe calibrarse con ayuda de otros instrumentos de medida de la presión que sí son absolutos. No nos interesan aquí los detalles de funcionamiento del manómetro iónico ni del detector del haz.

La medida puede realizarse de dos maneras. Podría mantenerse constante la presión y variar la distancia  $x$  entre la fuente  $R$  y el detector  $D$ . Podríamos esperar entonces que la intensidad  $I$  del haz detectado variara de acuerdo con

$$I = I_0 e^{-x/l}$$

donde  $l$  es el recorrido libre medio. O bien, podría mantenerse constante la distancia  $x$  y variar la presión  $P$ . Como el recorrido libre medio es inversamente proporcional a la presión,  $l = C/P$ , tenemos

$$I = I_0 e^{-CxP} = I_0 e^{-P/P_0} \quad (16-25a)$$

donde  $P_0$  es una nueva constante, dada por

$$P_0 = \frac{RT}{4\pi r^2 N_0 x} \quad (16-26)$$

La determinación experimental de  $l$  o de  $P_0$  proporciona una medida de la cantidad  $N_0 r^2$  y si suponemos conocida  $N_0$  podemos calcular el radio atómico  $r$ .

EJEMPLO. En las gráficas de la figura 16-16 se han representado algunos datos experimentales obtenidos con un aparato análogo al de la figura 16-15. La distancia  $x$  entre la fuente y el detector era 11,5 cm y el gas dispersor era argón a la temperatura ambiente. En la gráfica de la derecha se ha representado  $\log I$  en función de la presión  $P$  dada en mm Hg. Esta es una manera útil de representar los datos porque si  $I$  depende de  $P$  de la manera indicada por la ecuación (16-25a), los puntos experimentales deben hallarse sobre una recta. Es decir, tenemos

$$\log \left( \frac{I}{I_0} \right) = - \frac{P}{P_0} \log e$$

y la pendiente de la recta es  $-(\log e)/P_0$ . La pendiente determinada experimentalmente es  $-0,29 \cdot 10^4 \text{ (mm Hg)}^{-1}$ . Entonces obtenemos para  $P_0$

$$P = \frac{-\log e}{\text{pendiente}} = \frac{-0,434}{-0,29 \cdot 10^4} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ mm Hg} = 0,20 \text{ barías}$$

A partir de la ecuación (16-26) podemos entonces hallar un valor de  $N_0 r^2$

$$N_0 r^2 = \frac{RT}{4\pi P_0 x} = \frac{8,31 \cdot 10^7 \cdot 300}{4\pi \cdot 0,20 \cdot 11,5} \simeq 9 \cdot 10^8$$

El valor aceptado actualmente para el número de Avogadro es  $6,02 \cdot 10^{23}$  y con  $N_0 r^2 = 9 \cdot 10^8$ , tenemos  $r \simeq 4 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ .

Este es un valor típico de radio atómico y resulta compatible con los valores de las dimensiones atómicas estimados por otros métodos.

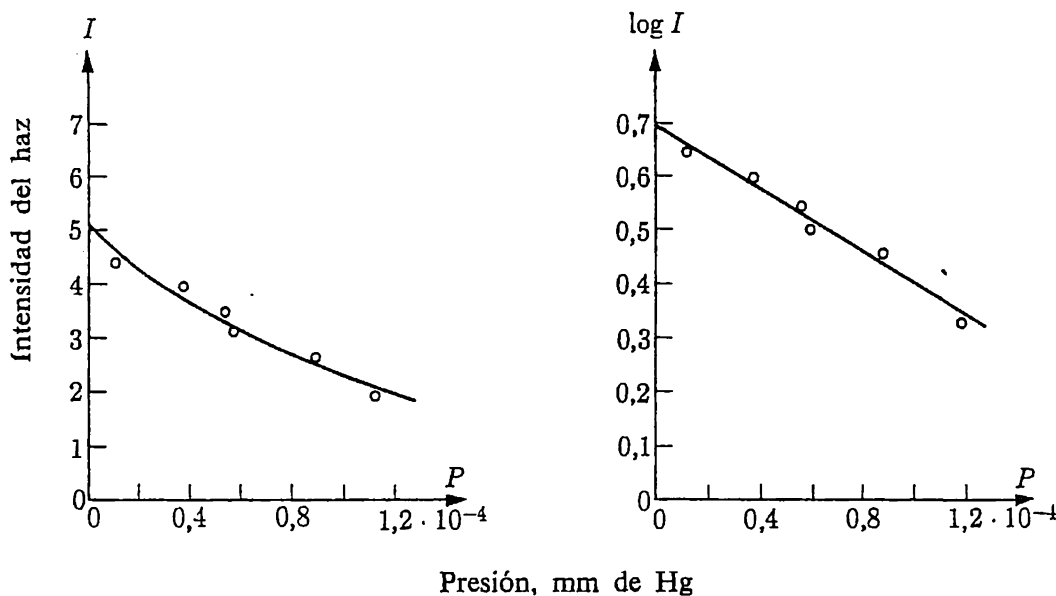


Fig. 16-16. Dependencia entre la intensidad del haz detectado y la presión del gas.

Los experimentos de dispersión como el que acabamos de describir ofrecen un método importante para la determinación de radios atómicos. El valor exacto obtenido para el radio depende en cierto modo de la geometría del aparato. En efecto, el tamaño del detector determina lo pequeño que puede ser el ángulo de dispersión, para que pueda aún detectarse el átomo del haz. Idealmente, el gas dispersor deberá estar restringido a una corta longitud del haz, de manera que quede bien definida esta dispersión mínima.

**16-8 Fenómenos de transporte.** Hasta ahora, nuestro estudio de la teoría cinética se ha limitado a un gas uniforme, es decir, a un gas en equilibrio térmico y en el cual todas las propiedades, tales como densidad, temperatura y presión, tienen el mismo valor en todos los puntos. En estas condiciones hemos visto que no hay transmisión neta alguna de masa, cantidad de movimiento o energía de una región a otra del gas. En cambio, en un gas no uniforme, por ejemplo, un gas en que la temperatura varíe de un punto a otro, habrá una transmisión de energía (flujo calorífico) hacia las temperaturas más bajas (cap. 14). Análogamente, en un gas que presente un gradiente de densidades, tendrá lugar una transmisión de masa (difusión) y cuando el gas esté en movimiento y la velocidad o la cantidad de movimiento por unidad de volumen varíen de un punto a otro, el movimiento molecular (térmico) originará una transmisión de cantidad de movimiento de las regiones de celeridad elevada a las de celeridad baja. Estos llamados *fenómenos de transporte* se pueden describir cuantitativamente mediante relaciones empíricas relativamente sencillas, pero en ellos interviene la teoría cinética con todos sus detalles. En este apartado, por tanto, limitaremos el tratamiento de los fenómenos de transporte a relaciones cualitativas y cuantitativas simplificadas. De los tres fenómenos de transporte mencionados, transporte de masa, de cantidad de movimiento y de energía, ya hemos visto con anterioridad uno, cual es el transporte de energía (conducción del calor). Estudiaremos en primer lugar este tema.

*Conducción del calor.* En el capítulo 14 estudiamos los aspectos empíricos del flujo calorífico y se vio que el calor  $q$  conducido por segundo a través de la unidad de superficie en una sustancia es proporcional al gradiente de temperatura. Cuando la temperatura variaba solamente en la dirección  $x$ , obteníamos [ec. (14-7)]

$$q = -K \frac{dT}{dx} \quad (16-27)$$

donde  $K$  es la conductibilidad calorífica y el signo menos indica que el calor fluye en el sentido de las temperaturas decrecientes. Intentaremos ahora interpretar este resultado desde el punto de vista de la teoría cinética.

Según la teoría cinética, el calor es la energía cinética del movimiento molecular y hemos visto en el apartado 16-6 que podemos expresar la energía ci-



nética por unidad de masa como  $c_v T$ , donde  $c_v$  es el calor específico por unidad de masa y  $T$  es la temperatura. Además de la energía molecular de traslación, también puede haber energía de rotación y de vibración. Supongamos ahora que la temperatura del gas (y en consecuencia la energía cinética por unidad de volumen) varía (crece) en la dirección  $x$ . Imaginemos un plano  $P$  en el interior del gas y normal al eje  $x$ , como el representado en la figura 16-17. En la región a la derecha del plano, la energía cinética por unidad de volumen y la energía cinética por molécula son mayores que a su izquierda. En consecuencia, cuando una molécula atraviesa el plano  $P$  de derecha a izquierda, transporta más energía a través de  $P$  que la que transportaría una molécula que pasara de izquierda a derecha. Entonces, si  $P$  es alcanzado por el mismo número de moléculas desde uno y otro lado, es evidente que habrá un flujo total de energía (calor) a través de  $P$ . Esto explica cualitativamente el flujo calorífico en el sentido negativo de las  $x$  cuando  $T$  crece en el sentido positivo.

Para estimar cuantitativamente el flujo calorífico, nos referiremos al número de choques de las moléculas por unidad de tiempo y de superficie contra un plano y veámos en la ecuación (16-12) que es igual a  $n\bar{v}/4$ , donde  $n$  es el número de moléculas por unidad de volumen y  $\bar{v}$  es la celeridad media de las moléculas.\* Si es  $E_1$  la energía cinética media por molécula que atraviesa el plano de izquierda a derecha, la energía correspondiente que atraviesa  $P$  por unidad de superficie y de tiempo es  $E_1 n\bar{v}/4$ . Análogamente, la energía que atraviesa  $P$

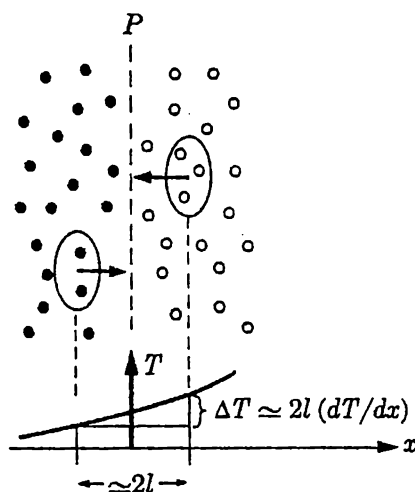


Fig. 16-17. Las partículas de baja energía procedentes de la izquierda son sustituidas por partículas de energía elevada que atraviesan  $P$  procedentes de la derecha. Resulta un flujo calorífico dirigido en el sentido de las temperaturas decrecientes.

\* El número de choques por unidad de tiempo es algo diferente a uno y otro lado del plano a causa de la variación de temperatura pero, para los fines del estudio actual, podemos despreocupar esta diferencia.

en el sentido negativo de las  $x$  es  $E_2 n\bar{v}/4$ , donde  $E_2$  es la energía cinética media de las moléculas que provienen de la región a la derecha de  $P$ . El flujo energético total a través de  $P$  en el sentido positivo de las  $x$  es, pues,  $q \simeq (n\bar{v}/4)(E_1 - E_2)$ . Pero, ¿cómo podemos expresar  $E_1 - E_2$  en función de la variación conocida de la temperatura con  $x$ ? Las moléculas que atraviesan  $P$  de izquierda a derecha sufrieron su último choque en una posición  $P_1$  que, por término medio, estará situada a un recorrido libre medio  $l$  a la izquierda del plano. Supondremos que la energía de las moléculas corresponde a la energía por unidad de volumen en este punto particular  $P_1$ . Análogamente, se supone que la energía  $E_2$  corresponde a una posición  $P_2$  situada a un recorrido libre medio a la derecha de  $P$ . La diferencia de temperaturas entre las posiciones  $P_2$  y  $P_1$  puede expresarse en la forma  $T_2 - T_1 = \Delta T \simeq 2l(dT/dx)$ .

Una unidad de masa ocupa un volumen  $1/\rho$ , donde  $\rho$  es la densidad del gas. El número correspondiente de moléculas es  $n/\rho$ . Entonces, si es  $c_v$ , el calor específico por unidad de masa, la energía por molécula será  $\rho c_v T/n$ , y la diferencia  $E_2 - E_1$  se podrá escribir en la forma  $E_2 - E_1 \simeq (\rho c_v/n)(T_2 - T_1) \simeq (2l\rho c_v/n)(dT/dx)$ . El flujo calorífico por unidad de superficie en el sentido positivo de las  $x$  se obtiene entonces multiplicando este resultado por  $n\bar{v}/4$ , y obtenemos

$$q = \frac{n\bar{v}}{4} (E_1 - E_2) \simeq - \frac{n\bar{v}}{4} \frac{2l\rho c_v}{n} \frac{dT}{dx}$$

En vista de la relación (16-27), podemos expresar la conductibilidad calorífica de un gas determinada experimentalmente, en función de las propiedades fundamentales del gas:

$$K \simeq \frac{l\bar{v}}{2} \rho c_v = \frac{l\bar{v}}{2} n m c_v \quad (16-28)$$

donde  $m$  es la masa de una molécula ( $\rho = nm$ ). La ecuación (16-24) daba el recorrido libre medio en la forma  $l = 1/4\pi n r^2$ , y sustituyendo este valor en la ecuación (16-27), hallamos el interesante resultado de que la conductibilidad calorífica es *independiente de  $n$* . Esto significa que, a temperatura constante, la conductibilidad calorífica es *independiente* de la presión del gas. (Este resultado no será válido a presiones muy bajas, cuando el recorrido libre medio es del orden de magnitud o mayor que las dimensiones del aparato. Después de todo, la cámara de vacío de un frasco termos *ayuda* a impedir la conducción del calor.) Además, la ecuación (16-27) predice que la conductibilidad calorífica depende de la raíz cuadrada de la temperatura (ya que  $\bar{v} \sim \sqrt{T}$ ).

La experiencia nos indica que, efectivamente, la conductibilidad calorífica no depende de la presión en un amplio dominio de presiones, pero la dependencia de la temperatura resulta ser más intensa que  $\sqrt{T}$ . Esta discrepancia en la dependencia de la temperatura puede interpretarse sustituyendo el modelo

molecular de la esfera dura por un modelo con una fuerza intermolecular que varíe continuamente con la separación entre moléculas.

*Viscosidad y difusión.* Al igual que un gradiente de densidad de energía (gradiente de temperaturas) en un gas origina una transmisión de energía, un gradiente de cualquier otra cantidad o propiedad del gas podrá también originar una transmisión de dicha cantidad o propiedad. Por ejemplo, si se halla en movimiento un gas y la velocidad, y en consecuencia la cantidad de movimiento por unidad de volumen, varían de un punto a otro del gas, el movimiento térmico (molecular) del gas originará un transporte de cantidad de movimiento en el sentido de las densidades de cantidad de movimiento decrecientes. Esta transmisión de cantidad de movimiento entre regiones del gas de celeridades diferentes equivale a una fuerza de interacción entre dichas regiones. A esta interacción se le llama *viscosidad* del gas. Se puede calcular la fuerza viscosa correspondiente que se ejerce entre dos regiones adyacentes del gas, determinando el intercambio de cantidad de movimiento originado por el movimiento térmico entre ambas regiones y encontramos que el procedimiento es totalmente análogo al del cálculo del intercambio de energía en el análisis de la conducción del calor. En el caso particular en que el gas se mueve en la dirección  $y$  con una velocidad  $U$  que varía con  $x$ , como se indica en la figura 16-18, la fuerza por unidad de superficie a lo largo de un plano paralelo al flujo resulta ser proporcional al gradiente de velocidades a través del plano:

$$F_y = -\eta \frac{dU}{dx} \quad (16-29)$$

donde  $\eta$  es el coeficiente de viscosidad. En esta ecuación, la fuerza es la ejercida por la región a la izquierda del plano  $P$  sobre la región a la derecha del plano, indicadas en la figura. Por ejemplo, si la región a la izquierda lleva una celeridad inferior a la de la de la derecha, lo cual corresponde a un valor positivo de  $dU/dx$ , la fuerza  $F_y = -\eta (dU/dx)$  es negativa. La región de la izquierda tiende entonces a hacer disminuir la celeridad de la región más rápida situada a la derecha. Como la fuerza de interacción es mutua, la región de la derecha tiende al mismo tiempo a aumentar la celeridad de la región de la izquierda con una fuerza  $|\eta (dU/dx)|$  dirigida en el sentido positivo de las  $y$ .

Como los fenómenos de conducción del calor y de viscosidad están originados por el movimiento térmico de maneras totalmente análogas, no puede sorprendernos que exista una relación entre la conductibilidad calorífica y el coeficiente de viscosidad. De la teoría desarrollada anteriormente en el caso de la conducción del calor, puede deducirse la siguiente relación:

$$\eta = \frac{K}{c_v} \quad (16-30)$$

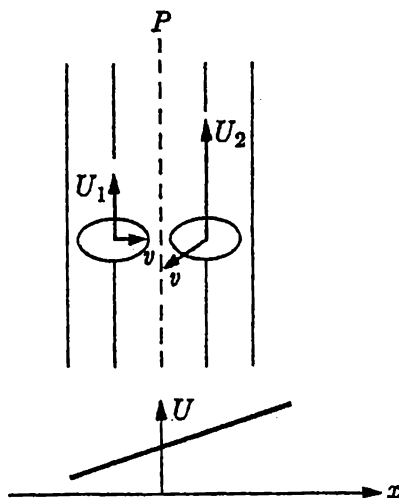


Fig. 16-18. Circulación del gas en la dirección  $y$  con una celeridad variable con  $x$ . Cuando las moléculas del gas atraviesan el plano  $P$  en cantidades iguales procedentes de ambos lados, a través de  $P$  se producirá una cesión neta de cantidad de movimiento.

Es interesante observar que, según la teoría cinética, tanto la conductibilidad calorífica como el coeficiente de viscosidad son independientes de la presión (esto no se cumple a presiones muy bajas) y son proporcionales a la raíz cuadrada de la temperatura. En la tabla 16-3 se consignan las conductibilidades caloríficas y coeficientes de viscosidad de algunos gases conocidos.

TABLA 16-3. CONDUCTIBILIDADES CALORÍFICAS Y COEFICIENTES DE VISCOSIDAD

Gas	$^{\circ}\text{C}$	Conductibilidad calorífica, $K \cdot 10^5$ unidades cgs	Viscosidad, $\eta \cdot 10^6$ unidades cgs (poise)
Aire	0	5,22	170,8
Aire	750		426,3
Argón	0	3,85	209,6
Dióxido de carbono	0	3,25	142,0
Helio	0	32,7	186,0
Hidrógeno	0	36,3	83,5
Oxígeno	0	5,35	189,0
Vapor de agua	100		125,5

## PROBLEMAS

16-1. Consideremos un gas hipotético en el cual un tercio de las  $N$  moléculas presentes en un recinto cúbico de arista  $l$  se mueven paralelamente a cada uno de los tres ejes de coordenadas. Supongamos que todas las moléculas tienen la misma celeridad  $v$  y en todo instante las moléculas están distribuidas uniformemente por la caja de manera que, por ejemplo, tantas se mueven en el sentido del semieje  $+x$  como en el del semieje  $-x$ . Los choques de las moléculas con la pared son perfectamente elásticos. (a) ¿Qué cantidad de movimiento se cede a la pared en cada choque? (b) ¿cuántos choques se producen por segundo? (c) ¿qué cantidad de movimiento se cede a la pared por segundo? ¿Cuál es la fuerza que se ejerce sobre la pared? ¿Cuál es la presión? (d) ¿Cómo varía la presión con el volumen  $V$ ? (e) Si el modelo del gas es compatible con la ecuación de estado de los gases perfectos, ¿qué relación existe entre la energía cinética molecular y la temperatura?

16-2. Deducir la relación (16-2) a partir de las consideraciones siguientes. Consideremos un mol de gas en un recipiente esférico de radio  $R$ , como el indicado en la figura 16-19 donde se indica el movimiento de una molécula del

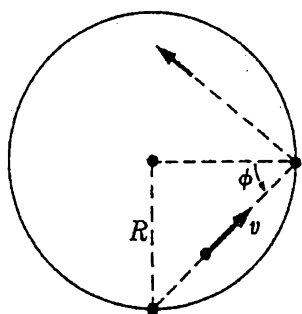


Fig. 16-19

gas. Estudiar el movimiento cuando la molécula choca contra la pared del recipiente. La celeridad de la molécula es  $v$  y choca contra la pared formando un ángulo  $\phi$  como el indicado. Despréciense los choques con las demás moléculas. (a) ¿Qué cantidad de movimiento se entrega a la pared en cada choque? (b) ¿Cuántos choques por segundo sufre la molécula al moverse por el recipiente y cuál es la cantidad de movimiento media por unidad de superficie de pared que cede esta molécula? (c) Suponiendo que todas las moléculas tienen igual celeridad, determinar la cantidad de movimiento total por unidad de superficie de pared cedida por las moléculas. El resultado es, entonces, la ecuación (16-2).

16-3. Hacemos referencia a la figura 16-2 del texto. Consideremos un haz de moléculas (cada una de masa  $m$ ) con  $n$  moléculas por unidad de volumen. El haz se mueve hacia una pared con celeridad  $v$ . El ángulo de incidencia es  $\phi$ . (a) ¿Cuál es la cantidad de movimiento cedida por el haz por unidad de tiempo y por unidad de superficie de la pared, si son perfectamente elásticos los choques? (b) Si son igualmente probables todas las direcciones de movimiento, ¿cuál es el número relativo de moléculas que chocan contra la pared bajo un ángulo  $\phi$ ? (c) Demostrar que la frecuencia de los choques por unidad de superficie de la pared es  $nv/4$ , considerando el valor medio de los ángulos de incidencia.

16-4. Comprobar que  $kT$  tiene las dimensiones de una energía. ¿Cuál es la energía cinética media de traslación, expresada en erg, de una molécula a la temperatura de  $27^\circ \text{C}$ ? ¿Depende esta energía media de la masa de la molécula?

16-5. (a) ¿Cuál es el cociente entre las energías cinéticas de traslación de las moléculas de hidrógeno y oxígeno a la temperatura de  $300^\circ\text{K}$ ? (b) ¿Cuál es el cociente entre sus celeridades de traslación?

16-6. Determinar la constante de los gases por gramo de oxígeno. ¿Es la misma para todos los gases, esta constante? Razonar la respuesta.

16-7. Determinar la velocidad cuadrática media de las moléculas de oxígeno a  $20^\circ\text{C}$ ,  $1000^\circ\text{C}$  y  $-100^\circ\text{C}$ .

16-8. En un recipiente de 45 litros que tiene un orificio pequeño practicado en la pared se hallan mezclados oxígeno y helio, habiendo  $10^{-3}$  mol de cada uno de ellos. El gas pasa a través del orificio a la cámara exterior en la que se ha practicado el vacío. (a) Determinar la composición del haz molecular cuando sale del recipiente, es decir, el cociente entre los números de moléculas de oxígeno y helio que escapan por segundo. (b) ¿Qué tamaño debería tener el orificio para que el tiempo de relajación del helio fuera 20 minutos? La temperatura se mantiene constantemente igual a  $27^\circ\text{C}$  (apart. 16-4).

16-9. Para poner de manifiesto que se puede despreciar la atracción gravitatoria entre las moléculas de un gas, calcular la energía cinética que ganan dos moléculas si parten del reposo desde posiciones muy alejadas y se aproximan bajo la acción de la gravitación. Compárese esta energía con  $kT$ .

16-10. Consideremos un aparato de rueda dentada para medir la velocidad molecular. Este aparato tiene ruedas de 10 cm de diámetro y muescas cuadradas de 1 cm practicadas en sus periferias. Si la separación de las ruedas es de 5 m, (a) ¿a qué velocidad deben girar y qué ángulo han de estar desplazadas las mues-

cas para medir la velocidad cuadrática media de las moléculas de hidrógeno a  $400^\circ\text{K}$ ? (b) ¿Qué dispersión de velocidades se transmite si las muescas de las dos ruedas están separadas  $180^\circ$ ?

16-11. En un experimento de haz molecular se tiene en el horno 0,1 g de potasio. Si la intensidad del haz es de  $10^{12}$  átomos/s, ¿cuánto tiempo permanecerá el potasio en el horno?

16-12. Un haz de  $n$  átomos de potasio por segundo ( $T = 500^\circ\text{K}$ ) choca con una hoja de aluminio de  $1\text{ cm}^2$  de superficie y 0,001 cm de espesor, quedando adherida a ella. La hoja se mantiene suspendida por una fibra de 10 cm de masa despreciable. ¿Qué valor debe tener  $n$  para que la fibra se desvíe  $10^\circ$ ?

16-13. En un experimento de dispersión, los átomos del gas tienen un radio  $r_1$  y los átomos del haz un radio  $r_2$ . ¿Qué relación existe entre el recorrido libre medio  $l$ , los radios atómicos y el número de átomos por centímetro cúbico del gas?

16-14. ¿Qué intensidad de haz de átomos de potasio debe haber en la rendija de un horno para tener una intensidad de un átomo por segundo a una distancia de 1 m en el aire a la presión atmosférica? Considérese solamente el efecto de la dispersión.

16-15. Demostrar que la constante  $B$  de la ecuación (16-14) (función de distribución de MAXWELL-BOLTZMANN) tiene el valor dado por la ecuación (16-15). (Utilícese la tabla 16-1).

16-16. Demostrar que la celeridad más probable tiene el valor dado por la ecuación (16-16). Análogamente, obtener de la función de distribución los valores de la celeridad media y de la velocidad cuadrática media dados por las ecuaciones (16-19) y (16-20).

16-17. De las moléculas existentes

en un recipiente a  $300^{\circ}\text{C}$ , ¿qué fracción de su número total tienen celeridades comprendidas entre  $2v_0$  y  $2,1 v_0$ , siendo  $v_0$  la celeridad más probable? ¿Cómo varía con la temperatura esta fracción?

16-18. Demostrar que la distribución de MAXWELL-BOLTZMANN puede escribirse en la forma  $f(v) dv = (4/\sqrt{\pi}) x^2 e^{-x^2} dx$  en función de la variable adimensional  $x = v/v_0$ . Determinar la fracción del número total de moléculas a la que corresponden velocidades mayores que la cuadrática media y expresar el resultado mediante una integral.

16-19. Demostrar la ley de DALTON de las presiones parciales en una mezcla de gases, por medio de la teoría cinética (apart. 16-6).

16-20. Si la separación de los centros de los átomos de oxígeno en la molécula de  $\text{O}_2$  es  $1,4 \text{ \AA}$ , (a) ¿cuál es el valor medio del número de revoluciones por segundo que realiza la molécula a la temperatura  $T = 300^{\circ}\text{K}$ ? (Utilícese  $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}kT$ .) (b) ¿Qué fuerza mínima mantendrá unidos los átomos si la rotación térmica no altera su separación?

16-21. Si la molécula de cloro girara con la frecuencia prevista por el principio de equipartición de la energía, ¿cuál sería la fuerza centrípeta? Supóngase que los núcleos de cloro están separados una distancia  $d = 2 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ .

16-22. Estimar el número de revoluciones que realiza una molécula de oxígeno entre dos choques sucesivos con otras moléculas. Demostrar que este número es proporcional a la temperatura. Supóngase la presión de 1 atmósfera y considérese la molécula de oxígeno como dos puntos materiales separados por una distancia igual a  $1,4 \text{ \AA}$ .

16-23. Un disco uniforme de 1 cm de radio y masa 1 g gira alrededor de un eje normal a su plano y que pasa por su

centro de masa. (a) ¿cuáles son, según la teoría cuántica, su momento cinético mínimo y su velocidad angular mínima? (b) Si el disco gira a 1 revolución/s, cuánto valdrá  $n$  en la expresión  $l = nh/2\pi$ ? (c) Si 1 revolución/s fuera valor permitido para la velocidad de rotación, cuál sería el valor permitido inmediato superior?

16-24. Supóngase que los dos núcleos de una molécula de hidrógeno están separados  $10^{-8} \text{ cm}$ . (a) ¿Cuál es el momento de inercia de la molécula de hidrógeno respecto a un eje que pase por su centro de masa y sea perpendicular a la recta que une los núcleos? (b) ¿Cuál es la mínima energía de rotación permitida? (c) ¿A qué temperatura corresponde esta energía mínima? (d) Si es  $2 \cdot 10^{-14} \text{ erg}$  la mínima energía de vibración permitida a la molécula de hidrógeno, ¿cuál será la frecuencia propia de vibración  $f_0$  de la molécula de hidrógeno? (e) ¿cuál es el valor eficaz de la constante  $K$  de la fuerza de enlace de la molécula?

16-25. Realícese un cálculo del coeficiente de viscosidad de una manera en todo análoga a como se realiza el cálculo de la conductibilidad calorífica y demostrar la relación (16-30).

16-26. ¿Depende de la temperatura la viscosidad de un gas? Si es así, explíquese cualitativamente la razón.

16-27. Explicar cualitativamente por qué la conductibilidad calorífica es independiente de la presión.

16-28. (a) ¿A qué temperatura se iguala la velocidad cuadrática media de las moléculas de hidrógeno a la velocidad de escape del campo gravitatorio terrestre? (b) Hallar la velocidad de escape de la Luna y hallar las temperaturas a las que el hidrógeno, argón y radón tienen velocidad cuadrática media igual a ella. Se ha estimado que la porción iluminada

de la Luna tiene una temperatura de unos  $100^{\circ}\text{C}$ .

16-29. Consideremos un recipiente esférico que contiene gas nitrógeno a  $300^{\circ}\text{K}$ . ¿Cuál debería ser el radio  $r$  de la esfera para que el número de choques contra la pared en un segundo sea igual al número total de moléculas existentes en el recipiente?

16-30. El personal que trabaja con sistemas de vacío se encuentra frecuentemente perturbado por una pequeña cantidad de agua que se deposita sobre las paredes del sistema. A la presión de  $10^{-8}$  mm de Hg, ¿qué volumen ocupará 1 g de agua (vaporizada)?

16-31. Una cámara de vacío «hermética» tiene un volumen de  $10^3\text{ cm}^3$  y se ha evacuado hasta una presión de  $10^{-7}$  mm de Hg. Se observa que la presión sube hasta  $10^{-5}$  mm de Hg en una hora. (a) ¿Cuál sería el tamaño del orificio que permitiera interpretar esta fuga? (b) Si

la cámara fuera realmente hermética, ¿Cuánta agua tendría que evaporarse para explicar el aumento de presión?

16-32. Nuestra galaxia es, hablando con poca precisión, un disco achatado de 100 000 años-luz de diámetro y 1000 años-luz de espesor. Distribuidas uniformemente por este disco hay  $2 \cdot 10^{11}$  estrellas y gas hidrógeno que tiene una densidad de un átomo por centímetro cúbico. (a) ¿Cuál es el recorrido libre medio de un átomo de hidrógeno de la galaxia que vaya a 500 m/s? (b) Al atravesar un diámetro de la galaxia, un rayo cósmico tiene una probabilidad de  $10^{-3}$  de chocar con un átomo de hidrógeno. ¿Cuál es el recorrido libre medio de un rayo cósmico? (c) ¿Cuál es el recorrido libre medio para un choque entre un rayo cósmico y una estrella? Supóngase que todas las estrellas de nuestra galaxia ( $2 \cdot 10^{11}$ ) tienen el diámetro de nuestro Sol.



## PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA

*Resumen.* En los capítulos anteriores, el estudio del movimiento global de los cuerpos y del movimiento interno de la materia nos ha llevado a considerar la posible conversión de la energía del movimiento global en energía interna, o viceversa, y la posible equivalencia entre ellas. En primer lugar, volveremos a examinar el intercambio energético que aparece en los choques estudiados en los capítulos 2, 3 y 4 y hallaremos que se hace plausible la equivalencia de energía con ciertos experimentos de choques inelásticos. Sigue una revisión histórica de la evidencia experimental de la equivalencia entre calor y energía mecánica. En el caso particular de un gas perfecto, puede establecerse directamente dicha equivalencia a partir de la teoría cinética y se demuestra que el trabajo realizado por un gas en expansión aislado térmicamente es igual a la disminución de la energía (interna) cinética de sus moléculas. Se extienden estos estudios para incluir también la interacción térmica y encontramos que la variación de energía interna del gas queda interpretada mediante el trabajo y el calor absorbido por el gas. Para los gases reales y otras sustancias, apelamos a la imposibilidad de existir móviles perpetuos para establecer la conversión y conservación de la energía. El resultado es el primer principio de la Termodinámica. Se estudian algunos cambios de estado específicos de un gas perfecto a la luz del primer principio de la Termodinámica.

**17-1 Introducción.** Los estudios que hemos realizado hasta ahora los podemos dividir burdamente en dos grupos. El primero, capítulos del 1 al 13, trata principalmente del movimiento global de los cuerpos, descritos por la traslación de sus centros de masa y la rotación en torno a sus centros de masa. El segundo, capítulos 14 a 16, se ocupa del movimiento interno de la materia y en él se ha definido el calor como la energía cinética de las moléculas. Vamos a ocuparnos ahora de las cuestiones referentes a la posible equivalencia entre la energía del movimiento global y la energía del movimiento interno, y la conversión de una energía en otra.

Teniendo presente este objetivo, repasaremos algunos de los resultados obtenidos en el estudio de las interacciones entre dos (o más) cuerpos en los experimentos de choque de los capítulos 2, 3 y 4. Encontramos en ellos que en

ciertos tipos de choque, tales como la interacción del tipo de resorte, la energía cinética total era la misma antes que después del choque. A estos choques se les llamaba *perfectamente elásticos*. En la interacción del tipo de resorte, los cuerpos disminuían su velocidad a medida que se comprimía el resorte. Las pérdidas de energía cinética correspondientes se podían asociar a una energía potencial o latente del resorte comprimido, la cual se recuperaba al dilatarse el resorte. Análogamente, la energía cinética perdida por un cuerpo que se desliza ascendiendo una pendiente por un plano inclinado sin rozamiento, se recuperaba cuando el cuerpo volvía hacia abajo. Entonces, extendiendo el concepto de energía para que incluyera la potencial igual que la cinética, podíamos formular el principio de conservación de la energía (limitado aún a choques perfectamente elásticos). En consecuencia, la suma de las energías cinética y potencial, la llamada energía mecánica total  $H = E + V$ , se mantenía invariable durante toda la interacción. Se vio que la conservación de la energía mecánica total era aplicable a todos los casos en que la fuerza resultante ejercida sobre un cuerpo sólo depende de la posición, pero no de la dirección del movimiento o de la celeridad del cuerpo. La fuerza gravitatoria es un tipo característico de esta clase de fuerzas.

En otros tipos de interacciones, aquéllas que hemos llamado *inelásticas*, se pierde energía cinética del movimiento global durante el choque. Por ejemplo, dos cuerpos con un pedazo de masilla entre ellos parecen perder al menos parte de su energía cinética inicial cuando chocan y no hay medios evidentes de recuperación de la energía perdida. No obstante, al tratar con choques de este tipo podemos concebir situaciones en las que la pérdida de energía cinética sólo sea aparente; un examen detenido revela que la energía perdida se halla en forma de energía cinética, de energía potencial, o de ambas. Este hecho surge cuando sólo se realiza un examen superficial.

Como ejemplo, consideremos el choque representado en la figura 17-1(a). El cuerpo *A* es un carrito de masa  $m$  que tiene inicialmente una velocidad  $V$ . El cuerpo *B* consiste en dos carritos *C* y *D*, cada una de masa  $m$ , pero estos dos carritos están cubiertos por una tapa opaca sin masa unida al centro de masa de *C* y *D*. En consecuencia, un examen superficial sólo da el movimiento del centro de masa de *C* y *D*, quedando oculta la energía respecto al centro de masa. La energía asociada a este último movimiento parece haberse perdido y se clasifica como inelástica la interacción, si bien no se ha perdido energía alguna si cada una de las interacciones es perfectamente elástica. Dejamos como ejercicio demostrar que la pérdida aparente de energía en el choque de la figura 17-1(a) es  $mV^2/4$  (prob. 17-1).

Observaríamos una pérdida aparente análoga de energía si los carritos *A* y *B* permanecieran unidos después del choque, según se indica en la figura 17-1(b). En este caso, la energía «perdida» queda almacenada como energía potencial.

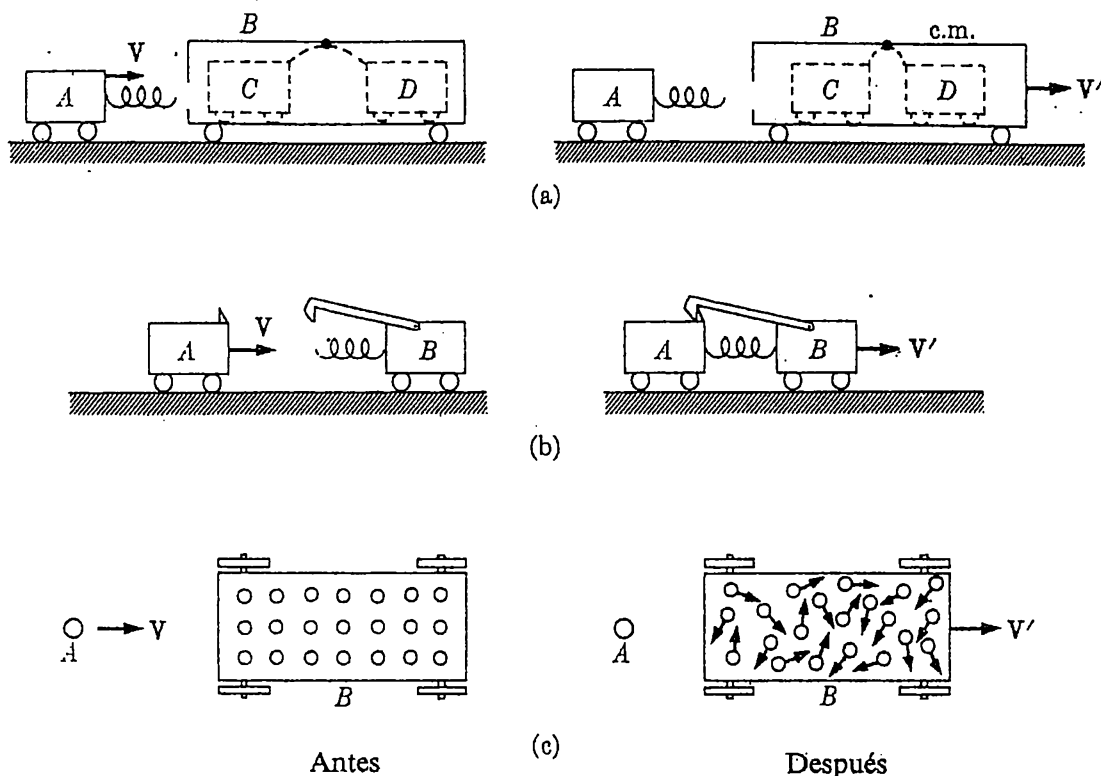


Fig. 17-1. Ejemplos de choques e interacciones que son inelásticos sólo aparentemente. En cada caso, el examen detallado revela que se conserva la energía mecánica total.

En la figura 17-1(c) se presenta aún otro ejemplo. El cuerpo  $B$  consiste ahora en un gran número de bolitas pequeñas elásticas. El movimiento de las bolas respecto al centro de masa de  $B$  es un movimiento irregular resultante de los choques elásticos entre las bolas y las paredes y parece que se ha perdido la energía respecto al centro de masa. Examinando con más detalle, se revelan el movimiento interno y la energía correspondiente y encontramos que no se pierde energía alguna en el choque.

Surge ahora la cuestión de si todos los choques inelásticos no pueden producir energía oculta, interpretando así la pérdida de energía observada en los choques anteriores. ¿Es posible que la energía cinética que aparentemente se pierde en un choque plástico del tipo de la masilla, por ejemplo, sólo produzca una transformación en el movimiento molecular interno? La respuesta a esta pregunta difícilmente podrá obtenerse por inspección directa «abriendo» el cuerpo. En el siglo XVIII, los investigadores especularon mucho acerca de esta cuestión.

En el primer estudio realizado acerca del calor, no se sospechaba la relación existente entre energía y calor. Se imaginaba que el calor era un fluido, al que se dio el nombre de «calórico». Éste podía circular entre los cuerpos en contacto térmico y se suponía que en estos experimentos de interacción térmica

permanecía constante la cantidad total de calórico. Se imaginaban que las partículas de calórico podían circular por entre las partículas de materia ordinaria y que mientras las partículas de calórico se repelían entre sí, la materia ordinaria atraía al calórico. Todo esto constituyó un modelo razonablemente satisfactorio que explicaba cualitativamente la dilatación de los cuerpos calientes, el gran volumen ocupado por un gas, el equilibrio térmico, etc.

Este era el estado de conocimientos acerca del calor a mediados del siglo XVIII. En aquellos tiempos, la Mecánica se asentaba sobre bases firmes. GALILEO, BRAHE, KEPLER y NEWTON estudiaron fenómenos a gran escala y sus logros constituyeron la base de la Mecánica moderna que estudiamos hoy en día. En cambio, el calor estaba destinado a sufrir una drástica revisión conceptual, si bien la aceptación general de esta revisión no tuvo lugar hasta al cabo de unos 100 años. La revisión a que hacemos referencia es la teoría cinética del calor. Según mencionamos ya en el capítulo 16, en 1738 DANIEL BERNOULLI presentó las ideas esenciales de la teoría cinética de los gases. Consideraba el calor como la energía cinética de las partículas e identificaba la presión del gas con los choques de las moléculas gaseosas contra las paredes del recipiente. Pero la comunidad científica evolucionaba en conjunto mucho más lentamente. Este nuevo concepto sólo se aceptó cuando hubo una evidencia experimental apremiante en su favor.

La posible relación entre calor y energía la hizo resaltar especialmente BENJAMÍN THOMPSON (1753-1814; que posteriormente alcanzó el título de Conde de Rumford). Puesto que el calor puede generarse por rozamiento en cantidades aparentemente ilimitadas, RUMFORD arguyó que era difícil imaginar que el calor fuera una sustancia material como se suponía era el calórico, y que era mucho más razonable imaginar que era movimiento. RUMFORD intentó pesar el calórico y realizó una serie de medidas muy precisas de los pesos de los cuerpos a diferentes temperaturas. No pudo hallar diferencia alguna atribuible al calor, lo que constituyó un golpe para la teoría del calórico.

La evidencia cuantitativa más convincente que relacionaba calor y energía se debe a MAYER y a JOULE en el intervalo de tiempo comprendido entre 1840 y 1850. El físico alemán JULIUS MAYER (1814-1878) presentó argumentos que se apoyaban en gran manera en el calor específico del aire, tema que proseguiremos más adelante en este capítulo. En condiciones experimentales muy variadas, JAMES JOULE (1818-1889) realizó una larga serie de medidas extraordinariamente precisas del calor producido al desaparecer (aparentemente) una cantidad dada de energía mecánica.

El concepto surgido de la labor de JOULE es de lo más importante. Desde hacía muchísimo tiempo, se sabía que los cuerpos se calientan cuando sobre ellos se realiza un trabajo mecánico. No habría habido nada especialmente profundo en la labor de JOULE, aparte de la precisión con que realizó sus medidas,

si sólo hubiera medido la cantidad de calor producido por una cantidad dada de trabajo mecánico o el calor que acompaña a una pérdida de energía cinética en un solo experimento. Esa medida, o esa serie de medidas, no hubieran identificado al calor como una forma de la energía. La importancia de la labor de JOULE estriba en que midió el calor producido por una cantidad dada de energía mecánica en multitud de circunstancias y de esta manera halló que el cociente (calor generado)/(energía mecánica gastada) era siempre el mismo, o esencialmente el mismo. Solamente en estas condiciones puede suponerse que el calor es una forma de energía. Entre los múltiples experimentos que realizó JOULE acerca del «equivalente mecánico del calor» se contaban medidas del calor generado (1) cuando se agita agua con una rueda de paletas, (2) cuando se calienta agua mediante un generador eléctrico accionado mecánicamente, (3) cuando se calienta el agua a consecuencia de circular por tubos de pequeño diámetro, (4) cuando se calienta el agua al caer en cascada y (5) cuando se calientan diversos materiales por rozamiento entre dos placas de hierro en movimiento relativo. De los datos que recogió, JOULE propuso para el equivalente mecánico del calor un valor de  $4,15 \cdot 10^7$  erg/caloría. En el sistema Giorgi este valor sería 4,15 J/cal y el valor moderno

$$1 \text{ caloría} = 4,1855 \text{ joule (newton·metro)} \quad (17-1)$$

no difiere mucho del dado por JOULE.

Volviendo atrás nuestra mirada, los experimentos de Joule parecen ofrecer la evidencia más convincente de que el calor es una forma de energía. Sin embargo, el concepto de la *conservación de la energía* no tuvo aceptación inmediata. Probablemente se debe, más que a nadie, al brillante fisiólogo y físico alemán HERMANN VON HELMHOLTZ (1821-1894) la formulación clara y el reconocimiento como principio experimental básico, de la conservación de la energía. Extendió el concepto de energía para incluir los procesos químicos y biológicos y relacionó entre sí tantos fenómenos que los más escépticos quedaron convencidos. No se conocen violaciones del principio de conservación de la energía y la base real de su validez reside en cómo ha resistido el principio la comprobación del tiempo.

Hagamos notar que hasta ahora sólo hemos estudiado casos en los que la energía mecánica perdida aparecía en forma de calor. (El caso contrario en que la energía calorífica se convierte en energía mecánica se estudiará en el apartado próximo.)

**EJEMPLO.** Una bala de cobre de masa 10 g tiene una velocidad de 300 m/s. Si se convirtiera en calor toda la energía cinética de la bala, ¿cuál sería su elevación de temperatura?

La energía cinética total de la bala es  $mv^2/2 = 450$  J. Esta energía cinética equivale

a  $\Delta Q = 450/4,185 = 108$  calorías. Por tanto, la elevación de temperatura de la bala vendrá dada por  $\Delta Q = mc\Delta T$ , donde  $c = 0,092$  (cal/g)/° C es el calor específico del cobre. La elevación de la temperatura es de unos 116° C.

**17-2 Energía interna y primer principio de la Termodinámica.** En el apartado anterior hemos estudiado la evidencia experimental histórica de la equivalencia entre calor y energía y hemos interpretado el calor como la energía asociada al movimiento molecular. Ahora queremos explorar la cuestión de si la equivalencia entre energía (trabajo) y calor y la interpretación de éste como energía del movimiento molecular, son compatibles con la teoría cinética de los gases. El análisis de esta cuestión nos llevará al concepto de energía interna y a la formulación del primer principio de la Termodinámica. En el estudio de la relación entre la energía molecular y el trabajo realizado por un gas, estudiaremos qué pasa cuando las moléculas del gas chocan contra un émbolo móvil en un recipiente. ¿Podremos demostrar que las moléculas sufren una disminución de energía equivalente al trabajo realizado por el émbolo?

*Gas perfecto.* Consideremos  $N$  moléculas en un recipiente que tenga un émbolo móvil en un extremo, según se indica en la figura 17-2. El gas del recipiente, inicialmente a una temperatura  $T$ , ejerce una presión  $P = nkT$  sobre las paredes del recipiente y el émbolo, siendo  $n = N/V$  el número de partículas por unidad de volumen. El recipiente del gas está aislado térmicamente, con lo que no puede haber cesión alguna de calor al gas.

Para mantener en equilibrio el émbolo de área  $A$ , habrá que ejercer exteriormente sobre él, una fuerza  $F = PA$ . Haciendo disminuir una cantidad infinitesimal la fuerza exterior, el émbolo empezará a moverse hacia afuera con lo que el volumen del recipiente aumentará en unidad de tiempo una cantidad  $uA$ , donde  $u$  es la velocidad del émbolo. Evidentemente, el gas realiza un trabajo contra la fuerza que actúa exteriormente sobre el émbolo (p. e., podría levantar un peso). Al desplazar el émbolo una distancia  $dx$ , el gas realiza un trabajo  $dW = PA dx$ . La potencia suministrada será, pues,  $dW/dt = PAu$ .

¿Cuál es ahora la pérdida de energía por parte de las moléculas del gas? En nuestra hipótesis de choques perfectamente elásticos entre las moléculas

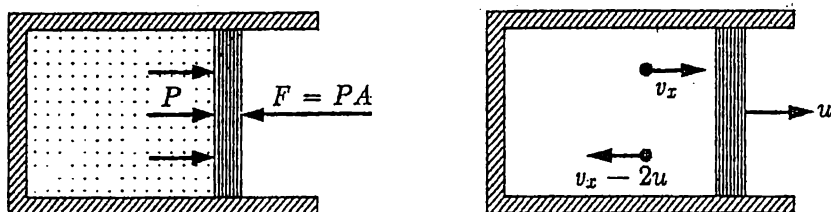


Fig. 17-2. Al chocar las moléculas contra el émbolo que se mueve hacia afuera, pierden energía cinética.

del gas y las paredes del recipiente, una molécula que choque contra el émbolo *en reposo*, rebotará con la misma celeridad que incidió. En cambio, cuando el émbolo se mueva en la dirección y sentido positivo de las  $x$  con velocidad  $u$ , una molécula que inicialmente tenía una componente  $v_x$ , de la velocidad, después del choque tendrá una componente de la velocidad  $v'_x = -(v_x - 2u)$ .

Este resultado se deduce directamente del hecho de que en un choque perfectamente elástico la velocidad relativa antes y después del choque es la misma, salvo el signo. Antes del choque, la velocidad relativa es  $v_x - u$ , y después del choque viene dada por  $v'_x - u = -(v_x - u)$ , con lo que  $v'_x = -(v_x - 2u)$  será la velocidad de la molécula después de chocar con el émbolo.

En el choque, pues, la molécula pierde una energía cinética igual a  $mv_x^2/2 - m(v_x - 2u)^2/2 = 2mv_xu - 2mu^2$ . Si multiplicamos este valor por el número de choques por segundo, obtenemos la disminución total de energía en unidad de tiempo. No obstante, sólo hemos determinado la frecuencia de choque para el caso en que la pared esté en reposo y si vamos a utilizar este valor para la frecuencia de choque, deberemos suponer que la velocidad  $u$  del émbolo es muy inferior a la velocidad molecular  $v_x$ . En consecuencia, el término  $2mu^2$  será despreciable frente al  $2mv_xu$  cuando  $u$  tienda a cero, y sólo precisaremos considerar el término  $2mv_xu$ . El número de choques por segundo de las moléculas contra el émbolo es  $Anv_x/2$ , y la pérdida total de energía por segundo es entonces  $\frac{1}{2}(Anv_x)(2mv_xu) = nmv_x^2Au$ .

La potencia o energía suministrada en unidad de tiempo *por* el gas es  $PAu$  y queremos ver si es igual a la pérdida de energía en unidad de tiempo por parte de las moléculas  $nmv_x^2Au$ , calculada a partir de la teoría cinética. La presión del gas, según la teoría cinética, es  $P = nmv_x^2$  [véase ec. (16-3)], y, por tanto,  $nmv_x^2Au$  no es mas que  $PAu$ . El trabajo mecánico realizado por un gas es igual a la pérdida de energía (cinética) de las moléculas del gas. (Obsérvese que hemos supuesto que el gas está encerrado en un cilindro aislado térmicamente.)

También puede aplicarse este análisis al caso en que se comprima el gas, con lo que se realizará trabajo *sobre* él; todo lo que necesitamos es sustituir  $u$  por  $-u$ . Encontraremos que el trabajo realizado sobre el gas es igual al incremento de energía cinética de las moléculas.

El estudio anterior ha mostrado en detalle cómo se extiende el principio de conservación de la energía a la conversión de la energía de las moléculas en su movimiento totalmente desordenado (energía interna o energía cinética total de las moléculas del gas) en trabajo mecánico ordenado y viceversa. Si representamos por  $U$  a la energía interna del gas, podemos decir que el decremento ( $-dU$ ) de energía interna es igual al trabajo  $dW = F dx = PA dx = P dV$ , realizado por el gas:

$$(dU)_a = -P dV \text{ (no hay flujo calorífico)}$$

(Si el trabajo realizado por el gas es positivo, la energía interna disminuye. Si se comprime el gas,  $dV$  y  $dW$  serán cantidades negativas y la energía interna del gas aumenta.)

En el capítulo 16 hemos visto que el calor sirve también para alterar la energía interna o energía de las moléculas del gas en su movimiento desordenado y, en efecto, con una consideración detallada de los calores específicos de los gases pudimos interpretar todo el calor cedido a un gas, o por el gas, en función de su energía interna. Estas consideraciones eran, para un gas mantenido a volumen constante:

$$(dU)_b = dQ \text{ (volumen constante, no se realiza trabajo)}$$

(Si el calor circula hacia el gas,  $dQ$  es positivo y la energía interna crece.)

Por tanto, la energía interna de un gas puede variar, o bien (a) porque el gas realice un trabajo (las moléculas rebotan contra un émbolo en movimiento), o (b) porque en el gas penetre calor. Tanto en (a) como en (b), tenemos

$$dU = (dU)_a + (dU)_b = -P dV + dQ$$

o sea

$$dQ = dU + P dV \quad (17-2)$$

La ecuación (17-2) constituye la expresión matemática del *primer principio de la Termodinámica* y nos dice que el calor suministrado a un gas se invierte, por una parte, en incrementar su energía interna y, por otra, en suministrar la energía para el trabajo mecánico que realiza el gas al variar su volumen. Expresa el hecho de que el calor y el trabajo son equivalentes y que se conserva la energía.

En este estudio hemos tratado el caso de un gas perfecto y hemos identificado la energía interna con la energía cinética de las moléculas. Entonces, según la teoría cinética, la energía interna *sólo* dependerá de la temperatura. (Recordemos que la temperatura es una medida de la energía cinética media de traslación por molécula.) Sabemos que si mantenemos constante el volumen de una muestra de gas, para incrementar su temperatura en  $dT$  debemos entregarle una cantidad de calor  $dQ = C_v dT$  por cada mol. Todo este calor se invertirá en incrementar la energía interna, por lo que tendremos

$$dU = C_v dT \quad (17-3)$$

para *todas* las transformaciones, puesto que la energía interna (energía cinética de las moléculas) *sólo* depende de la temperatura. Por ejemplo, aun cuando se requieran cantidades diferentes de calor para incrementar en un grado la tem-



peratura de un gas a presión constante y para incrementarla en un grado manteniendo constante el volumen del gas; la variación de energía interna es la misma en uno y otro caso.

Cuando se conocen la presión, volumen y temperatura de una cantidad dada de un gas perfecto, decimos que queda especificado el *estado del gas*. Como las variables de estado, presión, volumen y temperatura, están relacionadas por la ecuación de estado de los gases perfectos, se deduce que bastará conocer dos variables para tener especificado el estado del gas. En otras palabras, podemos especificar el estado por un punto en un diagrama de la presión en función del volumen (diagrama  $P$ - $V$  o de Clapeyron), por ejemplo, y una transformación por una línea en dicho diagrama, según se indica en la figura 17-3.

Supongamos ahora que mediante una sucesión de compresiones y dilataciones hacemos variar el estado del gas de manera que vuelva a su estado inicial. Esta transformación recibe el nombre de transformación cerrada o *ciclo* y en el diagrama  $P$ - $V$  está representada por una curva cerrada. Como las temperaturas inicial y final del gas coinciden y la energía interna del gas sólo depende de la temperatura, se deduce que la variación total de energía interna en una transformación cerrada es nula. Ello significa, según la ecuación (17-2) que en una *transformación cerrada* el calor total absorbido por un gas perfecto debe ser igual al trabajo total realizado por el gas. Esta es otra manera de enunciar el primer principio de la Termodinámica.

*Sustancias reales.* ¿Es aplicable el primer principio de la Termodinámica a sustancias que no sean un gas perfecto, o bien es posible que algún sólido, líquido o gas real tenga propiedades tales que nos permita construir una máqui-

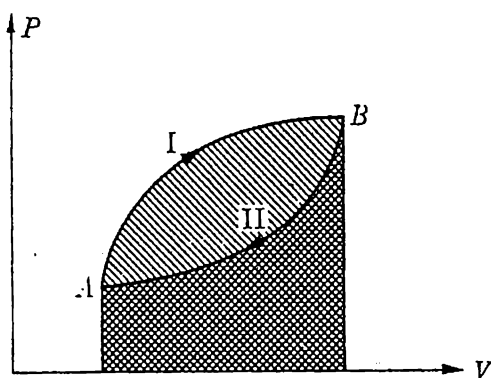


Fig. 17-3. Cuando el gas pasa del estado  $A$  al estado  $B$  a lo largo del camino I, el trabajo realizado por el gas está representado por el área de la superficie limitada bajo la curva I y el eje de abscisas. Cuando el gas vuelve del estado  $B$  al  $A$ , se realiza trabajo sobre el gas (se comprime) y este trabajo está representado por el área limitada bajo la curva II y el eje de abscisas. El trabajo total realizado por el gas al recorrer el ciclo completo estará, pues, representado por el área encerrada por el ciclo.

na de movimiento perpetuo que en una transformación cerrada suministre más energía en forma de trabajo de la que se le entregó en forma de calor? La respuesta a esta pregunta sólo puede darse a partir de la experiencia y hasta ahora, no se ha hallado ninguna sustancia ni transformación que infrinja el primer principio de la Termodinámica; *nadie ha podido realizar una máquina de movimiento perpetuo*. De este tipo de evidencia experimental sacamos la conclusión de que cuando se varía cíclicamente el estado de una sustancia real arbitraria, el calor total absorbido es igual al trabajo total realizado. Con referencia a la ecuación (17-2) también podemos expresar este resultado diciendo que en todas las sustancias existe una energía interna que es función de estado de la sustancia.

Puede ayudarnos mucho el desarrollar algo más el estudio de esta cuestión. A tal fin, consideremos que las curvas de la figura 17-3 representan la variación del estado de una sustancia, por ejemplo, un gas real, que se halle inicialmente en el estado  $A$ . Según se indica en el pie de la figura 17-3, el trabajo realizado por el gas al ir variando su estado a lo largo del camino I, volviendo después al estado  $A$  a lo largo del camino II, está representado por el área encerrada por los caminos. Este trabajo no puede ser mayor que el calor total absorbido en el ciclo, pues, si así ocurriera, parte del trabajo total podría convertirse en el calor necesario para describir el ciclo siguiente y el resto lo podríamos aprovechar. La máquina, pues, podría marchar por sí sola y producir trabajo constantemente, es decir, tendríamos una máquina de movimiento perpetuo llamada *móvil perpetuo de primera especie*. Análogamente, el trabajo total no puede ser menor que el calor absorbido, ya que entonces podríamos hacer que el gas describiera el ciclo en sentido contrario y así obtener del gas más energía en forma de calor de la que le entregamos en forma de trabajo mecánico  $W$ . Parte de este calor se podría entonces emplear en accionar otra máquina de la que se obtuviera el trabajo  $W$  y el resto del calor podría aprovecharse. Por tanto, sacamos la conclusión de que la imposibilidad del móvil perpetuo de primera especie exige que en toda transformación cerrada el trabajo total obtenido debe ser igual al calor total absorbido y que el primer principio de la Termodinámica es aplicable a todas las sustancias.

Se deduce, pues, que la variación de energía interna en un ciclo es nula. Con referencia a la figura 17-3, si fuera  $\Delta U_{ab}$  la variación de energía interna del gas cuando pasa del estado  $A$  al  $B$  por el camino I, deberá producirse una variación igual y opuesta  $\Delta U_{ba} = -\Delta U_{ab}$  cuando pase el gas del estado  $B$  al  $A$  por el camino II. Como I y II son caminos arbitrarios, la variación de energía interna al pasar de  $A$  a  $B$  no puede depender del camino sino solamente de los estados inicial y final. En otras palabras, la energía interna debe estar completamente determinada por el estado de una sustancia y no, por ejemplo, por su historia anterior.

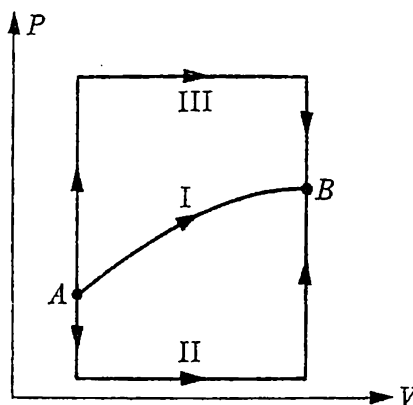


Fig. 17-4. La variación de energía interna está determinada totalmente por los estados inicial y final, pero el trabajo realizado y por tanto el calor absorbido, dependen del camino. El trabajo realizado puede hacerse arbitrariamente pequeño con caminos análogos al II, o arbitrariamente grande con caminos como el III.

En resumen, pues, el primer principio de la Termodinámica es un enunciado del principio de conservación de la energía y es válido para todas las sustancias. Sirve para definir la energía interna como función del estado de una sustancia. El trabajo  $W$  y el calor  $Q$  no son funciones de estado y sus valores *dependen* del camino seguido entre dos estados, hecho que es evidente si recordamos que el trabajo realizado en una transformación puede representarse por el área limitada bajo la curva  $P = P(V)$ . Entonces, si mantenemos fijos los extremos del camino en el diagrama  $P$ - $V$  y elegimos varios caminos que los unan, podremos variar a voluntad el área limitada bajo la curva  $P = P(V)$ , según puede verse en la figura 17-4. La variación de energía interna, en cambio, es la misma para todos los caminos.

Tanto si tratamos con un gas perfecto como con un gas real o cualquier otra sustancia, de la definición de calor específico como  $dQ/dT$  (véanse capítulos 14 y 16), se deduce que la variación de energía interna se podrá expresar siempre en la forma

$$dU = C_v dT$$

donde  $C_v$  es el calor específico (molar) a volumen constante. La relación  $dQ = dU + dW$  entre el calor absorbido  $dQ$  y el trabajo  $dW$  realizado por la sustancia podrá, pues, escribirse en la forma

$$dQ = C_v dT + P dV$$

Según veremos en el capítulo 18, el calor específico puede ser también función de las variables de estado.

**17-3 Transformaciones de un gas perfecto.** El estado de un gas queda especificado por su temperatura, volumen y presión. Sólo dos de estas variables son independientes, ya que están relacionadas por la ley de los gases que, para un mol de gas, es

$$PV = RT$$

El estado del gas podrá describirse unívocamente por un punto del diagrama  $P$ - $V$  (o  $V$ - $T$ , o  $P$ - $T$ ). La especificación del estado del gas implica que se halle en equilibrio térmico. En tal caso, las condiciones serán las mismas en todos los puntos del gas. En este apartado vamos a estudiar en detalle el comportamiento de un gas perfecto cuando se calienta, comprime, o se le obliga de cualquier otra manera a pasar de un estado de equilibrio a otro. Como la especificación del estado sólo es aplicable a condiciones de equilibrio, podemos estudiar, en principio, sólo los estados inicial y final; ya que *durante* una transformación el gas no está en equilibrio. No obstante, cuando las variaciones son suficientemente lentas, hay tiempo suficiente para que el gas alcance el equilibrio en cada punto durante la transformación. Ésta podrá, pues, considerarse como una sucesión de estados de equilibrio y podrá representarse por una sucesión de puntos, o sea una línea, entre los estados inicial y final en un diagrama  $P$ - $V$ . A una transformación de este tipo se le da el nombre de *reversible* porque alterando infinitamente poco las condiciones exteriores se le puede invertir su sentido. Como ejemplo típico de transformación irreversible, consideremos qué pasa cuando el émbolo de un cuerpo de bomba que contiene un gas se mueve hacia afuera con velocidad mucho mayor que la celeridad media de las moléculas. Con el émbolo chocarán muy pocas moléculas y el gas realizará poco trabajo. Tras el émbolo se crea un vacío y el gas acude a llenar el vacío en lo que se llama una *expansión libre*. Durante esta expansión libre el gas no está en equilibrio térmico y las condiciones no son las mismas en todos los puntos del gas.

*Transformación a presión constante (isobárica).* *Calor específico a presión constante.* Para ilustrar una transformación de un gas perfecto, consideremos un ejemplo en el cual se calienta el gas a presión constante, como se indica en la figura 17-5. El recipiente que contiene el gas tiene un extremo cerrado por un émbolo móvil. Si despreciamos el rozamiento, cuando el émbolo esté en equilibrio la presión sobre sus dos caras debe ser la misma. En nuestro caso, la presión exterior es constante y si las transformaciones son lentas (reversibles), la presión en el interior del recipiente será también constante durante todo el proceso. Cuando se calienta el gas del recipiente, si la presión en su interior debe permanecer constante el gas se deberá dilatar. Esta transformación a presión constante (isobárica) está representada por una recta horizontal en el diagrama de Clapeyron  $P$ - $V$  de la figura 17-5.

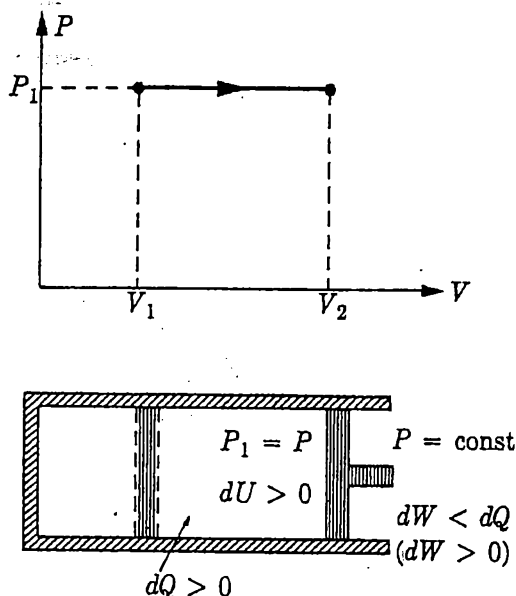


Fig. 17-5. Expansión a presión constante (dilatación isobárica).

Si es  $P_1$  la presión del gas y  $A$  el área de la superficie del émbolo, cuando éste se desplaza una distancia  $dx$  el trabajo realizado por el gas es  $dW = P_1 A dx = P_1 dV$ . Como el volumen crece a presión constante, la temperatura y la energía interna deberán crecer también. Si la variación de temperatura es  $dT$ , para un mol de gas la variación de energía interna será  $C_v dT$ . También el trabajo realizado por el gas puede expresarse en función de la variación de temperatura, porque de  $PV = RT$  se deduce que  $P dV + V dP = R dT$ , que se reduce a  $P dV = R dT$  cuando  $dP = 0$ . El calor absorbido por el gas podrá, pues, escribirse en la forma

$$dQ = (R + C_v) dT = C_p dT$$

donde

$$C_p = C_v + R$$

La nueva cantidad  $C_p$  que acabamos de introducir es el calor específico molar del gas a presión constante. Recordemos que el calor específico por mol se define como  $dQ/dT$ , donde  $dQ$  es el calor necesario para incrementar en  $dT$  la temperatura de un mol. Una variación de temperatura se puede producir de muchas maneras, por ejemplo, a presión constante, a volumen constante, adiabáticamente, etc. y la cantidad de calor necesaria para originar una variación de temperatura, y, por tanto, el calor específico, dependerá de la transformación particular elegida.

El calor específico  $C_v$ , que dedujimos a partir de la teoría cinética, se refería

a un recipiente con paredes fijas, es decir, a un volumen constante. Hallábamos que el gas no realizaba trabajo alguno al ser calentado y teníamos  $dQ = C_v dT$ . En cambio, cuando se calienta el gas a presión constante se precisa una cantidad adicional de calor para producir la elevación de temperatura  $dT$ , ya que ahora varía el volumen y el gas realiza un trabajo. En el caso de un gas monoatómico hemos visto que el calor específico a volumen constante es  $C_v = 3R/2$ ; para el calor específico a presión constante obtenemos

$$C_p = \frac{5}{2}R \quad (\text{gas monoatómico}) \quad (17-4a)$$

Para un gas diatómico a temperaturas ordinarias, tenemos  $C_v = 5R/2$  y por tanto

$$C_p = \frac{7}{2}R \quad (\text{gas diatómico}) \quad (17-4b)$$

El cociente entre los calores específicos a presión constante y a volumen constante, que se prevé basándose en la teoría cinética y en la Termodinámica, es pues

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3} = 1,67 \quad (\text{gas monoatómico})$$

y

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5} = 1,40 \quad (\text{gas diatómico})$$

En la tabla 16-2 puede verse que estos resultados presentan una concordancia satisfactoria con los resultados experimentales obtenidos a temperaturas ordinarias.

**EJEMPLO.** Un recipiente contiene 8 g de helio que inicialmente se halla a una temperatura de 27° C. La pared superior del recipiente está constituida por un émbolo móvil, según se indica en la figura 17-6. La masa del émbolo es despreciable. Se calienta el gas hasta que su volumen sea el doble del inicial. ¿Cuáles son el trabajo realizado por el gas, la variación de su energía interna y el calor total absorbido por él?

La presión que se ejerce desde el exterior sobre el émbolo es 1 atm y por ser despreciable el peso del émbolo, la presión  $P_1$  en el interior del recipiente también será 1 atm. Si es  $V_1$  el volumen inicial del gas y  $V_2$  el final, tenemos  $V_2 = 2V_1$  y el trabajo realizado por el gas es

$$W = P_1(V_2 - V_1) = P_1V_1 \quad (17-5)$$

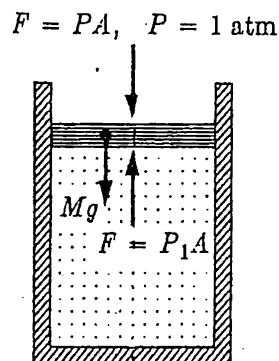


Figura 17-6

La ecuación de estado nos dice que  $P_1 V_1 = \mu RT_1$ , donde  $\mu = 2$  ya que tenemos dos moles de helio ( $M = 4$ ). El trabajo podrá, pues, expresarse también en la forma  $P_1 V_1 = 2RT_1 = 0,164 \cdot 300 = 49,2$  atm·litro y se puede representar por el área limitada bajo la curva  $P = P(V)$ . El volumen inicial del gas es, evidentemente,  $V_1 = 49,2$  litros. Como este volumen se duplica a presión constante, también se duplicará la temperatura. Es decir,  $T_2 = 2T_1 = 600^\circ \text{K}$ . La variación de energía interna es, pues,  $\Delta U = 2C_v (T_2 - T_1) = 2(3R/2)T_1 = 3RT_1$  y el calor total absorbido es

$$\Delta Q = 3RT_1 + 2RT_1 = 5RT_1 = 5 \cdot 0,082 \cdot 300 \simeq 123 \text{ atm·litro}$$

En relación con esto hay que señalar que si no fuera despreciable la masa del émbolo, las presiones en el interior y en el exterior serían diferentes a causa del peso del émbolo. Éste se halla en equilibrio bajo la acción de la presión exterior, la fuerza de la gravedad y la presión en el interior del recipiente. Entonces, cuando el émbolo tenga masa  $m$  y área  $A$  y sea  $P$  la presión en el exterior del mismo, la presión en el interior del recipiente será

$$P_1 = P + \frac{mg}{A}$$

*Transformaciones a temperatura constante (isotérmicas).* Vamos a continuar nuestro estudio de las transformaciones de un gas a volumen constante y a presión constante, con el estudio del caso en que se mantenga constante la temperatura pero varíen simultáneamente la presión y el volumen. Para asegurar una temperatura constante, supondremos que el recipiente con el gas se halla en contacto térmico con un depósito a temperatura constante, por ejemplo, una gran masa de agua. Las compresiones y dilataciones del gas serán suficientemente lentas para mantener el gas en equilibrio térmico continuo con el depósito. Como éste se supone de capacidad calorífica infinita, el calor que pase del depósito al gas no alterará la temperatura de aquél.

Cuando la temperatura es constante, tenemos  $PV = \text{const}$ , y la transformación estará representada en el diagrama  $P$ - $V$  por una hipérbola, según se indica en la figura 17-7. Desde un punto de vista energético, la característica más importante de las transformaciones a temperatura constante (isotérmicas) es que *la energía interna del gas permanece constante* y todo el calor que se cede al gas se convierte en trabajo, ya que  $dU = 0$  y por tanto  $dQ = dW$ . Al dilatarse el gas desde un volumen  $V_1$  hasta un volumen  $V_2$ , el trabajo realizado por el gas es

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P dV. \quad (17-6)$$

resultado que, desde luego, no se limita a transformaciones isotérmicas, sino que tiene validez general. [En el caso particular de una transformación isobárica, según estudiamos anteriormente, obtenemos  $W = P(V_2 - V_1)$ .] Obsér-

vese que el trabajo puede representarse por el área limitada bajo la curva  $P = P(V)$ . Si sustituimos  $P = RT/V$ , para un mol del gas, el trabajo podrá representarse por

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P dV = RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = RT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (17-7)$$

**EJEMPLO.** A un mol de gas se le hace describir un ciclo como el indicado en la figura 17-8. El gas se dilata a temperatura constante desde un volumen  $V_1$  hasta otro  $V_2 = 2V_1$ . Luego se comprime a presión constante hasta volver al volumen inicial y por último vuelve al estado inicial calentándolo a volumen constante. ¿Cuál es el trabajo total realizado por el gas en dicho ciclo, expresado en función de la temperatura inicial  $T_1$ ?

En la expansión isotérmica, el trabajo es positivo e igual a

$$W_1 = RT_1 \ln 2$$

según la ecuación (17-7). En la compresión de  $V_2$  a  $V_1$ , se realiza trabajo *sobre* el gas y el trabajo realizado *por* éste es negativo. Esto se deduce directamente de la expresión general (17-6). Tenemos

$$W_2 = \int_{V_2}^{V_1} P dV = P_2(V_1 - V_2) = -P_2 V_1 = -\frac{P_1 V_1}{2}$$

puesto que  $P_2 = P_1/2$ . En el calentamiento final a volumen constante no se realiza trabajo y el trabajo total realizado por el gas durante el ciclo será

$$W = W_1 + W_2 = RT_1 \ln 2 - \frac{P_1 V_1}{2} = RT_1 (\ln 2 - 0,5) \simeq 0,19 RT_1$$

**Transformación adiabática.** En las transformaciones estudiadas hasta ahora el gas realiza interacciones térmicas con el medio que le rodea, con lo que cede y absorbe calor. Por ejemplo, en la transformación isobárica que parte del punto  $A$  (fig. 17-9), la dilatación del gas exige que se le entregue calor y  $\Delta Q$  es positivo. Lo mismo ocurre, según se ha visto, en una dilatación isotérmica. En cambio, si disminuye la presión a volumen constante desde el valor de  $A$ , el gas se enfriará y  $\Delta Q$  es negativo. Vamos a estudiar ahora un caso en el cual el gas se halla aislado térmicamente del medio que le rodea de manera que  $\Delta Q = 0$  durante toda la transformación. En este caso tenemos una *transformación adiabática* y de la figura 17-9 se deduce que la curva que representa esta transformación deberá tener mayor pendiente que la curva isoterma.

Como el gas no absorbe ni cede calor, se deduce que todo el trabajo que realice deberá ser igual a una disminución de su energía interna, del mismo valor. Es decir, tenemos

$$dQ = dU + P dV = 0$$



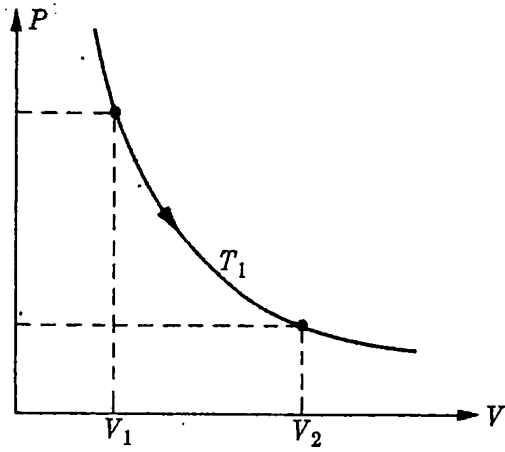


Fig. 17-7. Expansión isotérmica.

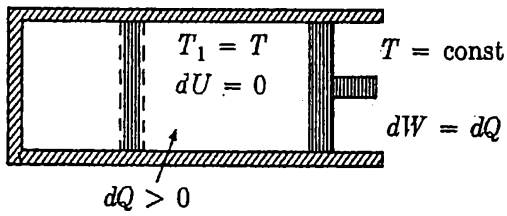


Figura 17-8

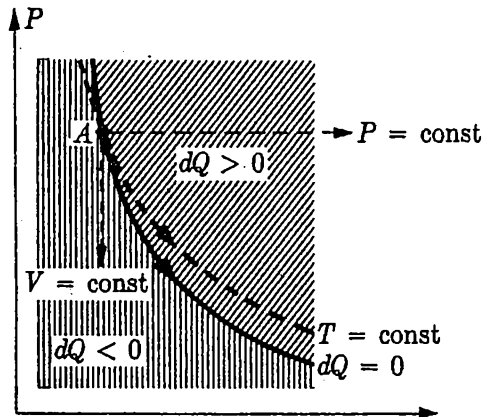
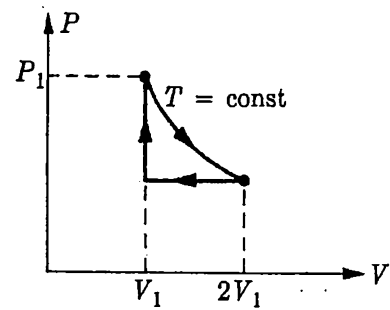
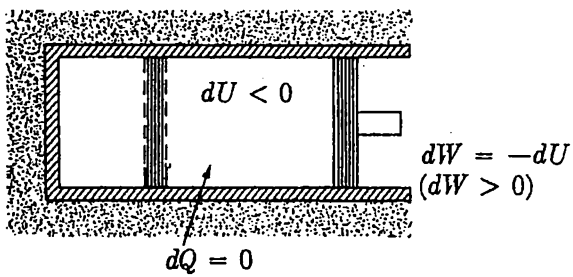


Fig. 17-9. Transformación adiabática.



o sea

$$dU = -P dV \quad (17-8)$$

Sustituyendo en la ecuación (17-8)  $dU = C_v dT$  y  $P = RT/V$ , podemos hallar la manera en que se relacionan presión, volumen y temperatura, en una transformación adiabática. La ecuación (17-8) se reduce entonces a

$$C_v \frac{dT}{T} = -R \frac{dV}{V}$$

que puede integrarse directamente dando  $\ln T = -(R/C_v) \ln V + \text{const}$  o bien, con  $R/C_v = (C_p - C_v)/C_v = \gamma - 1$ , tenemos  $\ln (TV^{\gamma-1}) = \text{const}$ . Es decir

$$TV^{\gamma-1} = \text{const} = T_1 V_1^{\gamma-1} \quad (17-9a)$$

Acabamos de introducir el cociente entre los calores específicos  $\gamma = C_p/C_v$  (5/3 para gases monoatómicos y 7/3 para diatómicos). Multiplicando la ecuación (17-9a) por la  $P_1 V_1/T_1 = PV/T$ , se elimina la temperatura y obtenemos la relación existente entre presión y volumen,

$$P_1 V_1^\gamma = PV^\gamma = \text{const} \quad (17-9b)$$

Mientras en las transformaciones isotérmicas se mantiene constante el producto  $PV$ , en las adiabáticas es constante  $PV^\gamma$  y  $P$  varía como  $V^{-\gamma}$ . Por tanto, una curva adiabática, en el diagrama  $P$ - $V$  tendrá mayor pendiente que una isoterma, según ya se mencionó anteriormente.

El trabajo realizado por el gas se obtiene mediante la integral  $\int P dV$ , la cual, como  $P dV = -dU = -C_v dT$ , se determina en forma más sencilla a partir de la variación de energía interna. En otras palabras, para hallar el trabajo realizado por el gas,  $W = C_v(T_1 - T_2)$ , sólo necesitamos conocer la diferencia entre las temperaturas inicial y final.

Aun cuando, en principio, la transformación deba ser reversible, con lo que el gas se halle en todo momento en un estado de equilibrio, hallamos que en la práctica, las relaciones obtenidas basándonos en esta hipótesis resultan aplicables a transformaciones rápidas. Por ejemplo, al comprimir rápidamente el aire en una bomba de bicicleta, o cuando se consideran las fluctuaciones de la presión en una onda sonora, podríamos dudar de la validez de la hipótesis de reversibilidad. Sin embargo, hallamos que estos dos procesos pueden describirse con gran precisión como adiabáticos. En otras palabras, el equilibrio termodinámico de un gas se alcanza en un tiempo que es corto frente a los tiempos que suelen intervenir en muchos procesos en la práctica. El tiempo necesario para establecer el equilibrio en un gas, o tiempo de relajación, está relacionado con el tiempo que transcurre entre choque y choque de las moléculas. Si en un gas se producen variaciones con una frecuencia que es del or-

den de la frecuencia de choque de las moléculas, fallará la hipótesis de equilibrio termodinámico. Al principio de este apartado, se dio otro tipo de proceso irreversible en el que se consideraba un émbolo que se movía hacia afuera con mayor rapidez que las moléculas.

Cuando se dilata un gas, por ejemplo, a temperatura constante vemos que absorbe del medio que le rodea una cierta cantidad de calor y que el gas realiza trabajo. Si se invierte el sentido de la transformación de manera que se comprima el gas siguiendo el mismo camino isotérmico, hallamos que el gas cede al medio que le rodea una cantidad de calor igual a la anterior y que hay que efectuar *sobre* el gas el mismo trabajo que antes, con el fin de llevar el gas a su estado inicial. En otras palabras, invirtiendo el camino volvemos a llevar al gas y al medio que le rodea a sus estados iniciales. Las transformaciones isotérmicas son, pues, reversibles. Aun cuando estas transformaciones reversibles son ideales (por ejemplo, se desprecia el rozamiento), juegan un papel muy importante en el estudio de la materia. Posteriormente, en el capítulo 19, insistiremos en la cuestión de la reversibilidad.

EJEMPLO. Calcular el trabajo realizado y el calor absorbido por  $\mu$  moles de un gas perfecto monoatómico que se dilata desde un volumen  $V_1$  hasta un volumen  $2V_1$ . La temperatura inicial del gas es  $T_1$ . Consideraremos que las dilataciones tienen lugar (a) a presión constante, (b) a temperatura constante y (c) adiabáticamente. En la figura 17-10 pueden verse los tres caminos.

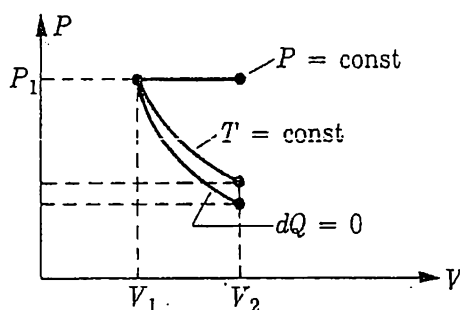


Figura 17-10

(a) La presión inicial está dada por  $P_1 V_1 = \mu R T_1$ . El trabajo realizado por el gas en la expansión es  $P_1(V_2 - V_1) = P_1 V_1$ . En consecuencia, el trabajo es

$$W_a = \mu R T_1$$

La temperatura se duplica en la expansión, con lo que la variación de energía interna es  $\Delta U_a = \mu C_v (T_2 - T_1) = \mu C_v T_1$ . Como  $C_v = 3R/2$ , obtenemos

$$\Delta U_a = \frac{3}{2} \mu R T_1 = 1,5 \mu R T_1$$

El calor absorbido por el gas es, pues,

$$\Delta Q_a = W_a + \Delta U_a = \frac{5}{2}\mu RT_1 = 2,5\mu RT_1$$

Este último resultado se podía haber obtenido directamente de  $\Delta Q = \mu C_p \Delta T$ , donde  $C_p = C_v + R = 5R/2$ .

(b) En la expansión isotérmica la energía interna del gas permanece constante. El trabajo realizado por el gas es

$$W_b = \mu RT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = (\ln 2)\mu RT_1 \simeq 0,69\mu RT_1$$

y el calor absorbido por el gas tiene el mismo valor,

$$\Delta Q_b = W_b = (\ln 2)\mu RT_1 \simeq 0,69\mu RT_1$$

(c) En la transformación adiabática tenemos  $dQ = 0$ . Para obtener la variación de energía interna, determinaremos la nueva temperatura  $T_2$ . Según la ecuación (17-9a) tenemos  $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$  y por tanto  $T_2 = (1/2)^{\gamma-1} T_1 = (1/2)^{2/3} T_1$ . La variación de energía interna es, pues, con  $C_v = 3R/2$ ,

$$\Delta U_c = \mu C_v (T_2 - T_1) = -(1 - 2^{-2/3})\mu C_v T_1 \simeq -0,56\mu RT_1$$

La disminución de energía interna debe ser igual al trabajo realizado por el gas,

$$W_c = -\Delta U_c = 0,56\mu RT_1$$

Para obtener algunos valores numéricos, consideremos un litro de helio a una temperatura inicial de 300° K. El número de moles es

$$\mu = \frac{P_1 V_1}{RT_1} = 2 \cdot \frac{1}{0,082 \cdot 300} \simeq 0,081 \text{ mol}$$

Tenemos entonces (con  $R \simeq 2 \text{ cal/mol} \cdot \text{grado}$ )

$$\mu RT_1 = 0,081 \cdot 2 \cdot 300 \simeq 48,5 \text{ cal}$$

y habrá que sustituir este valor en las expresiones anteriores del trabajo, energía interna y calor.

**17-4 Compresibilidad de un gas.** El gas contenido en un recipiente se parece, en un aspecto, a un resorte. Si desplazamos el émbolo de su posición de equilibrio, según se indica en la figura 17-11, por ejemplo, apretándolo hacia el interior del recipiente, al soltarlo rebotará y oscilará en torno a la posición de equilibrio. El gas del recipiente tiene «rigidez», al igual que un resorte, y

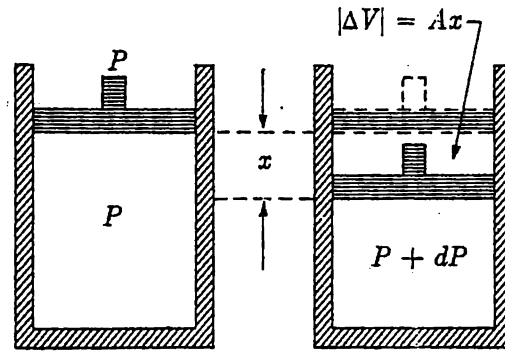


Fig. 17-11. La compresibilidad de un gas es  $\kappa = -(1/V)(dV/dP)$ .

suministra una fuerza restauradora al émbolo. Es interesante determinar la «constante del resorte» del gas contenido en el recipiente o, lo que es equivalente, la compresibilidad del gas. En la figura 17-11 se indica la variación de volumen  $dV$  que resulta cuando se incrementa en  $dP$  la presión exterior (y también la presión interior al recipiente). La variación relativa de volumen es  $dV/V$  (en el caso representado,  $dV$  es negativa). La compresibilidad  $\kappa$  se define como la variación de volumen relativa por incremento de presión unitario, y se expresa formalmente por

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP} \quad (17-10)$$

La compresibilidad depende de la relación entre la presión y el volumen durante la compresión. En una compresión isotérmica tenemos  $PV = \text{const}$  y  $V dP + P dV = 0$ , lo cual significa que  $dV/V = -dP/P$ , o sea

$$\kappa_i = \frac{1}{P} \quad (\text{isotérmica}) \quad (17-11)$$

Si la compresión es adiabática, la relación entre la presión y el volumen viene dada por  $PV^\gamma = \text{const}$ , con lo que  $V^\gamma dP + \gamma V^{\gamma-1} P dV = 0$  y, por tanto, la compresibilidad es

$$\kappa_a = \frac{1}{\gamma P} \quad (\text{adiabática}) \quad (17-12)$$

En una compresión isotérmica el calor saldrá del recipiente que contiene al gas y la presión restauradora que proporciona el gas será menor que en el caso adiabático, en el cual la temperatura del gas puede aumentar. En el caso adiabático, la rigidez del gas es mayor y la compresibilidad menor, que en el caso isotérmico. Para obtener condiciones adiabáticas, el recipiente del gas deberá,

en principio, estar aislado térmicamente. Sin embargo, se pueden obtener muy aproximadamente condiciones adiabáticas sin aislamiento térmico si la compresión tiene lugar con suficiente rapidez para que no haya tiempo para el intercambio de calor. (Desde luego, los cambios deben ser suficientemente lentos para que se mantenga el equilibrio térmico en el interior del recipiente.)

**EJEMPLO.** Consideremos las oscilaciones mencionadas anteriormente. En la práctica, este experimento podrá realizarse fácilmente con una bola de acero que encaje en el cuello de un frasco, en la forma indicada en la figura 17-12. Si se desplaza la bola hacia arriba una distancia  $x$ , el volumen varía en  $\Delta V = Ax$ , donde  $A$  es el área de la sección del cuello. La variación de la presión en el interior del frasco será

$$dP = - \frac{dV}{V\kappa} = - \frac{Ax}{V\kappa}$$

La fuerza restauradora que se ejerce sobre la bola se halla dirigida entonces hacia abajo y tiene por magnitud  $(1/V\kappa)A^2x$ , lo cual corresponde a una constante de resorte  $K = A^2/V\kappa$ . El período de oscilación de la bola es, pues,

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} = \frac{2\pi}{A} \sqrt{mV\kappa}$$

donde  $m$  es la masa de la bola. En consecuencia, midiendo el período de oscilación podemos determinar la compresibilidad  $\kappa$  y si las condiciones son adiabáticas ( $\kappa = 1/\gamma P$ ), podemos determinar el cociente  $\gamma$  entre los calores específicos a presión constante y a volumen constante.

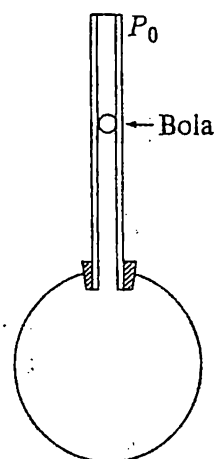


Fig. 17-12. Experimento sencillo para la determinación de  $\gamma = C_p/C_v$ .

## PROBLEMAS

17-1. Hacemos referencia a la figura 17-1 (a). Demostrar que la pérdida aparente de energía en este choque es  $mV^2/4$ .

17-2. Realizar un análisis similar al presentado en el apartado 17-2 para determinar la relación entre energía interna y trabajo realizado en la expansión de un gas perfecto, pero considerando ahora una compresión del gas. De-

mostrar que el trabajo realizado sobre el gas aparece como incremento de la energía interna.

17-3. Imaginar un experimento en el cual el estado de un gas real sufra una transformación cerrada. En este ciclo, el gas ejerce interacción térmica con el medio que lo rodea y realiza también un trabajo. A partir de este experimento, ¿cómo verificaríamos que la energía in-

terna del gas es una función de estado?

17-4. La energía interna está unívocamente determinada por el estado de un gas. ¿Es cierto el recíproco, es decir, que un estado se halla unívocamente determinado por la energía interna? Explíquese.

17-5. Explíquese cualitativamente por qué el calor específico de un gas a volumen constante es menor que el calor específico a presión constante.

17-6. Un mol de un gas perfecto monoatómico se dilata a la presión constante  $P_1$  desde un volumen  $V_1$  hasta un volumen  $2V_1$ . ¿Hasta qué volumen debería dilatarse isotérmicamente un gas exactamente igual a partir del mismo estado inicial (a) para realizar el mismo trabajo, y (b) para absorber la misma cantidad de calor que en la transformación isobárica?

17-7. Las cataratas del Niágara tienen una altura de unos 50 m. ¿Qué elevación aproximada de temperatura puede esperarse para el agua en la parte inferior?

17-8. Demostrar que en una transformación adiabática, la relación entre temperatura y volumen viene dada por  $TV^{\gamma-1} = \text{const.}$

17-9. Un cilindro contiene un mol de un gas diatómico. Un extremo del recipiente está cerrado por un émbolo móvil de área  $A$  y masa  $m$ . Cuando el cilindro descansa sobre su generatriz, el émbolo toma una posición de equilibrio tal que el volumen del gas encerrado es  $V$ . El cilindro está aislado térmicamente del medio que le rodea. (a) ¿Cuál será la nueva posición de equilibrio del émbolo si se gira el cilindro de manera que el émbolo quede arriba, comprimiendo el gas? (b) ¿Cuál será la posición de equilibrio del émbolo si se gira el ci-

lindro de manera que aquél quede abajo? (c) ¿Cuál es el trabajo realizado por la gravedad en (a) y (b), y cuáles son las nuevas temperaturas del gas? Sea  $T$  la temperatura inicial del gas.

17-10. Deducir una relación que dé la presión en función de la temperatura de un gas perfecto durante una transformación adiabática.

17-11. Un mol de helio a  $0^\circ\text{C}$  y 1 atm de presión se comprime adiabáticamente hasta 5 atm y luego se enfría hasta  $0^\circ\text{C}$  a volumen constante. ¿Cuál es la presión final?

17-12. Un gas consistente en 10 g de argón se halla inicialmente a 3 atm de presión y  $300^\circ\text{K}$ . Sufrir una transformación y finalmente se halla a una presión de 1 atm y a  $600^\circ\text{K}$ . Hallar el trabajo realizado, el calor absorbido y la variación de energía interna para las siguientes transformaciones, todas las cuales pueden llevar el gas de su estado inicial a su estado final: (a) Presión constante, volumen constante. (b) Volumen constante, presión constante. (c) Temperatura constante, presión constante. (d) Volumen constante, temperatura constante.

17-13. ¿Cuántas calorías se necesitan para calentar un litro de helio de  $50^\circ\text{C}$  a  $60^\circ\text{C}$  a la presión constante de 1 atm? Realizar el mismo cálculo para un litro de oxígeno.

17-14. Un recipiente de volumen  $V$  se divide en dos mitades mediante un émbolo hermético, en la forma indicada en la figura 17-13. Las dos partes contienen 1 mol de helio y 1 mol de oxígeno, respectivamente. (a) ¿Qué fuerza se precisa para mantener en equilibrio el émbolo si las temperaturas de los dos gases son iguales a  $T$ ? (b) Se desplaza ahora el émbolo hasta que se comprime el oxígeno hasta la mitad de su volumen inicial. ¿Cuál será la fuerza que se requiere

ahora para mantener el émbolo en equilibrio, si para los dos gases se suponen adiabáticas las transformaciones? El área de la superficie del émbolo es  $A$ . ¿Cuál es el cociente entre las temperaturas finales de los dos gases? (c) En (b), ¿cuál es el trabajo total realizado por la fuerza exterior sobre el émbolo? (d) A causa del flujo calorífico a través del émbolo (se supone que el recipiente está térmicamente aislado), las temperaturas de los

dos gases llegan a igualarse. ¿Cuál será el valor de esta temperatura y cuál es la nueva fuerza requerida para mantener el émbolo en equilibrio?

17-15. Hacemos referencia a la figura 17-13 y al problema 17-14. El émbolo, de masa  $m$ , se desplaza un poco y luego se suelta. ¿Cuál será la frecuencia de oscilación si en ambos gases (a) las condiciones son adiabáticas? (b) las condiciones son isotérmicas?

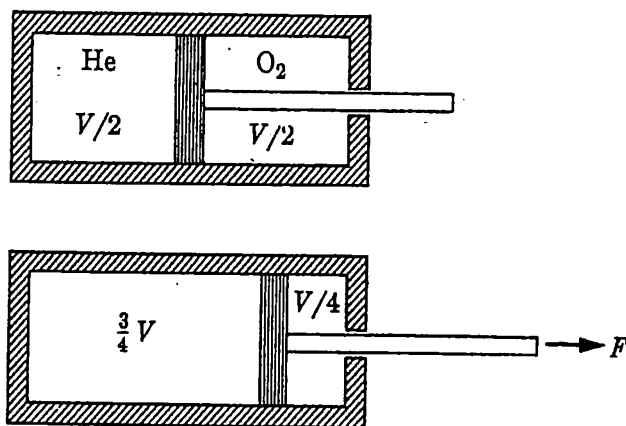


Figura 17-13



## ALGUNAS PROPIEDADES DE LA MATERIA

*Resumen.* Ahora que nos hemos familiarizado un tanto con los átomos y moléculas y con su movimiento, estudiaremos en este capítulo ciertas propiedades específicas de la materia que, según veremos, pueden relacionarse con las fuerzas de interacción entre las moléculas y átomos de la materia. Empezaremos con un estudio de los gases y líquidos y la transición de aquéllos a éstos (condensación), y compararemos los resultados experimentales con la ecuación de estado de van der Waals. A continuación se estudia brevemente la vaporización, fenómeno inverso de la condensación. Luego se describen algunas propiedades elásticas de los sólidos y las fuerzas intermoleculares correspondientes. Ello conduce a una estimación de las frecuencias características de las vibraciones moleculares. Se interpreta entonces el calor específico de los sólidos con ayuda de la energía de las vibraciones moleculares. Por último, se menciona la relación existente entre la dilatación térmica y la vibración molecular.

En el capítulo primero se dijo que la Física contiene dos tipos fundamentales de problemas: el problema referente a interacciones fundamentales (interacciones de dos cuerpos) y el problema referente a la descripción de las propiedades macroscópicas de la materia en función de sus constituyentes elementales (interacciones entre muchas partículas). La descripción de las propiedades de la materia se ha limitado principalmente a los gases perfectos y se han descrito mediante la teoría cinética. Si quisiéramos detallar mucho más tendríamos que introducir, por ejemplo, la dependencia entre las fuerzas intermoleculares y la separación de las moléculas, etc., y ello nos haría salir del ámbito que nos hemos fijado. No obstante, conocemos ciertos fenómenos y propiedades de la materia que ponen de manifiesto en forma bien patente los efectos de las fuerzas intermoleculares y aun cuando no estudiemos aquí cuantitativamente estos efectos, podremos presentar, al menos, una descripción molecular cualitativa.

**18-1 Expansión libre de un gas. Efecto Joule-Thomson.** En la deducción de la ecuación de estado de un gas perfecto se hicieron dos hipótesis importantes: se suponía que las moléculas eran de un tamaño despreciable y se suponía que su energía era puramente cinética. No se incluía la energía potencial resul-

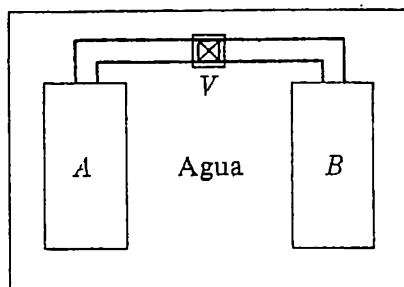


Fig. 18-1. Experimento de expansión libre

tante de las fuerzas intermoleculares. Entonces, según la teoría cinética, la energía interna del gas estaba totalmente determinada por el número de moléculas  $N$  del gas y por la energía cinética media de las moléculas. La energía interna sólo depende de la temperatura del gas y no de su volumen.

La comprobación experimental de la independencia entre la energía interna y el volumen la proporciona la expansión libre de un gas. Este experimento, realizado primeramente por GAY-LUSSAC y posteriormente por JOULE, es el representado en la figura 18-1. Mediante una válvula  $V$  se conecta un frasco  $A$  que contiene un gas con un frasco  $B$  en el que se ha practicado el vacío. El sistema total se sumerge en un calorímetro lleno de agua y aislado térmicamente del exterior. Al abrir la válvula, el gas se precipita en el depósito vacío (expansión libre) de manera que, una vez alcanzado el equilibrio, las presiones en ambos frascos serán iguales. Si en esta expansión libre absorbiera o desprendiera el gas alguna energía, se alteraría la temperatura del agua del baño. Como GAY-LUSSAC y JOULE no observaron variación alguna de la temperatura, sacaron la conclusión de que el gas ni absorbía ni cedía calor. Como en la expansión libre el gas no realiza trabajo alguno contra fuerzas exteriores, GAY-LUSSAC y JOULE indicaron que la energía interna del gas era independiente del volumen, en concordancia con la teoría cinética para el caso de un gas perfecto.

No obstante, experimentos posteriores de mayor sensibilidad demostraron que existe un intercambio de calor, si bien es demasiado pequeño para poderlo percibir en experimentos del tipo realizado por GAY-LUSSAC y JOULE (los baños utilizados en sus experimentos tenían capacidades caloríficas demasiado grandes). En otras palabras, la energía interna de un gas *depende* algo de su volumen. Si se mantiene constante la temperatura de un gas, en la mayoría de ellos se ve que la energía interna crece con el volumen. Análogamente, en la expansión libre no permanece constante la temperatura de un gas aislado térmicamente, sino que disminuye.

---

Otro experimento análogo, muy conocido, es el experimento de Joule-Thomson. Este experimento, representado en la figura 18-2, es una modificación del experimento de la expansión libre. El gas no se dilata ahora hacia una cámara vacía, sino hacia

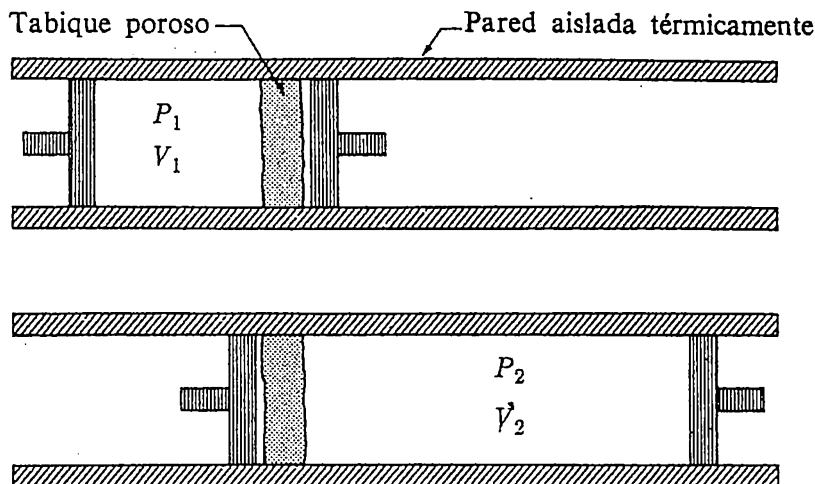


Fig. 18-2. Cuando se obliga al gas a la izquierda del tabique poroso a atravesar éste, se le lleva a una presión  $P_2$  y a ocupar un volumen mayor  $V_2$ . Esta expansión origina una disminución de la temperatura.

una cámara a presión constante  $P_2$ . Esta cámara está separada de otra cámara a presión elevada mediante un tabique poroso a través del cual circula el gas. En principio, las presiones a ambos lados del tabique se pueden mantener constantes mediante émbolos, según se indica en la figura.

El análisis de este experimento no lo vamos a realizar aquí, pero diremos que pone de manifiesto que si el gas fuera ideal no habría variación de temperatura en el tránsito de una a otra presión. En cambio, la experiencia indica una variación apreciable de la temperatura (disminución para la mayoría de los gases). Por ejemplo, cuando aire a la presión de 50 atm y temperatura de 20° C pasa a la presión de 1 atm, en el experimento descrito, su temperatura disminuye 11,7° C. La variación observada de la temperatura puede relacionarse con el hecho de depender la energía interna de la presión y el volumen.

El proceso descrito tiene una gran importancia práctica en la licuefacción de los gases. El gas a licuar se halla en un sistema cerrado. Después de haberlo enfriado por el proceso anterior, se le lleva a enfriar al gas que aún no ha sufrido dicho proceso y por medio de este proceso regenerativo llega a alcanzar temperaturas tan bajas que se puede licuar. Este procedimiento se debe a LINDE y HAMPSON (1895) y se ha empleado mucho para licuar el aire.

¿Cómo podemos comprender, por razonamientos cinéticos, la disminución de temperatura en la expansión libre de un gas? Si consideramos la energía interna de las moléculas como energía cinética solamente, no será posible, desde luego, interpretar dicho enfriamiento. En cambio, si suponemos que entre las moléculas se ejercen fuerzas atractivas que disminuyan continuamente al aumentar la distancia, las moléculas tendrán energía potencial además de cinética. Como al dilatarse el gas aumenta la separación entre las moléculas,

éstas deberán vencer sus fuerzas mutuamente atractivas y perderán energía cinética durante el proceso (pero ganarán, claro está, una cantidad igual de energía potencial). Cuando disminuye la energía cinética, lo mismo ocurre con la temperatura. Desde este punto de vista, el enfriamiento en la expansión libre de un gas es un resultado directo de las fuerzas atractivas intermoleculares.

Además del experimento de expansión libre, existen otras muchas propiedades de la materia que ponen de manifiesto la atracción entre moléculas, en forma aún más directa. El hecho de que las moléculas de un sólido se mantienen en posiciones medias fijas unas respecto a otras y que se requiera una fuerza considerable para separarlas, constituye la demostración más evidente de la acción de las fuerzas intermoleculares.

La influencia de las fuerzas atractivas intermoleculares depende de las magnitudes relativas de las energías medias cinética y potencial de las moléculas; cuanto más elevada sea la temperatura y menor la presión (o densidad), tanto menor será la importancia de las fuerzas moleculares y tanto mejor podrá describirse como de gas perfecto el comportamiento de un gas real. En cambio, si se enfría el gas por debajo de una cierta temperatura, con lo que la energía cinética resulta insignificante, la atracción molecular tenderá a agrupar las moléculas. Esto se halla de acuerdo con el comportamiento de un gas real, ya que sabemos que a temperaturas suficientemente bajas y presiones suficientemente elevadas se condensa pasando a líquido. En los apartados siguientes discutiremos algunos estudios experimentales de las relaciones entre la presión, el volumen y la temperatura de un gas y veremos cómo se pueden interpretar los efectos de las fuerzas moleculares y los tamaños finitos de las moléculas mediante una modificación de la ecuación de estado de los gases perfectos.

**18-2 Estudio experimental de un gas real.** Los estudios experimentales que vamos a tratar se refieren a la relación entre la presión y el volumen de un gas a temperatura constante. Estos experimentos son extensiones del experimento original de BOYLE (apart. 16-3) a un dominio más amplio de presiones y temperaturas. En la figura 18-3 se ha representado esquemáticamente una manera sencilla de obtener presiones elevadas. En este experimento, el gas en estudio se halla encerrado en un tubo de vidrio *A* cerrado por su extremo superior y abierto por el otro. La parte abierta se sumerge en una cámara de agua en la cual se pueden desarrollar presiones muy elevadas mediante un tornillo, según se indica. Se separa el gas del agua mediante una gota de mercurio. Evidentemente, la relación entre la presión y el volumen de este gas se puede comparar con la de un gas de referencia, por ejemplo, aire, agregando un segundo tubo de prueba con el gas de referencia en comunicación con la cámara de alta presión. Se comprimen ahora los gases a temperatura constante y se determinan los valores correspondientes del volumen y la presión.

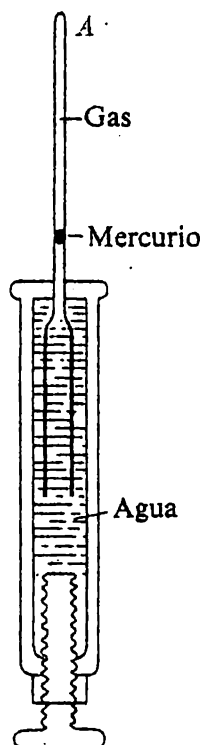


Fig. 18-3. Experimento de compresión isotérmica de un gas.

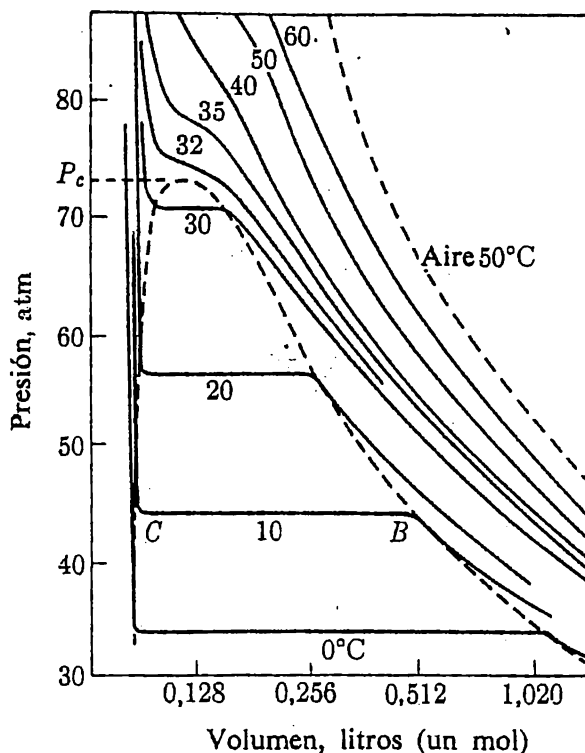


Fig. 18-4. Isothermas medidas del dióxido de carbono.

En la figura 18-4 puede verse un resultado tipo de esta clase de experimento, en el cual figuran las isothermas para el dióxido de carbono y para el aire. A temperaturas elevadas, las isothermas del aire casi coinciden con las curvas previstas por la teoría de los gases perfectos, mientras que el dióxido de carbono presenta divergencias considerables, en particular a temperaturas bajas. Por ejemplo, a la temperatura de 10°C y presión de unas 45 atm (punto *B* de fig. 18-4), el dióxido de carbono empieza a licuarse y parte del volumen del tubo es ocupado por líquido. Para disminuir aún más el volumen no se precisa ningún aumento de presión y la isoterma será una recta horizontal en el diagrama  $P-V$ . En el intervalo entre *B* y *C* puede observarse en el interior del tubo una superficie de separación entre el dióxido de carbono líquido y el gaseoso, pero al aproximarnos a *C* cada vez hay más volumen ocupado por el líquido y en *C* todo el volumen disponible está ocupado por el líquido. Para hacer disminuir aún más el volumen habrá que comprimir el dióxido de carbono líquido; dicha compresión exige presiones muy elevadas y la isoterma se transforma de una recta horizontal en una curva casi vertical.

Las isothermas presentan todas el mismo comportamiento general a temperaturas elevadas y todas contienen un tramo horizontal cuando están presentes simultáneamente gas y líquido. Sin embargo, este tramo se acorta al aumentar

la temperatura, hasta que a una temperatura de  $31^{\circ}\text{C}$  degenera en un punto en el cual los volúmenes del dióxido de carbono gaseoso y líquido son iguales. Las isothermas correspondientes a temperaturas superiores a  $31^{\circ}\text{C}$  no presentan tramo horizontal. El dióxido de carbono permanece en forma gaseosa cualquiera que sea su presión; ya no puede licuarse por compresión isotérmica. A temperaturas suficientemente elevadas, por ejemplo, por encima de los  $80^{\circ}\text{C}$ , las isothermas son muy parecidas a las de los gases perfectos.

TABLA 18-1. TEMPERATURAS, PRESIONES Y VOLÚMENES ESPECÍFICOS CRÍTICOS DE ALGUNOS GASES CONOCIDOS

Gas	Temperatura crítica $T_c$ , $^{\circ}\text{C}$	Presión crítica $P_c$ , atm	Volumen específico $v_c$ , $\text{cm}^3/\text{g}$
Helio	-267,9	2,25	15,4
Hidrógeno	-239,9	12,8	32,2
Argón	-122,4	48	1,88
Oxígeno	-118,8	49,7	2,32
Nitrógeno	-147,1	33,5	3,21
Dióxido de carbono	31	72,8	2,17
Amoníaco	132,2	112,3	4,24
Agua	374,2	218	
Mercurio	1460	1040	

Las isothermas del dióxido de carbono quedan, pues, divididas en dos grupos por la isoterma de  $31^{\circ}$ . A ésta se le da el nombre de isoterma crítica y a la temperatura correspondiente, el de *temperatura crítica*. La presión correspondiente al punto  $P$  de la figura 18-4, en que el volumen del gas es igual al del líquido, recibe el nombre de *punto crítico* y a la presión correspondiente se le llama *presión crítica*.

Los resultados que hemos presentado se refieren a un gas en particular, cual es el dióxido de carbono. Sin embargo, para todos los gases se obtienen isothermas análogas, siendo la diferencia esencial que cada gas tiene sus temperaturas y presiones críticas particulares. En la tabla 18-1 se consignan las temperaturas críticas, las presiones críticas y los correspondientes volúmenes específicos (volumen por gramo) críticos de algunos gases comunes.

Más allá de la temperatura crítica, la celeridad de una molécula es demasiado grande para que pueda convertirse en un blanco que quede captado permanentemente en el campo de fuerzas de otra molécula vecina, incluso en el caso en

que la presión del gas sea muy grande y la distancia media entre moléculas comparativamente pequeña.

Después de esta revista de los hechos experimentales acerca de la ecuación de estado de los gases, pasaremos a estudiar una ecuación de estado que intenta tener en cuenta las fuerzas intermoleculares así como el tamaño finito de las moléculas.

**18-3 Ecuación de estado de van der Waals.** En 1873, el físico holandés JOHANNES VAN DER WAALS (1837-1923) propuso en su tesis doctoral una ecuación de estado para los gases en la que se tenía en cuenta no sólo las fuerzas intermoleculares sino también el tamaño de las moléculas. Podemos comprender la esencia de dicha ecuación de estado con ayuda de los siguientes razonamientos.

En la ecuación de estado de los gases perfectos,  $PV = RT$ , que obtuvimos basándonos en la teoría cinética, despreciábamos el volumen propio de las moléculas y, por tanto, en esta ecuación,  $V$  es el volumen por el cual pueden moverse libremente dichas moléculas. En este modelo sencillo,  $V$  podría ser nulo. Si ahora quisiéramos tener en cuenta el volumen propio de las moléculas, el volumen de que dispondrían para moverse por él ya no sería  $V$  sino otro menor  $V - b$ , donde  $b$  es una medida del volumen que ocupan por sí mismas las moléculas. Podemos, pues, esperar que para tener en cuenta el volumen propio de las moléculas debamos sustituir  $V$  por  $V - b$  en esta ecuación de estado.

Además de esta corrección del volumen, también deberá haber una corrección de la presión. Esta corrección se debe a las fuerzas intermoleculares. En el interior de un gas, la fuerza que sobre una molécula ejercen las que la rodean es, por término medio, nula y no influirá sobre el movimiento medio de la molécula. En cambio, cuando una molécula se halle en las proximidades de los límites del gas se hallará atraída hacia el interior, ya que al otro lado del límite no hay moléculas que puedan atraerla.

Esta atracción hacia el interior ejercida sobre las moléculas que se hallan en los límites es normal a la superficie de contorno (la tracción *a lo largo* del contorno en un sentido siempre estará compensada por una tracción igual y de sentido contrario) y *equivale a una presión* ejercida por una pared (imaginaria). En otras palabras, las moléculas procedentes del interior del gas que se dirigen hacia los límites, reciben una cantidad de movimiento hacia el interior del gas.

Por tanto, por lo que respecta al movimiento de las moléculas, el efecto de las fuerzas intermoleculares puede describirse con ayuda de una presión equivalente que representaremos por  $\delta$ . Además de esta cesión de cantidad de movimiento, existe también otra cesión de cantidad de movimiento por parte de la pared verdadera que limita al gas. Esta cesión de cantidad de movimiento

es lo que medimos como presión  $P$  del gas. Así pues, podemos esperar que el movimiento de las moléculas en el interior de un gas real cuya presión es  $P$ , sea igual al movimiento en un gas perfecto a la presión  $P + \delta$ . En resumen, pues, esperamos que el gas real de volumen  $V$  y presión  $P$  se comporte como gas perfecto de volumen  $V - b$  y presión  $P + \delta$  y la relación entre  $P$  y  $V$  vendría, por tanto, dada por

$$(P + \delta)(V - b) = RT \quad (18-1)$$

La presión adicional  $\delta$  se puede relacionar con el volumen del gas de la manera siguiente. La fuerza intermolecular eficaz que se ejerce hacia el interior sobre una molécula muy próxima a los límites es proporcional al número de moléculas por unidad de volumen del gas; es decir,  $f = \text{const} \cdot n$ . La presión adicional eficaz es proporcional al producto de la fuerza eficaz sobre una molécula por el número de moléculas por unidad de superficie. Con la expresión «número de moléculas por unidad de superficie» queremos significar número por unidad de área dentro de una distancia al contorno muy pequeña, número que también es proporcional a  $n$ . En otras palabras, la presión adicional originada por las fuerzas atractivas intermoleculares es proporcional a  $n^2$ ,  $\delta \simeq \text{const} \cdot n^2$ . Si introducimos la expresión  $n = N/V$ , obtenemos

$$\delta = \frac{a}{V^2}$$

donde  $a$  es una constante. Si sustituimos esta expresión de  $\delta$  en la ecuación (18-1), obtenemos la ecuación de estado de VAN DER WAALS,

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \quad (18-2)$$

que puede escribirse en la forma

$$P = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2} \quad (18-3)$$

Si temperatura y volumen son suficientemente grandes, vemos que la ecuación (18-3) se reduce, pasando al límite, a la ley de los gases perfectos.

Las isothermas obtenidas de la ecuación de VAN DER WAALS tienen el siguiente carácter general (fig. 18-5). A temperaturas elevadas, las isothermas son muy parecidas a las de los gases perfectos. A temperaturas bajas, las isothermas de VAN DER WAALS difieren de las de los gases perfectos de manera en todo análoga a como lo hacen las curvas experimentales de la figura 18-4. Al disminuir aún más la temperatura, hallamos que en una región determinada la pendiente cambia de signo y cada isoterma presenta un máximo y un mínimo; en consecuencia,



a cada valor de la presión corresponderían tres valores posibles para el volumen (la ecuación de VAN DER WAALS es de tercer grado en  $V$ ). Este resultado no es real, pero a pesar de todo proporciona una interpretación interesante, según veremos después. La región que contiene los máximos y mínimos corresponde a la región de isothermas horizontales de la figura 18-4. Los máximos y mínimos de las isothermas se van aproximando más y más a medida que aumenta la temperatura, hasta confundirse en un punto. Este punto corresponde al punto crítico estudiado en el apartado anterior e indicado en la figura 18-4.

En este punto crítico la isoterma es horizontal y, además, es un punto de inflexión de la curva. Las constantes  $a$  y  $b$  de la ecuación de VAN DER WAALS se pueden expresar fácilmente en función del volumen  $V_c$ , la presión  $P_c$  y la temperatura  $T_c$  correspondientes a dicho punto crítico haciendo iguales a cero  $dP/dV$  y  $d^2P/dV^2$  (prob. 18-2). Obtenemos entonces

$$a = 3P_c V_c^2 = \frac{27}{64} R^2 \frac{T_c^2}{P_c}, \quad b = \frac{V_c}{3} = \frac{R}{8} \frac{T_c}{P_c} \quad (18-4)$$

Si sustituimos estos valores de  $a$  y  $b$  en la ecuación (18-2), encontramos que la

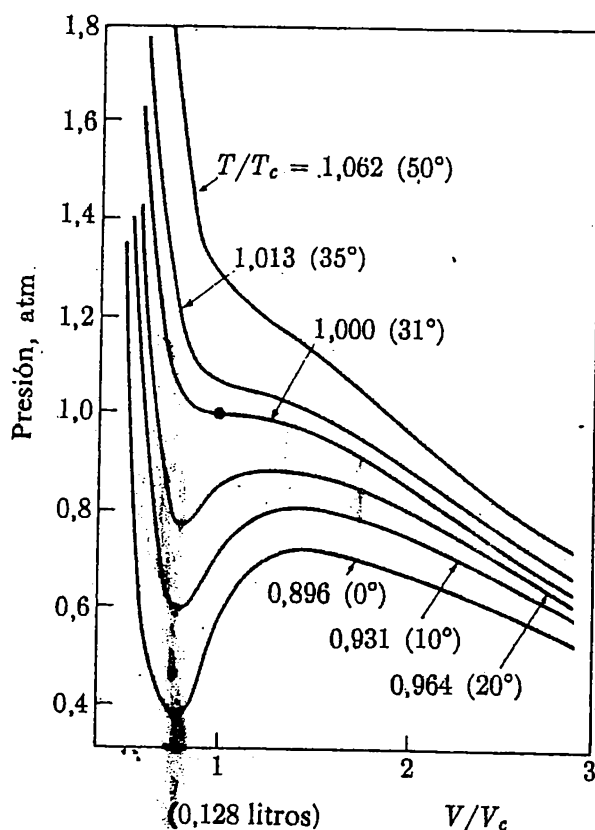


Fig. 18-5. Isothermas de van der Waals. Los números entre paréntesis se refieren al dióxido de carbono. (Compárese con fig. 18-4).

relación entre presión, volumen y temperatura *en el punto crítico* es

$$P_c V_c = \frac{3}{8} R T_c \quad (18-4a)$$

que representa una divergencia considerable respecto a la ley de los gases perfectos. En el punto crítico, la ley de los gases perfectos habría predicho una presión  $P = R T_c / V_c$ , que es  $8/3 = 2,7$  veces la presión de VAN DER WAALS.

Con los datos de la tabla 18-1, podemos ahora estimar los valores de las constantes  $a$  y  $b$  para diversos gases. Por ejemplo, para el dióxido de carbono tenemos  $P_c = 72,8$  atm y  $T_c = 31,0^\circ\text{C}$  ( $304^\circ\text{K}$ ); los valores correspondientes de  $a$  y  $b$ , según la ecuación (18-4) resultan ser  $a \simeq 3,5$  atm·litro<sup>2</sup> y  $b \simeq 0,042$  litros. Ambos valores se refieren a un mol de gas. Si empleamos en la ecuación de VAN DER WAALS estos valores numéricos, obtenemos las isothermas del dióxido de carbono indicadas en la figura 18-5. Comparemos éstas con las curvas experimentales de la figura 18-4. Según puede verse, la concordancia es totalmente satisfactoria, al menos cualitativamente, para temperaturas superiores a la crítica. En cambio, por debajo de esta temperatura tenemos una región en la cual la presión aumenta al aumentar el volumen.

Estudiemos esta región algo más detalladamente. Si partimos de volúmenes muy grandes y comprimimos el gas, la presión crece continuamente hasta alcanzar el punto  $P_1$  de la figura 18-6. La experiencia nos indica que en este punto el gas empieza a condensarse y la isoterma experimental se hace horizontal. En cambio, la isoterma de VAN DER WAALS indica que prosigue el aumento de la presión al continuar comprimiendo el gas, hasta alcanzar el punto  $P_2$ . Aun cuando la ecuación de VAN DER WAALS no sirve para describir el comportamiento del gas en esta región, no por ello pierde por completo su significado físico. Sabemos que un gas o vapor puede estar «sobresaturado» en un estado estable, en el cual la presión crece efectivamente al ir disminuyendo el volumen. La porción  $P_1 P_2$  de la curva de VAN DER WAALS puede interpretarse que representa un gas sobresaturado o sobreenfriado (los valores de  $P$  y  $V$  de la región  $P_1 P_2$  corresponden a isothermas de temperatura más elevada). Un vapor o gas sobreenfriado es inestable y puede condensarse a causa, por ejemplo, de sacudidas mecánicas. Análogamente, la región  $P_3 P_4$  puede interpretarse que representa un líquido sobrecalentado (inestable), ya que los estados del tramo  $P_3 P_4$  pertenecen en realidad a isothermas de temperaturas inferiores. La región intermedia  $P_2 P_3$ , de la ecuación de VAN DER WAALS representa claramente una condición muy inestable, ya que la presión disminuye al disminuir el volumen. Una situación de ese tipo llevaría a un colapso del gas.

Aun cuando la ecuación de VAN DER WAALS no constituye, ciertamente, una descripción completa de la ecuación de estado de un gas, contiene muchos

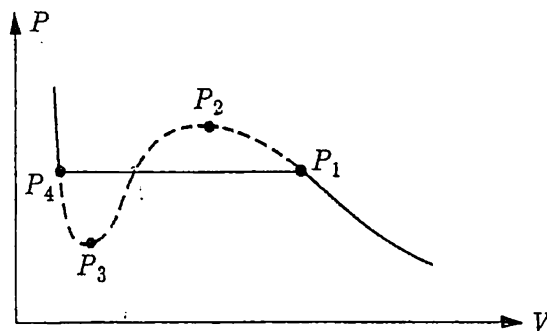


Fig. 18-6. Comparación entre las isotermas experimental y de van der Waals para el dióxido de carbono.

de los atributos esenciales inherentes al comportamiento de un gas real, especialmente si se interpreta de la manera descrita la región por debajo de la temperatura crítica. Supongamos que queremos trazar la porción horizontal de la isoterma de la figura 18-6, partiendo de la ecuación de VAN DER WAALS. Desde luego, será necesario saber cuando se hace inestable el gas, es decir, conocer la posición del punto  $P_1$ . La ecuación de VAN DER WAALS no da explícitamente esta posición, pero a partir de un análisis ulterior de las condiciones de equilibrio de un sistema termodinámico puede demostrarse que la porción horizontal de la isoterma debe situarse de manera que sean iguales las dos áreas limitadas por esta recta horizontal y la isoterma de VAN DER WAALS, según se indica en la figura.

Mucho de lo que hemos dicho acerca de la ecuación de VAN DER WAALS se refiere a un gas en particular. Sin embargo, la discusión es igualmente aplicable a un gas cualquiera. En efecto, si se mide la presión en función de la presión crítica y si se miden el volumen y la temperatura en función de los valores críticos, las isotermas de VAN DER WAALS resultan ser las mismas para todos los gases. Podemos ver esto inmediatamente sustituyendo los valores  $a$  y  $b$  de las ecuaciones (18-4) en la ecuación de VAN DER WAALS. Obtendremos entonces

$$\left(P_r + \frac{3}{V_r^2}\right)(V_r - \frac{1}{3}) = \frac{8}{3}T_r \quad (18-5)$$

donde  $P_r = P/P_c$ ,  $V_r = V/V_c$ , y  $T_r = T/T_c$  son los llamados valores reducidos de la presión, del volumen y de la temperatura. Según la ecuación (18-5), si dos gases diferentes tienen iguales temperaturas reducidas e iguales volúmenes reducidos, también deberán tener presiones reducidas iguales. A esta correspondencia se la conoce con el nombre de *ley de los estados correspondientes*. Las isotermas que corresponden a la ecuación normalizada de VAN DER WAALS (18-5) son las representadas en la figura 18-5.

**EJEMPLO.** Según la ecuación de van der Waals, ¿cuál es la presión de un mol de oxígeno a una temperatura doble que la crítica y a un volumen igual al volumen crítico?

Con  $T = 2T_c$  (es decir,  $T_r = 2$ ) y  $V = V_c$  (es decir,  $V_r = 1$ ), de la ecuación (18-5) obtenemos  $P_r = 5$  (es decir,  $P = 5P_c$ ). En la tabla 18-1 encontramos que la presión crítica del oxígeno es  $P_c = 49,7$  atm y la presión  $P$  es, pues,  $P = 5P_c = 248,5$  atm.

Si intentáramos calcular la presión basándonos en la ecuación de los gases perfectos, tomaríamos de la Tabla 18-1 el volumen crítico  $2,32$  cm<sup>3</sup>/g (en consecuencia  $2,32 \cdot 32$  cm<sup>3</sup>  $\simeq$  0,074 litros para un mol) y la temperatura crítica  $-118,8^\circ\text{C}$  ( $154,4^\circ\text{K}$ ). Por tanto, con  $T = 2 T_c = 308,8^\circ\text{K}$ , obtenemos

$$P = 0,082 \cdot \frac{308,8}{0,074} \simeq 340 \text{ atm}$$

Según vemos, incluso a temperaturas ordinarias, existe una gran diferencia entre la ecuación de los gases perfectos y la ecuación de van der Waals cuando las presiones son del orden de centenares de atmósferas.

**18-4 Vaporización.** En el apartado anterior se indicó que al comprimir un gas a una temperatura constante que sea inferior a la temperatura crítica, se llega a alcanzar un punto en el cual el gas empieza a licuarse (condensarse). Vamos a extender esta observación de la condensación al fenómeno inverso llamado vaporización.

En el proceso de la condensación isotérmica, partíamos de un cierto número de moléculas gaseosas y disminuíamos el volumen. A consecuencia de ello disminuía la separación de las moléculas hasta alcanzar un valor característico determinado tal que las fuerzas intermoleculares pudieran juntar las moléculas dando origen al estado líquido. Al condensarse parte de las moléculas, aumentaba la separación media entre las moléculas restantes (si se mantenía constante el volumen). Se detenía entonces la condensación, a menos que se siguiera disminuyendo el volumen de manera que se restableciera la separación crítica entre las moléculas. No era posible superar esta compresión crítica del gas, porque mientras existía la tendencia a aumentar la presión del gas pasaba una cierta cantidad de moléculas a la forma líquida. Entonces, al disminuir el volumen disminuía el número de moléculas del gas contenido en el recipiente (aumentando en la misma cantidad el número de moléculas del líquido), pero el *número de moléculas del gas por unidad de volumen* y en consecuencia la presión, permanecían invariables durante todo el proceso de condensación isotérmica.

El proceso de condensación es reversible. Si en vez de disminuir el volumen para obligar a pasar más moléculas al estado líquido, incrementamos el volumen, la separación media de las moléculas del gas que se halla sobre el líquido aumentará superando la separación crítica de condensación. Se detiene entonces la condensación y además se invierte el proceso; saldrán moléculas del lí-

quido hasta que se restablezca la presión del gas. A este proceso inverso se le da el nombre de *vaporización*. La vaporización de un líquido proseguirá hasta que la presión del vapor alcance el valor de equilibrio estudiado anteriormente (correspondiente a las isothermas horizontales de la fig. 18-4). A esta presión de equilibrio se le llama *presión de vapor saturante*. Una vez establecida ésta, existe equilibrio entre los estados líquido y gaseoso. Desde un punto de vista molecular, este estado de equilibrio se puede considerar como una situación en la cual la velocidad de condensación es igual a la de vaporización: el mismo número de moléculas atraviesan la superficie de separación en un sentido que en otro.

Cuando escapa una molécula de un líquido, su energía cinética disminuye a causa de que las fuerzas intermoleculares del líquido realizan un trabajo (negativo) sobre la molécula que escapa. Si la energía cinética de la molécula fuera demasiado pequeña, ésta no podría escapar. Al aumentar la temperatura, aumentará el número de moléculas rápidas en el líquido y, por tanto, se hará mayor el número de las que pueden superar la barrera de potencial creada por las fuerzas intermoleculares. Por tanto, la presión de vapor saturante crecerá con la temperatura. La manera en que la presión de vapor saturante depende de la temperatura varía de un gas (líquido) a otro. Esta dependencia de la temperatura puede determinarse directamente a partir de las porciones horizontales de las isothermas, según ya se vio en la figura 18-4 para el dióxido de carbono.

La presión de vapor saturante puede medirse de manera directa y sencilla, como se indica esquemáticamente en la figura 18-7. El dispositivo es el mismo que el del experimento de TORRICELLI (cap. 16). Se sumerge en una cubeta con mercurio el extremo abierto de un tubo de ensayo lleno de mercurio y cuando la columna barométrica se ajusta a la altura correspondiente a la presión exterior, en la parte superior del tubo se forma un vacío. Si por la parte inferior del tubo se introduce un líquido, subirá hasta colocarse sobre el mercurio. Entonces se vaporizará hasta que se alcance la presión de vapor saturante. A con-

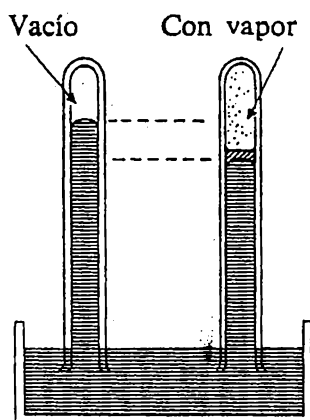


Fig. 18-7. Medida de la presión de vapor saturante con el tubo de Torricelli.

secuencia de ello disminuirá la altura de la columna de mercurio y midiendo esta disminución podremos determinar la presión del vapor saturante.

Es de especial interés la presión del vapor de agua saturante; en la tabla 18-2 se consigna su valor a diferentes temperaturas.

TABLA 18-2. PRESIÓN DEL VAPOR DE AGUA

<i>Temperatura, °C</i>	<i>Presión de vapor saturante, mm Hg</i>
0	4,6
20	17,5
40	55,3
60	149,4
80	355,1
100	760
200	11.665

La presión de vapor saturante de un líquido presenta la característica importante de ser independiente de la presencia de otros gases sobre el líquido (suponemos que no tienen lugar reacciones químicas). Por ejemplo, la presión de vapor saturante del agua es la misma tanto si sobre la superficie libre del agua hay aire como si no lo hay. La presión total del gas sobre el líquido será, pues, la suma de la presión de vapor del líquido más las presiones parciales de los gases presentes.

**EJEMPLO.** Un recipiente tiene un volumen de 2 litros y contiene 1 litro de agua. La presión es de 2 atmósferas. El resto del volumen está ocupado por nitrógeno y vapor de agua. La temperatura es 80° C. ¿Cuál es el cociente entre el número de moléculas de nitrógeno y de moléculas de vapor de agua en el recipiente?

La presión del vapor saturante del agua a 80° C es  $P_1 = 355,1$  mm Hg (tabla 18-2). La presión parcial del nitrógeno es, pues,  $P_2 = P_t - P_1$ , donde  $P_t = 2$  atmósferas. A igual volumen y temperatura, el cociente entre los números de moléculas de los dos gases no es mas que el cociente entre las presiones parciales:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{2 \cdot 760 - 355,1}{355,1} \simeq 3,3$$

donde hemos tomado 1 atmósfera igual a 760 mm Hg.

*Calor de vaporización.* Según ya mencionamos, para escapar del líquido y pasar al vapor, una molécula debe tener una energía cinética suficiente para

vencer el trabajo realizado por las fuerzas intermoleculares. Desde un punto de vista energético, las fuerzas intermoleculares constituyen, en realidad, una barrera de potencial que tiende a hacer regresar a las moléculas.

Al vaporizarse un líquido, pierde sus moléculas más energéticas y su temperatura disminuye. Si se elimina en forma continua el vapor que se halla sobre el líquido, o si es tan grande el volumen en el exterior del líquido que nunca se alcanza la presión de vapor saturante, el líquido se vaporizará continuamente. Para mantener constante la temperatura del líquido durante la vaporización, habrá que suministrar calor al líquido. El calor requerido para vaporizar un gramo de líquido recibe el nombre de *calor de vaporización*. El calor molar de vaporización, pues, puede interpretarse como el trabajo necesario para separar  $N$  moléculas ( $M$  gramos) unas de otras contra la acción de las fuerzas de enlace intermoleculares. Recordemos que el calor de vaporización del agua es 539 cal/g a 100°C. Para la mayoría de los líquidos, el calor de vaporización es del orden de 100 cal/g y depende de la temperatura.

Por observaciones cotidianas conocemos el proceso de enfriamiento de un líquido que se vaporiza. Un cuerpo húmedo se enfría al vaporizarse el agua y existe una gran diferencia en punto a bienestar entre un día húmedo a una temperatura y un día seco a la misma temperatura, originada en parte por la diferencia entre las velocidades de vaporización del sudor y el efecto refrigerante que la acompaña. Análogamente, quitando el vapor sobre una taza de café caliente se incrementa la velocidad de vaporización y se refuerza el enfriamiento.

**Ebullición.** Supongamos que en un líquido se forma una burbuja gaseosa. La presión en la burbuja es igual a la presión de vapor saturante del líquido. En general, esta presión es muy inferior a la presión del gas en el exterior del líquido, y la burbuja desaparece bajo la presión exterior. En cambio, cuando la temperatura es suficientemente elevada, la presión del vapor saturante se hace igual a la presión que se ejerce sobre el líquido y se hará posible la formación de burbujas. Así pues, la vaporización del líquido tendrá lugar no sólo en la superficie del líquido, sino en todo su volumen; el líquido *hierve*. En otras palabras, la ebullición se produce cuando la presión de vapor saturante es igual a la presión en el líquido. En las capas líquidas que no sean demasiado profundas, la presión interior es igual a la presión exterior. La temperatura requerida para hacer igual a una atmósfera la presión del vapor de agua saturante es, según sabemos, 100°C, que es la temperatura de ebullición del agua a una atmósfera (tabla 18-2). En las partes inferiores de un líquido, la presión es algo mayor que la atmosférica y la temperatura será algo mayor que 100°C. Por tanto, una burbuja que se forme en la parte inferior de un líquido tiene una presión de vapor saturante algo más elevada que la atmosférica y la temperatura será algo mayor que 100°C. Por tanto, una burbuja formada en la parte inferior de un líquido tiene una presión de vapor mayor que la atmosférica y se dilata

al ir subiendo hacia la parte superior. Si se reduce la presión exterior, se reducirá la temperatura de ebullición del líquido. Por ejemplo, a una presión de  $1/2$  atmósfera la temperatura de ebullición del agua es de unos  $82^{\circ}\text{C}$ , mientras que a una presión de 2 atmósferas es de unos  $112^{\circ}\text{C}$ .

**18-5 Propiedades elásticas de los sólidos. Red cristalina.** En el estado líquido, las moléculas se hallan relativamente agrupadas, pero, a pesar de todo, pueden moverse libremente unas respecto a otras. Este comportamiento no es diferente del de las moléculas de un gas. En cambio en los sólidos las moléculas están fijas unas respecto a otras ocupando posiciones determinadas. En un sólido cristalino, los átomos se hallan distribuidos por todo el sólido de manera ordenada y repetitiva, formando una *red tridimensional* de átomos. El cloruro sódico constituye un ejemplo sencillo; en la figura 18-8 puede verse su estructura, llamada *red cúbica simple*. Si es  $d$  la distancia que separa dos átomos contiguos de dicha red, el volumen por átomo es  $d^3$  y la densidad media del material es

$$\rho = \frac{m}{d^3} = \frac{M}{N_0 d^3} \quad (18-6)$$

donde  $m$  es la masa de un átomo,  $M$  la masa molecular y  $N_0$  el número de AVOGADRO.

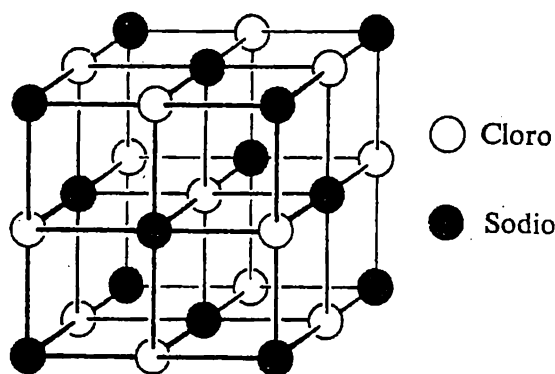


Fig. 18-8. Cristal de  $\text{ClNa}$ .

**EJEMPLO.** El cobre, que tiene una red cúbica simple, tiene una densidad de  $8,90 \text{ g/cm}^3$  y una masa atómica de 63,5. Estimar la constante  $d$  de la red.

Del número de Avogadro  $N_0 = 6,02 \cdot 10^{23}$  y de  $d = M/\rho N_0$ , obtenemos

$$d = \left( \frac{63,5}{6,02 \cdot 10^{23} \cdot 8,9} \right)^{1/3} \simeq 2,3 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$$

**El módulo de Young y las fuerzas interatómicas.** Un sólido no es completamente rígido, sino que las fuerzas exteriores pueden deformarlo algo. Al de-



formarse el sólido, varían las separaciones entre átomos. En el estudio de los gases y de los líquidos, observábamos que los átomos y moléculas se atraían a distancias relativamente grandes, pero esta atracción no puede existir a distancias arbitrariamente pequeñas, pues la materia desaparecería. En su lugar, a pequeñas distancias la fuerza debe ser repulsiva, según se ilustra en la figura 18-9 (véase también el cap. 8). En la figura, la posición de  $r_0$  corresponde a la posición de equilibrio del átomo. Para desplazamientos  $x$  suficientemente pequeños a partir de  $r_0$  la fuerza restauradora será proporcional al desplazamiento  $x$  y tendremos la conocida ley para la fuerza

$$F = -Kx$$

Intentemos ahora expresar la constante molecular  $K$  en función de medidas de la constante de resorte del sólido en conjunto. Si realizamos experimentos con el sólido, hallamos que la fuerza necesaria para alargar  $\Delta L$  una barra uniforme es proporcional al área  $A$  de la sección recta de la barra e inversamente proporcional a su longitud  $L$ :

$$F = YA \frac{\Delta L}{L} \quad (18-7)$$

La constante de proporcionalidad  $Y$  recibe el nombre de *módulo de Young*. La fuerza por unidad de superficie  $\sigma = F/A$  recibe el nombre de *esfuerzo* de la barra y la variación relativa de longitud de la barra  $\epsilon = \Delta L/L$ , se llama *deformación*. La ecuación (18-7) puede escribirse en función de  $\sigma$  y  $\epsilon$ , en la forma

$$\sigma = Y\epsilon \quad (18-8)$$

es decir, el esfuerzo es proporcional a la deformación. Esta relación es válida tanto para valores positivos como negativos de  $\sigma$ , es decir, tanto para fuerzas tensoras como compresoras.

En la tabla 18-3 se consignan los módulos de Young de algunos sólidos conocidos. Obsérvese que para la mayor parte de metales esta constante es del orden de  $10^{12}$  dynas/cm<sup>2</sup>.

**EJEMPLO.** Se suspende una barra uniforme de acero de sección recta  $A$  y longitud  $L = 1$  m de manera que penda verticalmente (fig. 18-10). ¿Cuál es el esfuerzo en el punto medio de la barra?

En primer lugar, aislemos la mitad inferior de la barra. Hallamos que sobre ella se ejercen dos fuerzas: la de la gravedad y el esfuerzo en su plano superior. Representando este esfuerzo por  $\sigma$  la fuerza sobre el plano será  $A\sigma$ . El peso de la mitad inferior de la barra será  $p = AL\rho g/2$  y la condición de equilibrio es entonces

$$A\sigma = \frac{AL\rho g}{2} \quad \text{o sea} \quad \sigma = \frac{L\rho g}{2}$$

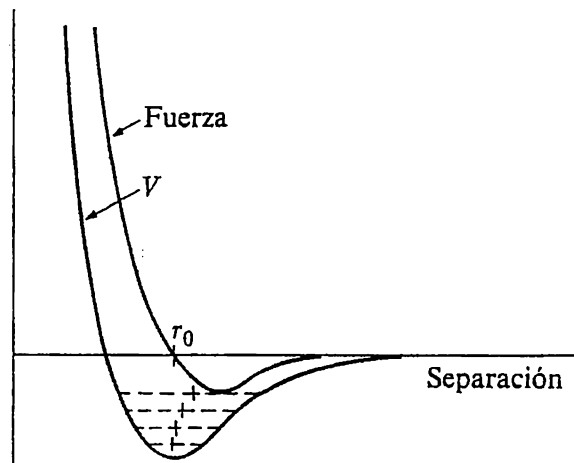


Fig. 18-9. Fuerza y energía potencial en función de la separación de dos átomos de un cristal.

TABLA 18-3. MÓDULO DE YOUNG DE ALGUNOS SÓLIDOS

<i>Sustancia</i>	<i>Módulo de Young, dynas/cm<sup>2</sup></i>	<i>Densidad <math>\rho</math>, g/cm<sup>3</sup></i>	<i>Masa atómica</i>
Aluminio (fundido)	$6,0 \cdot 10^{11}$	2,702	26,98
Latón (laminado en frío)	9,0	8,80	
Cobre	12	8,92	63,54
Oro	7,8	19,32	197,2
Hierro (fundido)	8 a 9	7,86	55,85
Hierro (batido)	18 a 20		
Plomo (laminado)	1,5	11,34	207,2
Níquel	20 a 21	8,90	58,69
Acero (1 % C)	20	7,83	
Estaño	4	7,31	118,70
Wolframio	35	19,3	183,92

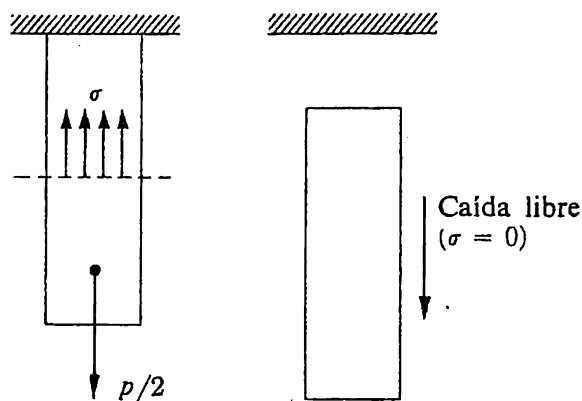


Figura 18-10

Expresado numéricamente, este valor es

$$\sigma = \frac{100 \cdot 7,8 \cdot 981}{2} \simeq 3,8 \cdot 10^5 \text{ dynas/cm}^2$$

donde hemos empleado  $\rho = 7,8 \text{ g/cm}^3$  para la densidad de la barra. El esfuerzo en el punto medio de la barra será pues

$$\epsilon = \frac{\sigma}{Y} \simeq \frac{3,8 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^{12}} \simeq 1,9 \cdot 10^{-7}$$

Supongamos que ahora se suelta la barra de su soporte y cae libremente. ¿Cuál será entonces el esfuerzo en el punto medio de la barra?

Si estudiamos la barra en un sistema de coordenadas que se acelere con la barra, puede verse que todas las porciones de la barra se hallan en equilibrio bajo la acción de las fuerzas de la gravedad y de inercia. Entonces el esfuerzo en cada porción de barra es nulo.

Podemos ahora relacionar el módulo de Young con la constante  $K$  de la fuerza intermolecular de la manera siguiente. La barra considerada, de longitud  $L$  y sección  $A$ , puede considerarse como un conjunto de «cuerdas» o «cadenas» atómicas, cada una de las cuales contiene  $L/d$  átomos, según se indica en la figura 18-11. Dichas cadenas son paralelas y están separadas una distancia  $d$  y el área ocupada por cada cadena será, pues,  $d^2$ . Por tanto, hay  $A/d^2$  cadenas paralelas en la barra. Si al área  $A$  se aplica uniformemente una fuerza  $F$ , sobre cada cadena se ejercerá una fuerza  $Fd^2/A$  que tiende a separar dos átomos adyacentes cualesquiera de la cadena. Si, en consecuencia, aumenta en  $x$  la distancia entre dos átomos adyacentes, la elongación total de la barra es  $(L/d)x = \Delta L$ . De las definiciones de la constante de la fuerza y del módulo de Young, se deduce que

$$\frac{F}{A} = Y \frac{\Delta L}{L}$$

y el alargamiento relativo de la barra podrá, desde luego, expresarse en la forma  $\Delta L/L = x/d$ . De la definición de la constante  $K$  de fuerza atómica tendremos, pues,  $Fd^2/A = Kx$ , y de la definición de módulo de Young tenemos  $F/A = Y(\Delta L/L) = Y(x/d)$ . De estas dos relaciones obtenemos la relación entre  $K$  e  $Y$ :

$$K = Yd$$

Si tomamos como valores típicos de  $Y$  y  $d$ ,  $10^{12}$  dynas/cm y  $10^{-8}$  cm, vemos que la constante de la fuerza atómica  $K$  es del orden de  $10^4$  dynas/cm.

Si se desplaza el átomo de su posición de equilibrio, podemos esperar que realice oscilaciones armónicas simples de frecuencia

$$2\pi f_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

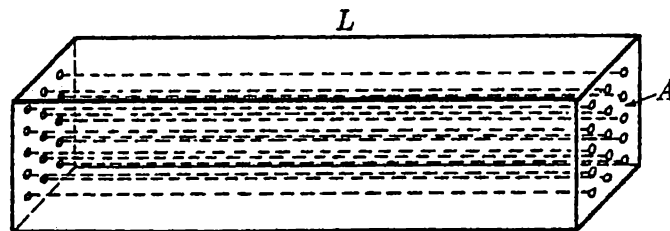


Fig. 18-11. Una barra maciza puede considerarse como un mazo de cadenas atómicas.

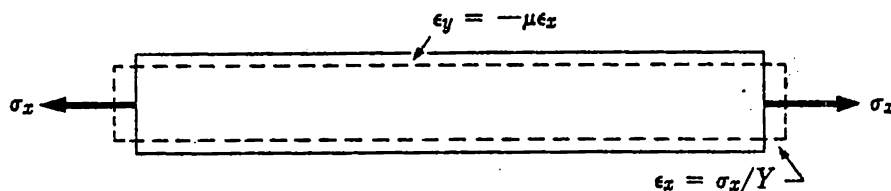


Fig. 18-12. Un esfuerzo  $\sigma_x$  en la dirección  $x$  produce una deformación  $-\mu\sigma_x/Y$  en la dirección transversal.

donde  $m$  es la masa del átomo. Si sustituimos  $K \simeq 10^4$  dynas/cm y  $m \simeq 10^{-23}$  g, obtenemos una frecuencia de oscilación del orden de  $10^{13}$  Hz.

*Otras propiedades elásticas.* En el estudio anterior acerca de los esfuerzos y las deformaciones obtenidos mediante un simple alargamiento o compresión de un sólido, se suponía tácitamente que tratábamos de una deformación estrictamente unidimensional del sólido. Sin embargo, todos hemos observado que al estirar una goma, por ejemplo, su espesor disminuye en la dirección perpendicular a la del alargamiento, según se indica en la figura 18-12. Inversamente, cuando se comprime una goma, aumenta su espesor. Esta contracción o dilatación transversal se presenta con mayor o menor importancia en todos los sólidos, si bien es particularmente apreciable en sustancias como la goma.

Para describir cuantitativamente este efecto consideraremos de nuevo una barra de sección rectangular y tomaremos el eje  $x$  según su longitud, tal como se indica en la figura 18-12. En la dirección  $x$  se aplica un esfuerzo  $\sigma_x$  y se obtiene una deformación  $\epsilon_x = \sigma_x/Y$  como antes. Además de esta deformación, también encontramos deformaciones (es decir, variaciones relativas de las dimensiones lineales de la barra) en las direcciones  $y$  y  $z$ , siendo aquéllas proporcionales a la deformación en la dirección  $x$ . Es decir,

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\mu\epsilon_x = -\mu \frac{\sigma_x}{Y} \quad (18-9)$$

donde el signo menos indica que un alargamiento según  $x$  produce una contracción en las direcciones transversales. La constante de proporcionalidad  $\mu$ , lla-

mada frecuentemente *coeficiente de Poisson*, es del orden de 0,2 a 0,3 para la mayoría de los sólidos.

Debemos indicar que el módulo de elasticidad  $Y$  es el cociente entre esfuerzo y deformación sólo en el caso en que no haya esfuerzo alguno según las direcciones perpendiculares a  $x$ , es decir, cuando la barra puede contraerse o pandearse libremente. Si se sujetan las caras laterales de la barra evitando así que puedan moverse, al estirar o comprimir la barra en la dirección  $x$  aparecerá un esfuerzo en las direcciones transversales (ejes  $y$  y  $z$ ). Inversamente, si además de  $\sigma_x$ , se aplican esfuerzos transversales, la barra variará su longitud no sólo a consecuencia de  $\sigma_x$  sino también de los efectos de contracción originados por los esfuerzos según las direcciones transversales. Si es  $\sigma_y$  el esfuerzo en la dirección  $y$ , y  $\sigma_z$ , el esfuerzo en la dirección  $z$ , las deformaciones (contracciones) correspondientes según la dirección  $x$  serán  $-\mu\sigma_y/Y$  y  $-\mu\sigma_z/Y$ , de acuerdo con la ecuación (18-9). Por tanto, por superposición lineal, la deformación total resultante de los esfuerzos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ , y  $\sigma_z$  será  $\epsilon_x = \sigma_x/Y - \mu\sigma_y/Y - \mu\sigma_z/Y$ . A las deformaciones según los ejes  $y$  y  $z$  serán aplicables expresiones análogas y podremos expresar la relación completa entre esfuerzo y deformación de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{Y} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{Y} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{Y} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned}\tag{18-10}$$

EJEMPLO. Una barra, sujeta por su superficie lateral de manera que no pueda contraerse ni dilatarse en las direcciones  $y$  y  $z$ , se estira en la dirección  $x$  aplicándole un esfuerzo en la dirección  $x$ . ¿Cuál es el esfuerzo necesario para producirle una deformación  $\epsilon_x$  en la dirección  $x$ ?

Como está sujeta la superficie lateral de la barra, tenemos  $\epsilon_y = \epsilon_z = 0$ . Las ecuaciones (18-10) se reducen a

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{Y} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \epsilon_y = 0 &= \frac{1}{Y} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \epsilon_z = 0 &= \frac{1}{Y} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned}$$

Despejando  $\sigma_x$  se tiene

$$\sigma_x = Y\epsilon_x \frac{1 - \mu}{1 - \mu - 2\mu^2} = Y\epsilon_x \frac{1 - \mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}\tag{18-11}$$

Esta relación indica que la rigidez, o módulo elástico equivalente, en este tipo de alargamiento es superior a  $Y$  en un factor  $(1 - \mu)/(1 + \mu) (1 - 2\mu)$ . Además, es interesante observar que existe un límite superior  $\mu = 0,5$  para el coeficiente de Poisson. Según la ecuación (18-11), una sustancia con  $\mu = 0,5$  tendría una rigidez infinita en la dirección  $x$ .

En las deformaciones descritas hasta ahora, variaban las distancias entre moléculas. Existe otro tipo de deformación, llamada cizalladura o cortadura, en la cual las distancias relativas entre moléculas adyacentes permanecen aproximadamente constantes. En este tipo de deformación, un plano de átomos se desplaza en una dirección paralela al plano, según se indica en la figura 18-13. El desplazamiento relativo, o deformación en este caso, se define como cociente entre el desplazamiento del plano respecto al plano inmediato y la separación entre dichos planos, es decir,  $\epsilon_y = \Delta y/d$ , donde  $\Delta y$  y  $d$  están representadas en la figura. Para valores pequeños de la deformación tenemos  $\epsilon_c = \theta$ , donde  $\theta$  es el desplazamiento angular de los dos planos. Al igual que el esfuerzo normal  $\sigma_x$  es proporcional a la deformación normal  $\epsilon_x$  la experiencia indica que el esfuerzo cortante (o de cizalladura) necesario para producir una deformación

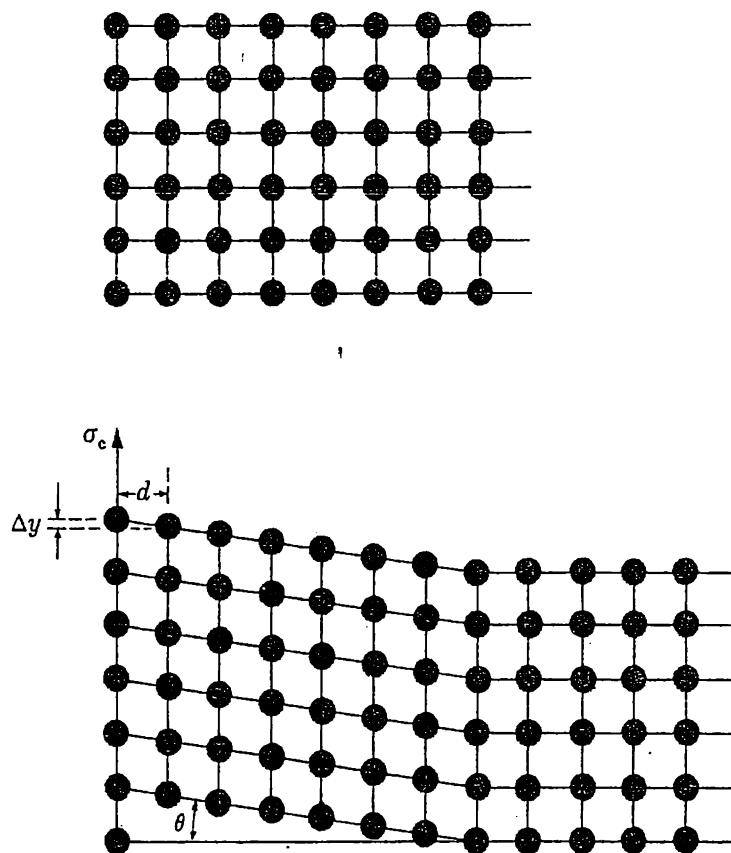


Fig. 18-13. Un esfuerzo cortante  $\sigma_c$  origina una deformación de cizalladura  $\Delta y/d \simeq \theta$  aproximadamente proporcional a  $\sigma_c$ .

de cizalladura  $\epsilon_c$  es directamente proporcional a  $\epsilon_c$  para valores pequeños de  $\epsilon_c$ . Tenemos

$$\sigma_c = S\epsilon_c \simeq S\theta$$

La constante de proporcionalidad  $S$  recibe el nombre de módulo de cizalladura, de cortadura y también de rigidez, del sólido. Puede demostrarse (prob. 18-17) que  $S$  está relacionado con el módulo de Young  $Y$  y con el coeficiente de Poisson  $\mu$  mediante la ecuación

$$S = \frac{Y}{2(1 + \mu)} \quad (18-12)$$

**18-6 Calor específico de los sólidos.** Hace unos 100 años, DULONG y PETIT midieron el calor específico de algunos sólidos y observaron que el producto del calor específico por la masa atómica era aproximadamente el mismo para un gran número de elementos, por lo menos a temperaturas ordinarias. Este producto, el calor específico molar al que hicimos referencia en el capítulo 14, resultó ser aproximadamente igual a 6 calorías/mol. $^{\circ}$ C (ley de Dulong y Petit). En la tabla 18-4 se consignan los calores específicos molares de algunos sólidos medidos a una temperatura de unos 300 $^{\circ}$ K. Todas las medidas son compatibles con la ley de Dulong y Petit.

El resultado obtenido por DULONG y PETIT admite una explicación sencilla con auxilio de la teoría cinética. Cada átomo del sólido se supone que se halla en movimiento (térmico) y, según hemos visto, este movimiento es una oscilación en torno a una posición de equilibrio, con una frecuencia del orden de  $10^{13}$  Hz. Cada átomo puede oscilar libremente en una dirección cualquiera; tiene tres grados de libertad independientes. Si suponemos que el principio de equipartición de la energía (cap. 16) también es válido en este caso, la energía cinética por grado de libertad es  $kT/2$  y la energía cinética media total de un átomo será  $3kT/2$ . Además de la energía cinética del oscilador armónico, también hay energía potencial que, por término medio, es igual a la energía

TABLA 18-4. CALORES ESPECÍFICOS MOLARES DE ALGUNOS SÓLIDOS

Elemento	Masa atómica	Calor específico cal/g. $^{\circ}$ C	Calor específico molar, cal/mol. $^{\circ}$ C
Aluminio	27	0,208	5,6
Hierro	56	0,104	5,8
Mercurio	200	0,033	6,6
Plata	108	0,056	6,1
Plomo	207	0,030	6,2

cinética. En consecuencia, la energía total por átomo deberá ser  $3kT/2 + 3kT/2 = 6kT/2$ . Si multiplicamos esta cantidad por el número de Avogadro  $N_0$ , obtenemos la energía por mol,  $6N_0kT/2 = 3RT$ . El calor específico molar correspondiente será, pues,

$$C = 3R \simeq 6 \text{ cal/mol} \cdot ^\circ\text{C}$$

Ya hemos dicho que este valor del calor específico molar concuerda satisfactoriamente con las medidas tomadas sobre un gran número de sustancias, en apoyo de las ideas desarrolladas en la teoría cinética de los gases. No obstante, medidas realizadas en dominios más extensos, particularmente a temperaturas bajas, han revelado divergencias considerables respecto a la ley de Dulong y Petit (véase la fig. 18-14). A temperaturas muy bajas, el calor específico es proporcional al cubo de la temperatura y por tanto tiende a cero al tender la temperatura al cero absoluto.

La divergencia respecto al valor de  $6 \text{ cal/mol} \cdot ^\circ\text{C}$  del calor específico de los sólidos que se produce a temperaturas bajas, el problema general de la radiación del cuerpo negro, los espectros de emisión y absorción de los elementos y el efecto fotoeléctrico, se cuentan entre los fenómenos que no tienen explicación satisfactoria con arreglo a la Física clásica o de Newton. En realidad, fue principalmente el estudio de esos fenómenos por parte de PLANCK, BOHR y EINSTEIN lo que echó los cimientos sobre los que se edificó la teoría cuántica a principios de este siglo. La aplicación por DEBYE de la teoría cuántica al cálculo

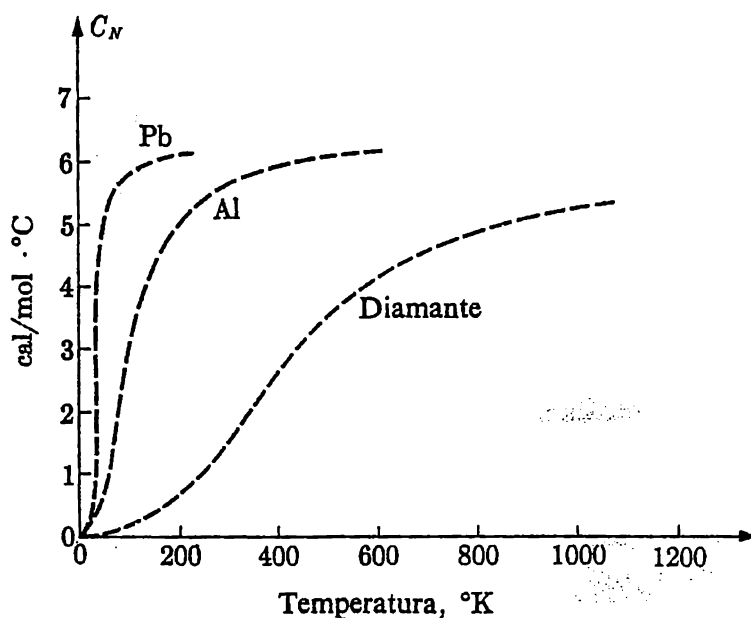


Fig. 18-14. Cómo dependen de la temperatura los calores específicos de los sólidos.



lo de los calores específicos de los sólidos dio resultados totalmente concordantes con los resultados experimentales a todas las temperaturas.

**18-7 Dilatación térmica.** Ya hemos visto que, en general, la materia se dilata al aumentar la temperatura. En la figura 18-9 se da una explicación cualitativa de la dilatación térmica de un sólido a partir de las vibraciones moleculares y de la asimetría de la curva de energía potencial interatómica. En dicha figura se presenta la separación de equilibrio de los átomos en función de la amplitud de vibración. Vamos a citar ahora algunos hechos relativos a la magnitud de esta dilatación para algunas sustancias comunes. La variación relativa de la dimensión lineal  $L$  de un sólido recibe el nombre de coeficiente de dilatación lineal  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{1}{L} \frac{dL}{dT} \quad (18-14)$$

Este coeficiente suele ser prácticamente constante en un dominio considerable de temperaturas y si se toma como longitud de referencia la longitud  $L_0$  a  $0^\circ\text{C}$ , la longitud a una temperatura  $T$  será

$$L = L_0(1 + \alpha T)$$

En la tabla 18-5 se consignan valores de  $\alpha$  para algunas sustancias comunes.

TABLA 18-5. COEFICIENTES DE DILATACIÓN LINEAL DE ALGUNAS SUSTANCIAS COMUNES

Sustancia	$\alpha \cdot 10^6, ^\circ\text{C}^{-1}$	Dominio de temperaturas
Aluminio	24,0	20-100°C
Latón	19,0	0-100°C
Carbono, diamante	1,18	40°C
Calcita, paralelo al eje	25,1	0-85°C
perpendicular al eje	-5,58	0-85°C
Cobre	16,8	25-100°C
Vidrio, blando	8,5	0-100°C
Hierro	11,5	0-100°C
Hierro, acero	29	más de 900°C
Mercurio	42	$\sim 0^\circ\text{C}$
Madera de roble, paralelo a la fibra	4,92	2-34°C
perpendicular a la fibra	54	2-34°C

## PROBLEMAS

18-1. Explicar cualitativamente por qué la ley de los gases perfectos predice una presión más elevada que la medida en un gas real a una temperatura y volumen dados.

18-2. Deducir los resultados presentados en las ecuaciones (18-4) y (18-4a).

18-3. ¿Qué significamos al decir ley de los «estados correspondientes» para gases reales?

18-4. ¿Cuál es el volumen crítico de 1 g de dióxido de carbono? ¿Cuál es entonces la separación media de las moléculas de este gas?

18-5. La presión crítica del  $\text{CO}_2$  es 73 atm y la temperatura crítica  $31^\circ\text{C}$ . (a) ¿A qué temperatura es la presión de este gas doble que la presión crítica, cuando el volumen es el volumen crítico? (b) ¿Cuál es la temperatura correspondiente del oxígeno, cuando la presión de éste sea doble que su presión crítica? (Utilícese la tabla 18-1.)

18-6. Dése una explicación cualitativa, en función del movimiento molecular, de por qué la presión de vapor saturante aumenta con la temperatura.

18-7. La humedad relativa del aire es el cociente entre el número verdadero de moléculas de agua existentes en el aire y el número de dichas moléculas que habría si el aire estuviera saturado a la temperatura en cuestión. Supóngase que tenemos una humedad del 80 % en un día en que la temperatura es  $20^\circ\text{C}$  y 50 % un día en que la temperatura es  $40^\circ\text{C}$ . ¿En cuál de los dos días hay mayor número de moléculas de agua por unidad de volumen del aire?

18-8. El calor de vaporización del agua es 539 cal/g. Hágase una estimación aproximada del orden de magnitud de

la energía de enlace entre dos moléculas de agua. (La energía de enlace es la energía necesaria para separar las moléculas.)

18-9. Explíquese por qué un incremento de la presión eleva la temperatura de ebullición. Trácese una gráfica de la temperatura de ebullición del agua en función de la presión (en mm Hg). (*Sugerencia:* Véase la tabla 18-2.)

18-10. Un trapo húmedo ¿se secará antes en una cámara de vacío bombeada continuamente o en un lugar tal como el desierto, donde la humedad relativa es prácticamente nula? Razonar la respuesta.

18-11. Una barra uniforme de acero (longitud  $L$ , área de la sección recta  $A$ , densidad  $\rho$ , módulo de YOUNG  $Y$ ) se halla sobre un plano horizontal exento de rozamiento y se tira de ella de manera que su aceleración  $a_0$  sea constante (fig. 18-15). (a) ¿Cuál es el esfuerzo en el centro de la barra? (b) ¿Cuál es el alargamiento total de la barra a consecuencia de la aceleración? (c) Dar respuestas numéricas a (a) y (b) utilizando los valores  $a_0 = 100\text{ m/s}^2$ ,  $A = 2\text{ cm}^2$ ,  $\rho = 7,8\text{ g/cm}^3$ ,  $L = 1\text{ m}$  e  $Y = 10^{12}\text{ dynas/cm}^2$ .



Figura 18-15

18-12. Una barra uniforme de acero tiene una sección de  $1\text{ cm}^2$ . (a) Estimar el número de «cuerdas» atómicas que terminan en este área. (b) Estimar la «tensión» en una de estas cuerdas atómicas cuando el esfuerzo de la barra es  $10^9\text{ dynas/cm}^2$ . (Véase fig. 18-11).

18-13. Un disco circular uniforme

de radio  $R$  gira alrededor de su eje con velocidad angular  $\omega$ . El espesor del disco es  $e$  y su densidad  $\rho$ . El radio del árbol es  $r_0$ . Determinar el esfuerzo en el disco en función de la coordenada radial  $r$ .

18-14. Con el fin de obtener un esfuerzo uniforme (es decir, un esfuerzo independiente de  $r$ ) en el disco giratorio del problema 18-13, el espesor  $e$  debe variar con  $r$ . Estudiar cualitativamente esta variación.

18-15 (a). Estimar la distancia entre átomos en el hierro. (b) A partir del módulo de Young (Tabla 18-3), estimar la constante de resorte interatómica y determinar la frecuencia de oscilación característica de los átomos. (c) Estimar la amplitud de oscilación a la temperatura de  $27^\circ\text{C}$ . (d) ¿A qué temperatura sería la amplitud de oscilación la décima parte de la distancia interatómica, determinada a partir de la teoría del oscilador lineal? Comparar esta temperatura con el punto de fusión del hielo.

18-16. Deducir la relación (18-10) del texto.

18-17. La compresibilidad de un sólido se define como la variación relativa de volumen por unidad de presión:

$$\kappa = -(1/V)(dV/dP)$$

Haciendo  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -P$  en la ecuación (18-10), obtener una expresión de la compresibilidad de un sólido en función de  $Y$  y  $\mu$ .

18-18. Deducir la relación entre el módulo de YOUNG  $Y$ , el módulo de rigidez  $S$  y el coeficiente de Poisson  $\mu$ ; es decir,  $S = Y/2(1 + \mu)$ . Considerar a tal fin, un cubo sólido de arista unidad y con un esfuerzo en la dirección  $y$  igual a  $\sigma$ . A consecuencia de este esfuerzo, el cubo se deforma convirtiéndose en un paralelepípedo, según se indica en la figura 18-16. (a) ¿Cuál será ahora la longitud en la dirección  $y$ ? (b) ¿Cuál es ahora la longitud en la dirección  $x$ ? (c) Considerar, a continuación, el cubo inscrito indicado en la figura. Demostrar que a consecuencia del alargamiento en la dirección  $y$  la pendiente de las aristas de este cubo varía un ángulo  $\theta \simeq (\sigma/Y)(1 + \mu)/2$  para valores pequeños de  $\sigma/Y$ . (d) Demostrar que la componente tangencial del esfuerzo sobre la cara del cubo inscrito es  $\sigma/4$ . (e) A partir de la definición de módulo de rigidez, expresar  $\theta$  en función de  $S$  y demostrar que  $S = Y/2(1 + \mu)$ .

18-19. Por debajo de una cierta temperatura llamada *temperatura de Debye*, el calor específico de un sólido

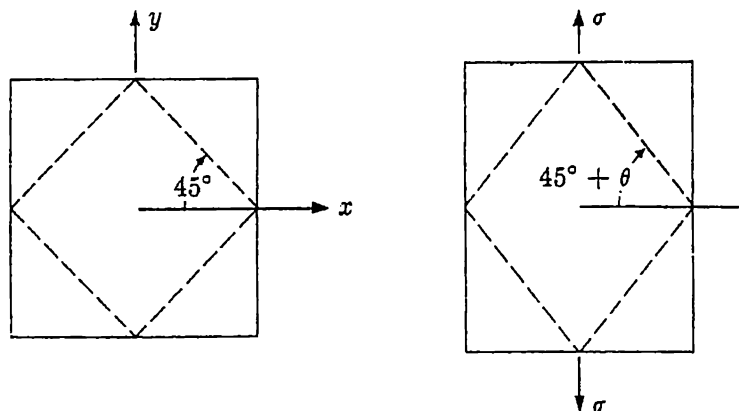


Figura 18-16

es proporcional al cubo de la temperatura, es decir,

$$C_v = K \left( \frac{T}{\theta_d} \right)^3 \quad (K = \text{const})$$

donde  $\theta_d$  es la temperatura de DEBYE (del orden de  $200^\circ \text{C}$  para muchos metales). Determinar el calor requerido para incrementar la temperatura de un mol de un sólido de  $0,1 \theta_d$  a  $0,2 \theta_d$ .

18-20. Interpretar la ley de DULONG y PETIT con ayuda de la teoría cinética.

18-21. Demostrar que, a causa de la dilatación térmica, el incremento relativo de superficie de una placa viene dado por  $\beta = (1/A)(dA/dT) \simeq 2\alpha$ , donde  $\alpha$  es el coeficiente de dilatación lineal. Análogamente, demostrar que el coeficiente de dilatación cúbica está dado por

$$\delta = (1/V)(dV/dT) \simeq 3\alpha$$

18-22. Una barra uniforme con módulo de elasticidad  $Y$  y coeficiente de dilatación térmica  $\alpha$  se sujeta entre dos planos rígidos, uno a cada extremo de la barra. De esta manera, se evita que la barra se dilate en dicha dirección al ser calentada. ¿Cuál es el esfuerzo desarrollado en la barra cuando se incrementa la temperatura en  $\Delta T^\circ \text{C}$ ?

18-23. Una barra de cobre y otra de hierro de igual longitud  $L$  e igual sección  $A$  se ensamblan de manera que los extremos queden fijos. Se incrementa la temperatura de las barras en  $\Delta T^\circ \text{C} = 100^\circ \text{C}$ . ¿Qué espacio recorrerá la unión de las barras a causa del calentamiento y cuál es el esfuerzo desarrollado? Utilícese, en particular,  $L = 50 \text{ cm}$  y  $A = 1 \text{ cm}^2$ .

## SEGUNDO PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA

*Resumen.* Si se considera que el primer principio de la Termodinámica trata de la *cantidad* de energía (conservación) de un proceso natural, podemos decir que el segundo principio se ocupa de la *calidad* de las distintas formas de energía que intervienen. En el segundo principio de la Termodinámica se introduce una medida cuantitativa de esa calidad, en función de la cual se describe la probabilidad relativa de ocurrencia de diferentes procesos. Para explicar estas ideas, empezaremos con un estudio cualitativo del *sentido* de evolución de un proceso natural y la distinción entre transformaciones reversibles e irreversibles. Luego seguirá un estudio cuantitativo de la conversión del calor en trabajo, primeramente en una transformación unidireccional y luego en una transformación cerrada o periódica. Se estudia el ciclo de Carnot y se calcula su rendimiento en función de las propiedades de un gas perfecto. Se introduce la escala termodinámica de temperaturas. Sigue luego una comparación entre una transformación cíclica reversible arbitraria y el ciclo de Carnot y se halla que para todos esos ciclos  $\int dQ/T = 0$ . Se introduce la entropía y se interpreta el segundo principio desde un punto de vista molecular en función de la relación entre las diferencias de entropía entre estados y su probabilidad relativa según BOLTZMANN. Vuelve a interpretarse, ahora cuantitativamente, por medio de la relación de BOLTZMANN, el estudio cualitativo realizado al principio del capítulo acerca del sentido de evolución de las transformaciones.

**19-1 Sentido de evolución de los acontecimientos en la Naturaleza.** El mundo físico, así como el biológico, se caracteriza por cambios. Las partículas se ejercen interacciones y se intercambian cantidad de movimiento y energía, tanto en escala microscópica como macroscópica. Sin embargo, todas las transacciones de energía realizadas en la Naturaleza son tales que la energía total permanece invariable, según expresa el principio de conservación de la energía. Aun cuando este principio es uno de los más poderosos de la Física, es importante observar que no predice la verosimilitud de una transacción, o sea el sentido en que circula la energía entre los cuerpos que intervienen. Por lo que respecta a la conservación de la energía, la Naturaleza podría ser per-

fectamente estática, sin que se produjeran cambios en absoluto. En realidad, si tomamos como guía el principio de conservación y consignamos los sucesos que llevan consigo transformaciones energéticas que satisfagan al principio de conservación, hallamos que en dicha consignación podrían incluirse muchos sucesos que parecen imposibles. Para obtener dichos sucesos, bastaría filmar una explosión, un salto de esquí, el crecimiento de una flor, una cascada, el movimiento amortiguado de un péndulo, etc., y luego proyectar estos sucesos hacia atrás (en el tiempo).

Como ejemplo, consideremos un péndulo que parta con una amplitud de oscilación determinada. Al pasar el tiempo, las oscilaciones se amortiguan lentamente a causa de los choques con las moléculas del aire y de otros mecanismos de rozamiento. De esta manera, el péndulo llegará a quedar en reposo. Esta energía inicial «organizada» del péndulo se habrá transformado en energía térmica. El recíproco de esta transformación de energía correspondería a un caso en el cual todas las moléculas del aire se organizaran y empujaran al péndulo en uno y otro sentido hasta recuperar la energía inicial. Según sabemos bien, la probabilidad de dicho suceso es realmente ínfima.

Análogamente, cuando se ponen en contacto dos cuerpos de temperaturas diferentes, circulará calor del más caliente al más frío, pero no en sentido contrario.

Otro ejemplo algo diferente se refiere a la expansión libre de un gas. Por lo que respecta a la conservación de la energía, el gas tanto podría estar ocupando sólo la mitad del recipiente como estar distribuido uniformemente por todo el volumen. Análogamente, la mezcla de dos gases no se invierte por sí misma produciendo de nuevo la separación de los dos gases, si bien según el principio de conservación de la energía no hay nada que impida que ello ocurra.

Con ejemplos de este tipo, llegamos a la conclusión de que el principio de conservación de la energía no exige que se produzcan los sucesos que satisfagan el principio de conservación. En realidad, el principio de conservación de la energía no influye en el plan general con arreglo al cual opera la Naturaleza y con arreglo al cual se aceptan o rechazan las transformaciones energéticas.

Es, pues, bastante natural que nos preguntemos si no sería posible formular otro principio que expresara al menos alguna característica del plan de la Naturaleza respecto a la elección de transacciones energéticas. Existe dicho principio y lleva el nombre de *segundo principio de la Termodinámica*. No vamos a registrar aquí el interesante desarrollo histórico que condujo a la formulación de este principio. La ingeniosa labor de CARNOT, CLAUSIUS, KELVIN y BOLTZMANN condujeron finalmente a un principio que contiene en forma concisa las diversas observaciones acerca del sentido de evolución del flujo energético y de otros sucesos de la Naturaleza.

El primer principio de la Termodinámica, en esencia, establece que la ener-

gía total de la Naturaleza se mantiene constante, mientras que el segundo principio se refiere a la observación de que en las transformaciones de la Naturaleza, la energía se «degrada» de una forma organizada a una forma desordenada, llamada calor, y que el calor, a su vez, circula de las regiones a temperatura elevada a las regiones a temperatura baja. Al igual que pudimos expresar el primer principio mediante la no existencia del móvil perpetuo de primera especie, el segundo principio se puede formular de manera análoga. Una máquina que produjera trabajo útil sin más que disminuir la temperatura de una fuente térmica (el océano, por ejemplo) sin ceder calor a una fuente a temperatura inferior no violaría el primer principio de la Termodinámica. Pero el segundo principio de la Termodinámica estipula que dicha máquina, llamada *móvil perpetuo de segunda especie*, es irrealizable.

El segundo principio va más allá de las aseveraciones cualitativas de este tipo. Proporciona un método para calcular la probabilidad relativa de ocurrencia de diferentes estados. Esta última interpretación del segundo principio de la Termodinámica, en función de la tendencia de la Naturaleza a pasar de los estados menos probables a los más probables, se atribuye a LUDWIG BOLTZMANN. Gran parte de nuestro estudio del segundo principio de la Termodinámica se basará en la idea de Boltzmann. Antes de penetrar en un estudio cuantitativo de estas cuestiones, debemos comentar algunos temas referentes a las idealizaciones de reversibilidad y equilibrio térmico, que en nuestros anteriores estudios de las transformaciones suponíamos sin más. Después ya estaremos preparados para considerar en detalle la conversión de calor en trabajo y, por último, las ideas generales del segundo principio de la Termodinámica.

**19-2 Transformaciones reversibles e irreversibles.** En la Termodinámica de los gases perfectos hemos estudiado las relaciones entre la presión, el volumen y la temperatura de un gas que está en equilibrio. Equilibrio significa que la presión, la densidad, etc., no varían con el tiempo. Cuando un sistema se halle en proceso de variación, no está en equilibrio y las relaciones que hemos venido presentando, por ejemplo la ley de los gases, no son aplicables. Muchos de los sistemas que nos conciernen *varían* con el tiempo y para vencer este punto muerto se ha inventado la idea de *transformaciones cuasi-estáticas* o reversibles. Según dijimos en el capítulo 16, son transformaciones tan lentas que durante la transformación son apropiadas en todo momento las relaciones de equilibrio entre presión, volumen, etc. Hablando con propiedad, una transformación cuasi-estática requeriría un tiempo infinitamente largo para realizarse. Además, a las transformaciones cuasi-estáticas va asociado el concepto de *reversibilidad*.

El valor de estas idealizaciones depende de hasta qué punto puedan utilizarse como descripciones *aproximadas* de las relaciones entre las variables de estado (tales como presión, temperatura, etc.) en los sistemas que *varían con*

*el tiempo.* Se pueden describir muchos sucesos con un alto grado de precisión basándose en la imagen cuasi-estática, pero otros no. Por ejemplo, si consideramos cuasi estáticas las fluctuaciones relativamente rápidas de la presión en una onda sonora, la velocidad del sonido que se obtiene por cálculo partiendo de esta hipótesis concuerda con el valor experimental con un error menor del 0,01 %. En cambio, cuando la frecuencia de una onda sonora se aproxima a la frecuencia de choque de las moléculas de un gas, la hipótesis cuasi-estática no es válida.

En una transformación tal como la expansión libre de un gas en el vacío, la descripción cuasi-estática carece de significado, ya que durante la transformación no podemos siquiera definir la presión del gas. Solamente después de haberse completado la expansión podremos definir el nuevo estado de equilibrio del gas. Esta transformación es típicamente irreversible; tan sólo pueden definirse termodinámicamente los *estados extremos* y el sistema aislado no puede volver a su estado inicial. Si hemos de decir algo acerca de una transformación irreversible con arreglo a la Termodinámica del equilibrio, deberá hacerse en función de los estados extremos.

Como una transformación reversible puede considerarse como una sucesión de estados de equilibrio, podrá representarse en un diagrama mediante una curva que una los estados inicial y final del sistema (por ejemplo, el diagrama de Clapeyron para un gas). En una transformación irreversible, en cambio, sólo podrán especificarse en el diagrama los estados extremos.

**19-3 Conversión del calor en trabajo.** *Rendimiento de conversión en una transformación no periódica.* En el apartado 19-1 estudiamos la conversión de la energía organizada de un péndulo en energía interna calorífica desordenada del gas en cuyo seno oscila el péndulo. Este no es sino uno de los numerosos ejemplos que podemos recordar en los cuales se produce calor con un rendimiento del 100 % a partir de la energía mecánica o de otra forma cualquiera energía «disponible». Por «disponible» queremos significar que la energía se halla en una forma tal que podemos utilizarla en un momento cualquiera para los fines que queramos. Una vez convertida la energía en el movimiento desordenado correspondiente al calor, resulta menos disponible, o menos útil, en este sentido. Se nos presenta la cuestión de cuánto se ha degradado la energía al pasar a esta forma menos disponible. La energía calorífica es disponible, al menos parcialmente, ya que puede utilizarse para mover máquinas térmicas, tales como una máquina de vapor o una turbina de vapor. Pero, ¿puede convertirse en trabajo la energía interna calorífica con un rendimiento del 100 %?

Para estudiar este problema, consideremos un gas perfecto a la temperatura inicial  $T_1$ . La energía interna del gas es proporcional a la temperatura, por lo que si tenemos un mol de gas, la energía interna es  $U_1 = C_v T_1$ , donde  $C_v$  es el calor es-



pecífico molar a volumen constante del gas. Hagamos disminuir la energía interna del gas. Esta disminución se puede lograr de muchas maneras. El gas se puede enfriar a volumen constante, en cuyo caso no se convierte ninguna energía interna en trabajo. En cambio, si se disminuye la temperatura, y por tanto la energía interna, mediante una expansión adiabática reversible, a través de las paredes del recipiente *no* habrá flujo calorífico y la disminución de energía interna será igual al trabajo realizado por el gas. Al final de la expansión, la energía interna del gas ha pasado a tener el valor  $C_v T_2$ . El trabajo realizado por el gas durante la expansión es, pues,

$$W = C_v(T_1 - T_2)$$

que representa una fracción

$$\frac{W}{U_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

de la energía interna inicial. Cuanto más bajo sea el valor de  $T_2$ , mayor será la fracción de la energía calorífica que puede convertirse en trabajo; en efecto, si  $T_2$  fuera el cero absoluto, se podría convertir toda la energía interna inicial del gas.

En una transformación no adiabática penetra calor en el gas al dilatarse y enfriarse, y parte del calor suministrado se convierte en trabajo. En efecto, si se dilata el gas a temperatura constante, el calor que penetra en él contrarresta totalmente su tendencia a enfriarse durante la expansión. Como la temperatura se mantiene constante, la energía interna también se mantendrá constante y *todo* el calor que absorbe el gas se convierte en trabajo. En otras palabras, si queremos convertir calor en trabajo en una transformación unidireccional no periódica, obtendremos el rendimiento de conversión máximo (100 %) utilizando una *expansión isotérmica de la sustancia que trabaja*, que en este caso es un gas. La energía interna del gas permanece constante. El gas sólo actúa de transformador de la energía.

Hagamos resaltar que este rendimiento de conversión del 100 % *no depende de la temperatura*. Sin embargo, en un caso práctico, el convertidor de energía, es decir, el gas del recipiente, tendrá un intervalo de variación de volumen limitado. En tales condiciones, la *cantidad* de calor  $Q_1$ , que se convierte en trabajo en una expansión isotérmica desde un volumen  $V_1$  hasta un volumen  $V_2$  dependerá de la temperatura. En efecto, el trabajo realizado por mol en una expansión isotérmica es

$$Q_1 = W_1 = \int_{V_1}^{V_2} p dV = RT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (19-1)$$

En otras palabras, la *cantidad* de calor convertido en una expansión isotérmica entre dos volúmenes fijos es *proporcional* a la temperatura.

Todo el estudio anterior se ha basado en la idea de que la transformación es reversible. Así pues, todas las transformaciones de que nos ocupemos podrán invertirse. Por ejemplo, después de la expansión isotérmica, podríamos llevar el gas de nuevo a su estado inicial ( $V_1, T_1$ ) mediante una compresión isotérmica, en la cual el trabajo obtenido en la expansión se convierte en calor que desprenderá el gas contenido en el recipiente. La conversión total de calor en trabajo en dicho ciclo completo  $V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow V_1$ , es pues nula.

En relación con esto, recalquemos que cuando haya que comprimir un gas isotérmicamente desde un volumen fijo  $V_2$  hasta otro volumen fijo  $V_1$ , el trabajo requerido es proporcional a la temperatura. Cuanto más baja sea ésta, tanto más fácil será la compresión. Es importante tener bien presente este hecho tan sencillo en el análisis, que realizaremos a continuación, de una máquina de funcionamiento periódico.

*Ciclo de Carnot.* En el estudio que hemos realizado acerca del rendimiento de conversión, tratábamos de una transformación unidireccional. Desde un punto de vista práctico, dicha conversión suele ser relativamente inútil, ya que en la práctica se quiere repetir el proceso una y otra vez con la misma máquina. En el ejemplo presentado anteriormente, la máquina no era más que un gas contenido en un recipiente y que tenía un émbolo móvil en un extremo. Para poder utilizar esta máquina en forma continua, debemos volver a llevar el émbolo a su posición inicial. Si lo hacemos mediante una compresión isotérmica a igual temperatura que en la expansión, la conversión total de calor en trabajo será nula. En cambio, el estudio anterior sugiere la posibilidad de comprimir el gas a una temperatura inferior, con lo que se precisará menos trabajo para realizar esta compresión.

Así pues, en una máquina de funcionamiento periódico en la que se convierta calor en trabajo habría que convertir en trabajo una gran cantidad de calor mediante una expansión a temperatura relativamente elevada y parte del trabajo obtenido emplearlo en comprimir el gas a una temperatura más baja. El problema de cambiar la temperatura del gas se puede resolver de varias maneras. Ya hemos mencionado una posibilidad, una expansión y una compresión adiabáticas. Si utilizamos estas variaciones adiabáticas, el ciclo representativo de la máquina de funcionamiento periódico sería del tipo indicado en la figura 19-1, al cual se da el nombre de *ciclo de Carnot*, en honor al hombre de ciencia francés SADI CARNOT (1796-1832). Según indicamos en el apartado anterior, se comprende que la conversión total de calor en trabajo en la expansión adiabática más la correspondiente a la compresión adiabática subsiguiente, suman cero. En la expansión, la variación de energía interna es  $C_v(T_1 - T_2)$ , y esta cantidad de energía se convierte en trabajo; en la compresión, se invierte el

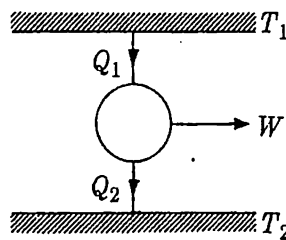
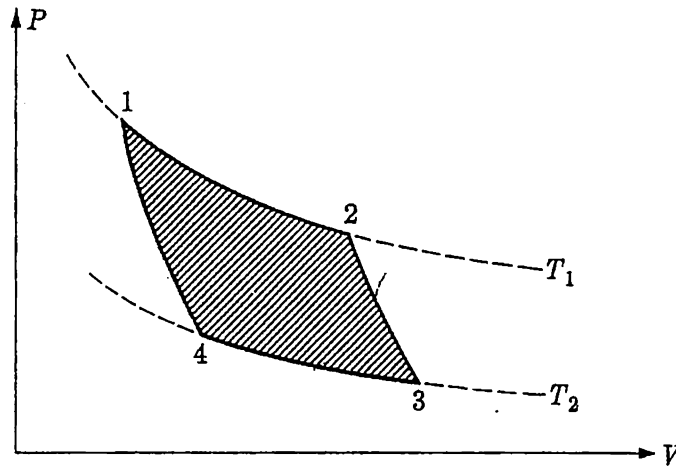


Fig. 19-1. Ciclo de Carnot representado en un diagrama  $P-V$  y la máquina correspondiente indicada en forma simbólica.

proceso y el intercambio total es nulo. En consecuencia, si representamos por  $Q_1$  el calor tomado de la fuente térmica de temperatura elevada y por  $Q_2$ , el tomado de la fuente térmica a baja temperatura, el trabajo realizado en el ciclo es

$$W = Q_1 + Q_2$$

donde  $Q_2$  es una cantidad negativa. El rendimiento de conversión puede definirse como cociente entre el trabajo obtenido en un ciclo y el calor  $Q_1$  tomado de la fuente a temperatura elevada, y se expresa en la forma

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} \quad (19-2)$$

Como en este proceso circula calor, en realidad, hacia la fuente a baja temperatura,  $Q_2$  debe ser negativa en todas estas relaciones, según veremos.

Resulta sencillo expresar este rendimiento en función de las temperaturas  $T_1$  y  $T_2$ . Si representamos por  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  y  $V_4$  los volúmenes correspondientes a los vértices del ciclo indicado en la figura 19-1, podremos expresar  $Q_1$  y

$Q_2$  en la forma siguiente

$$Q_1 = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \quad \text{y} \quad Q_2 = RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}$$

según la ecuación (19-1). Además, puede demostrarse fácilmente que los cocientes de volúmenes  $V_2/V_1$  y  $V_3/V_4$  son iguales (véase el ejemplo siguiente), con lo que tenemos

$$\frac{Q_1}{Q_2} = -\frac{T_1}{T_2} \quad \text{o sea} \quad \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \quad (19-3a)$$

El rendimiento del ciclo de Carnot resulta, pues, ser

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (19-3b)$$

En otras palabras, el rendimiento de esta máquina de funcionamiento periódico no puede ser nunca igual a uno (100 %) a menos que la temperatura de la fuente fría sea el cero absoluto.

**EJEMPLO.** ¿Cuáles son las relaciones entre los volúmenes inicial y final de las expansiones y compresiones adiabáticas en un ciclo de Carnot?

Empleando la notación de la figura 19-1, los volúmenes antes y después de la expansión adiabática son  $V_2$  y  $V_3$  respectivamente. En una transformación adiabática, tenemos  $PV^\gamma = \text{const}$ ; o sea  $RTV^{\gamma-1} = \text{const}$ ; es decir,  $T_1V_2^{\gamma-1} = T_2V_3^{\gamma-1}$ . Análogamente, para la compresión adiabática tenemos  $T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_4^{\gamma-1}$ . De estas dos relaciones se deduce que  $V_4/V_1 = V_3/V_2$  o sea  $V_2/V_1 = V_3/V_4$ .

El proceso de Carnot, como cualquier otro proceso reversible, se puede hacer funcionar en sentido contrario. En este caso se realiza trabajo sobre la máquina cuando hace pasar calor de la fuente fría a la fuente de temperatura más elevada. Si es finita la capacidad calorífica de la fuente fría, su temperatura disminuirá continuamente, teniendo como límite (al menos en principio) el cero absoluto. Este proceso representa una máquina frigorífica. La relación entre trabajo y calor sigue siendo la dada por la ecuación general (19-2). Cuando se refiere a una máquina térmica, esta ecuación contiene  $W$  y  $Q_1$  positivos y  $Q_2$  negativo. En cambio, en el ciclo frigorífico  $W$  y  $Q_1$  son negativos y  $Q_2$  positivo; se cede calor a la fuente caliente desde la máquina, y de la fuente fría a la máquina. Si el rendimiento de ésta es  $\eta$ , tenemos

$$\eta = \frac{W}{Q_1}$$

como antes. En relación con el ciclo frigorífico, al calor absorbido del foco frío dividido por el trabajo,  $Q_2/W$ , se le da el nombre de *rendimiento del ciclo frigorífico*. Esta cantidad, a diferencia del rendimiento de una máquina térmica, puede ser mayor que la unidad.

*Todas las máquinas térmicas reversibles que funcionan entre las mismas temperaturas extremas tienen el mismo rendimiento.* En el anterior estudio del ciclo de Carnot, como sustancia que evoluciona en la máquina considerábamos un gas perfecto. Basándonos en la ecuación de estado de los gases perfectos obteníamos la expresión (19-3b) para el rendimiento de la máquina. Supongamos ahora que construimos una máquina térmica reversible en la cual la sustancia que evoluciona no sea un gas sino, por ejemplo, un sólido. ¿Es posible que dicha máquina tenga un rendimiento más elevado que el de la máquina de gas de Carnot? Si no conocemos la ecuación de estado de la sustancia, no podemos contestar directamente esta pregunta en función de, por ejemplo, las dos temperaturas  $T_1$  y  $T_2$ , como hicimos en el caso anterior.

Para estudiar esta cuestión, supongamos que existe una máquina térmica de rendimiento más elevado que el de la máquina de gas de Carnot. Vamos a investigar las consecuencias de esta hipótesis y demostrar que conduce a una violación del segundo principio de la Termodinámica (apart. 19-1).

Consideremos el experimento imaginario representado en la figura 19-2. Representemos por  $A$  a la máquina de rendimiento más elevado y por  $B$  a la máquina de Carnot. Hagamos funcionar  $A$  como máquina térmica y  $B$  como frigorífica, entre las mismas fuentes térmicas de temperaturas  $T_1$  y  $T_2$ . Si es  $W_b$  el trabajo necesario para accionar  $B$  y es  $\eta_b$  el rendimiento de  $B$ , el calor suministrado por  $B$  a la fuente a temperatura  $T_1$  es  $W_b/\eta_b$ . Empleemos este calor en  $A$ , que convertirá parte de él en trabajo. Si es  $\eta_a$  el rendimiento de  $A$ , el trabajo realizado por  $A$  es  $W_a = \eta_a(W_b/\eta_b)$ . Entonces, si es  $\eta_a$  mayor que  $\eta_b$ , el

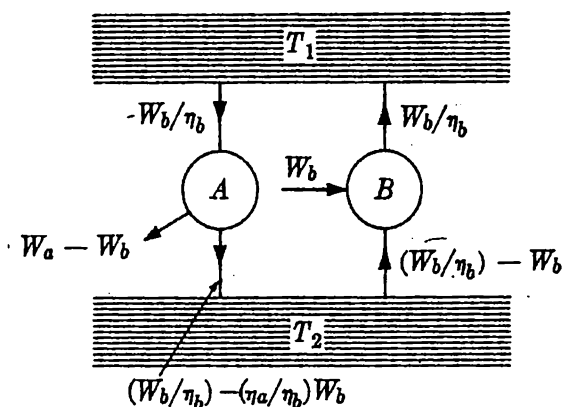


Fig. 19-2. Experimento imaginario que demuestra que una máquina de rendimiento superior al de la de Carnot que funcione entre las mismas temperaturas extremas, vulneraría el segundo principio de la Termodinámica.

trabajo realizado por  $A$  será mayor que el necesario para accionar  $B$ . En consecuencia, podemos emplear parte de  $W_a$  para accionar  $B$  y aún nos quedará para accionar alguna otra máquina. Téngase bien presente que no hemos alterado nada la condición de la fuente caliente, ya que el calor que  $B$  le suministró se empleó en el funcionamiento de  $A$ . En cambio, la fuente fría sí se ha alterado. La máquina frigorífica  $B$  ha extraído una cantidad de calor igual a  $W_b(1 - \eta_b)/\eta_b$  de la fuente fría y  $A$  ha entregado a ésta la cantidad menor  $W_b(1 - \eta_a)/\eta_b$ . El calor extraído de la fuente fría es igual al exceso de trabajo obtenido en el funcionamiento combinado (hipotético) de  $A$  y  $B$ .

En otras palabras, el efecto resultante de hacer funcionar de esta manera la máquina térmica  $A$  y la de Carnot  $B$  juntas, convertiría calor en trabajo en un proceso cíclico y *no se produciría en la naturaleza otro cambio que el de enfriar una fuente térmica* (la fuente fría). En consecuencia, esta máquina podría convertir en trabajo las fabulosas reservas de energía existentes en los océanos, en la atmósfera, o en la Tierra, con lo que podrían accionarse máquinas de muy diversos tipos. Sería lo que se llama un móvil perpetuo de segunda especie, el cual no se ha logrado nunca construir y el segundo principio de la Termodinámica postula la imposibilidad de su existencia. Basándonos en este principio resulta que no existen máquinas como la supuesta y que todas las máquinas térmicas reversibles que trabajen entre las mismas temperaturas extremas tienen el mismo rendimiento, independientemente de cual sea la sustancia que evoluciona. (Con un razonamiento enteramente análogo al anterior podríamos demostrar que ninguna máquina térmica *reversible* puede tener un rendimiento menor que el de la máquina de Carnot de gas).

**19-4 Escala termodinámica de temperaturas.** En el estudio de la temperatura realizado en el capítulo 14 indicamos brevemente los problemas que intervenían en la definición de escala de temperaturas. Las escalas de temperaturas basadas en la dilatación de sólidos y líquidos no sólo daban escalas ligeramente diferentes sino que estaban limitadas considerablemente en su dominio de utilización. El termómetro de gas demostró ser más satisfactorio; el dominio de utilización es mucho más amplio y todos los gases de densidades suficientemente bajas daban escalas casi coincidentes. Todas las relaciones termodinámicas que hemos obtenido se han basado en escalas definidas con un termómetro de gas.

Podemos ahora volver a definir la temperatura en función de medidas energéticas, definición que es *independiente de la sustancia evolutiva* utilizada en el «termómetro», que es ahora una máquina de Carnot que funciona entre dos fuentes térmicas. Los calores cedidos por una y otra fuente térmica son  $Q_1$  y  $Q_2$ , respectivamente. El cociente entre las temperaturas de las dos fuentes se define entonces como el cociente entre las magnitudes de los ca-

lores  $Q_1$  y  $Q_2$ :

$$\frac{T_1}{T_2} = \left| \frac{Q_1}{Q_2} \right| \quad (19-4)$$

El cero de la escala de temperaturas queda establecido por la temperatura de la fuente fría cuando el rendimiento de la máquina de Carnot es igual a la unidad, es decir, cuando  $Q_2$  es nulo.

Como ya tenemos el punto cero, sólo necesitaremos otro punto para establecer la escala de temperaturas. Para determinar este otro punto, podemos proceder como antes y dividir la escala entre los puntos de congelación y ebullición a 1 atm del agua en 100 partes iguales (grados). La temperatura de congelación del agua en la escala termodinámica se obtendrá entonces haciendo funcionar una máquina de Carnot entre dos fuentes térmicas, una de las cuales esté constituida por agua hirviendo a 1 atm y la otra por hielo fundente a la misma presión, y midiendo entonces  $Q_1$  y  $Q_2$ . La temperatura desconocida  $T_1$  del hielo fundente se deduce de la relación

$$\left| \frac{Q_1}{Q_2} \right| = \frac{T_1 + 100}{T_1}$$

Midiendo  $Q_1/Q_2$  y despejando  $T_1$ , obtenemos  $T_1 = 273,2$  grados.

Como todas las máquinas de Carnot que funcionen entre las mismas temperaturas extremas tienen el mismo rendimiento y, por tanto, el mismo valor para  $Q_1/Q_2$ , la escala de temperaturas obtenida es independiente de la sustancia termométrica. Esta definición de temperatura, propuesta por LORD KELVIN en 1848 es la verdadera escala kelvin o de temperaturas *absolutas*. Hallamos, pues, que esta escala coincide con la basada en el termómetro de gas perfecto, ya que nuestro estudio de la máquina de Carnot con ayuda de las temperaturas del termómetro de gas nos condujo precisamente a la misma relación de la ecuación (19-4). Sin embargo, la escala del termómetro de gas perfecto *no* se basa en ninguna sustancia real y por tanto, no es conceptualmente satisfactoria. Cuando se empleen gases reales, sabemos que las escalas diferirán. La ventaja de la actual definición termodinámica es que establece una escala de temperaturas basada en medidas sobre sustancias *reales* y la escala obtenida es independiente de la elección de sustancia termométrica.

**19-5 Entropía.** En general, las transformaciones del tipo indicado en la figura 19-3, que están representadas en un diagrama de Clapeyron por caminos cerrados de formas diferentes, etc., dan trabajos diferentes y diferentes intercambios de calor con el medio ambiente. El calor total absorbido  $\int dQ$ , varía de un proceso a otro. Sin embargo, a pesar de esta diferencia, en un intercambio de calor existe una propiedad interesante que comparten todas las trans-

formaciones cerradas. Podemos expresar esta propiedad característica de la manera siguiente. Consideremos las cantidades elementales  $dQ$  de calor absorbido (positivas o negativas) durante la transformación. Cuando dividimos cada  $dQ$  por la temperatura correspondiente, encontramos que la suma  $(dQ/T)_1 + (dQ/T)_2 + (dQ/T)_3 + \dots$  es siempre nula, independientemente de la forma del camino cerrado en el diagrama  $P$ - $V$ . Esto puede expresarse en forma integral de la manera siguiente:

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0 \quad (19-5)$$

donde  $\oint$  significa que la integración está extendida a un camino cerrado. Es evidente que se absorbe más calor a temperaturas altas que a temperaturas bajas (por lo que el calor total absorbido no será nulo), pero como las  $dQ$  grandes están divididas por temperaturas  $T$  grandes, las contribuciones caloríficas por grado  $dQ/T$  dan una suma nula.

Para comprobar este resultado, partiremos de un ciclo de Carnot en el que sólo se produzcan intercambios caloríficos a lo largo de las isothermas. Si es  $Q_1$  el calor cedido al sistema a la temperatura  $T_1$  y  $Q_2$  a  $T_2$ , tenemos  $\int dQ/T = Q_1/T_1$  para la isoterma superior y  $\int dQ/T = Q_2/T_2$  para la isoterma inferior. La suma de estas dos contribuciones  $\oint dQ/T = Q_1/T_1 + Q_2/T_2$ , es nula, según la ecuación (19-3a).

Para extender esta comprobación de manera que sea aplicable a transformaciones cerradas que no sean ciclos de Carnot, procederemos de la manera siguiente. La transformación considerada se puede aproximar con tanta precisión como queramos a una sucesión de isothermas y adiabáticas, según se indica en la figura 19-3. Un elemento cualquiera de isoterma a temperatura elevada tiene siempre un elemento correspondiente a temperatura baja. Estos elementos pueden considerarse como partes de un ciclo de Carnot elemental, como el sombreado de la figura 19-3. Si los calores absorbidos a las temperaturas más alta y más baja son  $dQ_1$  y  $dQ_2$ , respectivamente, tenemos  $dQ_1/T_1 + dQ_2/T_2 = 0$ . Este mismo resultado es válido para cualquiera otro de los ciclos de Carnot elementales que cubren la región limitada por el camino cerrado y sumando todos esos resultados obtenemos de nuevo que  $\oint dQ/T = 0$ , tal como se había expresado en la ecuación (19-5).

Si en la ecuación (19-5) hacemos

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (19-6)$$

tenemos  $\oint dS = 0$ . La cantidad  $S$  tiene la propiedad de que cuando pasamos de un estado del sistema (gas) al estado inicial por un camino cualquiera, las variaciones de  $S$  durante la transformación son siempre tales que la variación



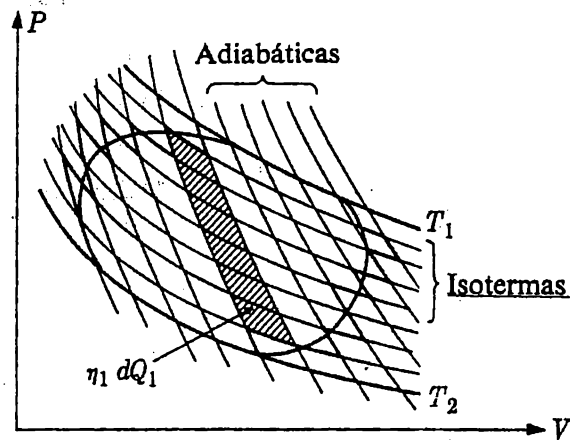


Fig. 19 - 3. Un ciclo arbitrario puede considerarse compuesto de un gran número de pequeñas transformaciones isotérmicas y adiabáticas.

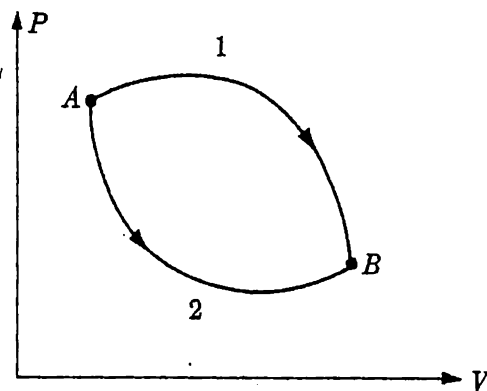


Fig. 19 - 4. La variación de entropía es independiente del camino y sólo depende de los estados inicial y final del sistema.

total de  $S$  es nula, independientemente de la elección de la trayectoria. En este aspecto,  $S$  es en todo análoga a la energía interna  $U$ . Se deduce que la variación de  $S$  de un estado a otro es independiente del camino seguido; sólo depende de los estados inicial y final, según se ilustra en la figura 19-4. En ella hemos representado dos caminos diferentes, marcados 1 y 2, que van de  $A$  a  $B$ . La integral a lo largo del camino cerrado que va de  $A$  a  $B$  por 1 y vuelve de  $B$  a  $A$  por 2 es nula, según la ecuación (19-5) y puede expresarse en la forma

$$\left( \int_A^B dS \right)_1 + \left( \int_B^A dS \right)_2 = 0$$

Como hemos considerado transformaciones *reversibles*, podemos escribir

$$\int_B^A dS = - \int_A^B dS$$

Por tanto, obtenemos

$$\left(\int_A^B dS\right)_1 = \left(\int_A^B dS\right)_2$$

que nos indica existe una variación de  $S$  al pasar del estado  $A$  al  $B$ , la cual es independiente del camino seguido entre dichos estados.

A la cantidad  $S$  se le ha dado un nombre especial: *entropía*. Hemos visto que esta cantidad es función de estado, pero aún no hemos examinado el significado físico de esta cantidad. Sin embargo, veremos que la entropía puede utilizarse para especificar el sentido de evolución de los sucesos en la Naturaleza y para la clasificación de las probabilidades relativas de la ocurrencia de las transformaciones. Todo ello se verá en el apartado 19-6.

El cálculo formal de la variación de entropía cuando pasa un gas perfecto de un estado a otro se puede realizar directamente por medio de la definición

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} \quad (19-7)$$

utilizada junto con el primer principio de la Termodinámica y la ecuación de los gases. Obtenemos  $dQ = C_v dT + P dV = C_v dT + RT (dV/V)$ . Para la variación de entropía de un mol de gas tendremos, pues,

$$S_2 - S_1 = C_v \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) + R \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) \quad (19-8)$$

que sólo depende de los estados inicial y final  $(V_1, T_1)$  y  $(V_2, T_2)$ , y no del camino elegido.

Este resultado sólo es aplicable, desde luego, a un gas perfecto. Cuando en las interacciones térmicas intervienen otras sustancias, deberemos calcular la variación de entropía de cada cuerpo mediante la definición  $S_2 - S_1 = \int_1^2 dQ/T$ . Recuérdese que esta fórmula lleva implícito que la transformación sea *reversible*. Pronto veremos la importancia de esto, al estudiar las variaciones de entropía en transformaciones irreversibles.

Algunas propiedades generales importantes de la entropía de un sistema pueden hallarse directamente de la definición de entropía y por tanto no tenemos que calcular la integral  $\int dQ/T$  en función del volumen y la temperatura, etcétera, de los estados inicial y final, como hicimos en el caso de un gas perfecto. La primera propiedad importante es: *En toda transformación reversible, la entropía del Universo permanece constante*. Este resultado es inmediato al recordar que en una transformación reversible los cuerpos en interacción se hallan siempre en equilibrio durante ésta. En otras palabras, si el cuerpo  $A$  interactúa con  $B$ ,  $A$  y  $B$  tienen la misma temperatura. En consecuencia, cuando

$A$  cede a  $B$  una pequeña cantidad de calor  $dQ$ , la variación de entropía de  $B$  es  $dS_b = dQ/T_b$  y la variación correspondiente de  $A$  es  $dS_a = -dQ/T_a = -dS_b$ . La variación total de entropía del sistema (el Universo) será nula; es decir,  $dS_a + dS_b = 0$ . Consideremos la expansión isotérmica de un gas. En este caso, los cuerpos en interacción térmica son el gas y la fuente térmica que le rodea. En la expansión, el calor absorbido por el gas es el mismo que sale de la fuente térmica. Las temperaturas del gas y la fuente son iguales y por tanto la ganancia de entropía del gas  $dQ/T$  tiene igual magnitud que la pérdida de entropía de la fuente térmica. La variación total de entropía del sistema (gas más fuente térmica) es nula.

La segunda propiedad importante de la entropía es: *en toda transformación irreversible, la entropía del Universo aumenta*. Las transformaciones reversibles son ideales. Todas las transformaciones que tienen lugar en la Naturaleza, son más o menos irreversibles. En una transformación irreversible los cuerpos en interacción no están en equilibrio; la temperatura, o tal vez alguna otra cantidad tal como la densidad, varía de un punto a otro del sistema. Cuando no se perturba el sistema, sigue una marcha definida; es decir, el calor circula de los cuerpos a temperatura elevada hacia los que tienen temperaturas más bajas y la masa circula en el sentido de las densidades decrecientes, etc.

En toda transformación, reversible o no, la energía se conserva siempre y en un intercambio de calor entre dos cuerpos, la cantidad de calor que cede uno es siempre igual al calor absorbido por el otro. Por tanto, la diferencia fundamental entre transformaciones reversibles e irreversibles podrá enunciarse de la manera siguiente. En una transformación reversible, los cuerpos en interacción térmica, por ejemplo el gas y la fuente térmica en una máquina de Carnot, están siempre a la misma temperatura, con lo que circula calor de un cuerpo a otro sin que haya variación de temperatura. En cambio, en una transmisión irreversible de calor, los cuerpos en interacción tienen temperaturas diferentes, con lo que el calor se «degrada» en la interacción. Demostremos mediante ejemplos que cuando se produce una transformación irreversible, crece la entropía total del sistema de cuerpos en interacción (Universo).

Hemos llegado anteriormente a la conclusión de que la variación de entropía en una transformación está unívocamente determinada por los estados inicial y final y no por el comportamiento del sistema durante la transformación. Cuando se conocen los estados extremos, podemos calcular la variación de entropía evaluando la integral  $\int dQ/T$  para una transformación *reversible* que lleva al sistema del estado inicial al final.

*Expansión libre.* Un ejemplo que ilustra el aumento de entropía en una transformación irreversible lo constituye la expansión libre de un gas perfecto. Consideremos un mol de gas perfecto contenido en un recipiente aislado térmicamente que esté dividido en dos mitades por una pared. Inicialmente, el gas

se halla en una de las mitades del recipiente mientras que en la otra se ha hecho el vacío. Se practica un orificio en la pared y el gas circula a través de él (expansión libre) hasta que la presión sea la misma en todos los puntos del recipiente. La transformación es irreversible. No es una sucesión de estados de equilibrio; durante la transformación, la densidad y la presión no son uniformes en todo el volumen del gas y no podemos especificar un *estado* del gas, ya que  $P$ ,  $V$  y  $T$  no son cantidades bien definidas. Si el gas fuera perfecto, no habría variación de temperatura a consecuencia de la expansión libre (cap. 18) y el estado final difiere del inicial sólo en volumen y presión. Para determinar la variación de entropía en la transformación, debemos determinar el valor de  $\int dQ/T$  para una transformación reversible que lleve al gas del estado inicial al final. La transformación reversible más sencilla en este caso sería una expansión isotérmica del gas. En la ecuación (19-8) se ha realizado el cálculo correspondiente de  $\int dQ/T$  para un gas perfecto, y hallamos que la diferencia de entropía entre dos estados de un gas está dada por  $S_2 - S_1 = C_v \ln (T_2/T_1) + R \ln (V_2/V_1)$ . En el caso actual tenemos  $T_2 = T_1$  y  $V_2 = 2V_1$ . La variación de entropía es, pues,

$$S_2 - S_1 = R \ln 2$$

Si no tenemos presente que la relación  $\int_1^2 dQ/T$  se refiere a una transformación *reversible* que lleva al sistema del estado inicial al final, podríamos preguntarnos lo siguiente: Puesto que el gas está aislado térmicamente del medio que le rodea, ¿por qué no es nula la integral  $\int dQ/T$ ? La respuesta es, simplemente, que la  $dQ$  que figura en la integral *no* es el calor que interviene en el proceso irreversible, sino que es el de una transformación reversible utilizada para medir la diferencia de entropía entre los estados extremos.

*Circulación del calor entre dos cuerpos.* Consideremos ahora el flujo calorífico entre dos cuerpos  $A$  y  $B$  de masas y calores específicos iguales, pero de temperaturas  $T_a$  y  $T_b$  diferentes. Se ponen en contacto y se aísla térmicamente el sistema  $A + B$  del medio que le rodea. Si es  $T_a$  mayor que  $T_b$ , circulará calor de  $A$  a  $B$  y las temperaturas llegarán a igualarse.

Determinemos la variación de entropía que resulta cuando circula de  $A$  a  $B$  una pequeña cantidad de calor  $dQ$ . Ello se logrará sacando de  $A$  el calor  $dQ$  (por ejemplo, dejando que  $A$  haga las veces de fuente térmica en una máquina de Carnot) y luego entregando  $dQ$  reversiblemente a  $B$  (por ejemplo, dejando que  $B$  sea la fuente fría de otra máquina de Carnot). La variación de entropía de  $A$  será  $dS_a = -dQ/T_a$ , y la variación de entropía de  $B$  es  $dS_b = dQ/T_b$ . La variación total de entropía de la transformación será

$$dS = dS_a + dS_b = dQ \left( \frac{1}{T_b} - \frac{1}{T_a} \right)$$

Como  $T_b$  es menor que  $T_a$ , vemos que la variación total de entropía durante la transformación, es positiva; la entropía total del sistema aumenta a consecuencia del calor que pasa de  $A$  a  $B$ .

Las temperaturas de los dos cuerpos llegarán a alcanzar el valor de equilibrio  $T_f = (T_a + T_b)/2$ . La variación total de la entropía de  $A$  será, pues,

$$\Delta S_a = \int_{T_a}^{T_f} \frac{dQ}{T} = mc \int_{T_a}^{T_f} \frac{dT}{T} = mc \ln \frac{T_f}{T_a}$$

donde  $m$  es la masa de  $A$ , y  $c$  el calor específico. La variación de entropía de  $B$  se obtiene de la fórmula anterior sustituyendo  $T_b$  por  $T_a$ . La variación total de entropía de  $A + B$  es, pues,

$$\Delta S = \Delta S_a + \Delta S_b = mc \ln \frac{T_f^2}{T_a T_b} = mc \ln \frac{(T_a + T_b)^2}{4 T_a T_b} > 0$$

Esta cantidad es positiva, puesto que

$$\frac{(T_a + T_b)^2}{4 T_a T_b} = 1 + \frac{(T_a - T_b)^2}{4 T_a T_b}$$

es mayor que la unidad; la entropía total aumenta durante la transformación. ( $T_f$  es la media aritmética de  $T_a$  y  $T_b$ , y  $\sqrt{T_a T_b}$  es la media geométrica.)

De nuevo, esta transformación ha tenido lugar en un sistema  $A + B$  aislado térmicamente del medio que lo rodea. Por sí mismo, ha pasado de un estado con una cierta entropía a otro con una entropía superior. Es importante observar que el sistema está aislado térmicamente, por lo que durante la transformación el trabajo que ha penetrado en el sistema  $A + B$  es nulo. Esto no significa que durante la transformación sea nula  $\int dQ/T$ , porque la  $dQ$  que entra en el cálculo de la entropía se refiere a transformaciones *reversibles* en las que los miembros del sistema pasan del estado inicial al final.

*Mezcla de dos gases.* Como otro ejemplo más, consideremos un recipiente aislado térmicamente lleno con cantidades iguales de dos gases, por ejemplo, oxígeno y nitrógeno, separados por una pared de manera que cada uno ocupe la mitad del recipiente. Al quitar la pared, los dos gases se mezclarán hasta distribuirse uniformemente por todo el volumen. Por tanto, cada gas se habrá dilatado hasta el doble de su volumen inicial. Si tenemos un mol de cada gas, el incremento de entropía de cada gas será  $R \ln (V_2/V_1) = R \ln 2$  (la temperatura se mantiene constante) y la variación total de entropía es  $2R \ln 2$ . Vemos de nuevo que la entropía de un sistema aislado crece en una transformación irreversible.

Estos ejemplos —expansión libre, circulación del calor, y mezcla de gases— ponen todos de manifiesto el hecho importante de que la entropía del Universo crece siempre en las transformaciones irreversibles. Como todas las transformaciones que se producen en la Naturaleza son irreversibles (al menos hasta cierto punto), se deduce que el Universo evoluciona continuamente hacia entropías cada vez mayores, que el calor se degrada al pasar de regiones de temperatura elevada a otras de temperatura inferior y que la entropía es una medida de esta degradación. Pueden producirse disminuciones locales de la entropía cuando los cuerpos se ejerzan interacciones, pero toda disminución va acompañada de un aumento de entropía en alguna otra parte, de valor tal que la entropía total del sistema aumente. Tan sólo en las transformaciones ideales que llamamos reversibles es nula la variación total de entropía.

**19-6 Entropía y probabilidad.** Cuando un sistema de cuerpos en interacción sufre una transformación, tiende a un estado de entropía más elevada. Por lo que respecta al primer principio de la Termodinámica, existe una infinidad de transformaciones posibles; unas representan una disminución de la entropía total y otras un aumento. La Naturaleza aparta por sí misma las transformaciones que conducen a una entropía incrementada y rechaza todos los cambios que lleven a una disminución. Parece razonable esperar que la entropía pueda utilizarse de alguna manera para la clasificación de los estados, o de las transformaciones, por sus probabilidades relativas de ocurrencia.

Este punto de vista es fundamental en la interpretación molecular de Boltzmann de la entropía y en el segundo principio de la Termodinámica. Según la interpretación de Boltzmann, el estado de un sistema puede describirse, al menos en principio, en función de las distribuciones y celeridades de las moléculas. Éstas pueden distribuirse de muchas maneras; algunas distribuciones son más probables que las otras. Las moléculas buscan su distribución más probable según las mismas leyes de la probabilidad que predicen, por ejemplo, la distribución más probable de un gran número de monedas lanzadas al aire. La teoría de Boltzmann indica cómo puede calcularse la probabilidad de las distribuciones moleculares con arreglo a los estados macroscópicos y cómo está relacionada con la entropía dicha probabilidad. En este apartado nos proponemos estudiar brevemente estas ideas e ilustrarlas con algunos ejemplos sencillos.

*Ilustración del cálculo de la probabilidad de los estados.* Para ilustrar la idea que lleva consigo el cálculo de la probabilidad de varias distribuciones moleculares con arreglo a los estados macroscópicos de una sustancia, estudiaremos la distribución de un gas perfecto en un recipiente. Según ya indicamos, supondremos que las leyes de la probabilidad son aplicables a las moléculas de la misma manera que lo son a los sucesos cotidianos.

Para repasar las ideas elementales de las leyes de la probabilidad, consideremos el lanzamiento al aire de una moneda. Existen dos resultados posibles del lanzamiento, «cara» y «cruz» y no existe *a priori* ninguna razón para considerar un caso más probable que el otro. Decimos que cara y cruz son resultados igualmente probables y que la probabilidad de obtener, por ejemplo, cara es, pues,  $1/2$ . Desde un punto de vista experimental, la probabilidad de obtener cara está determinada por el cociente entre el número de casos favorables (obtener cara) y el número total de lanzamientos, cuando este último es muy grande.

Al lanzar simultáneamente dos monedas, existen cuatro resultados igualmente probables: cara-cara, cruz-cruz, cruz-cara, cara-cruz. La probabilidad de obtener el resultado cara-cara, por ejemplo, es pues,  $1/4$ . Como existen dos maneras posibles de obtener una combinación cara-cruz de las monedas, la probabilidad de obtener un tal «estado mixto» independientemente de cuál sea la moneda que dé cara será, evidentemente  $2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ . Análogamente, puede comprobarse con facilidad que el número de posibilidades de  $n_1$  monedas que den cara y  $n_2$  que den cruz al lanzar  $n_1 + n_2 = n$  monedas es

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n_1)(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n_2)} \quad (19-9)$$

Volvamos a las moléculas del gas en el recipiente. Éste está dividido en dos partes iguales  $A$  y  $B$ . Si en el recipiente hubiera una sola molécula del gas, habrían dos distribuciones posibles de igual probabilidad  $1/2$ : la molécula puede estar en  $A$  o puede estar en  $B$ . Las dos distribuciones son igualmente probables. Cuando tenemos dos moléculas,  $a$  y  $b$ , en el recipiente, hay cuatro distribuciones posibles:  $a$  y  $b$  pueden estar en  $A$ ,  $a$  y  $b$  en  $B$ ,  $a$  en  $A$  y  $b$  en  $B$ , o  $a$  en  $B$  y  $b$  en  $A$ . La probabilidad de cada una es  $1/4$ . De estas cuatro combinaciones posibles, dos dan una distribución uniforme y dos una distribución no uniforme. La probabilidad de tener una distribución uniforme es, pues,  $2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ . Al incrementar el número de moléculas, la probabilidad de obtener una distribución uniforme crece rápidamente y disminuye la probabilidad de obtener una distribución no uniforme.

En el caso de tres moléculas, habrán  $2^3 = 8$  combinaciones posibles y para  $n$  moléculas habrán  $2^n$  combinaciones, cada una de ellas con una probabilidad  $1/2^n$ . Con  $n = 10$ , tenemos  $2^{10} = 1024$  combinaciones. De éstas, sólo una tendrá las diez moléculas en  $A$ . Si consideramos la distribución de una molécula en  $A$  y nueve en  $B$ , encontramos diez posibilidades, las cuales corresponden a colocar la molécula número uno en  $A$  y las otras en  $B$ , la número dos en  $A$  y las otras en  $B$ , etc. Si pasamos a considerar la distribución de dos moléculas en  $A$  y ocho en  $B$ , encontramos que hay 45 posibilidades. Podríamos continuar fácilmente este recuento del número de maneras en que se puede alcanzar un estado, y el resultado es el que se consigna en la tabla 19-1. Por *estado* queremos

TABLA 19-1

Número de moléculas en <i>A</i>	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Número de moléculas en <i>B</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de posibilidades	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

significar una distribución con *números* especificados de moléculas en *A* y en *B*. No importa qué moléculas están en *A* y cuáles en *B*. Así, varias combinaciones pueden dar origen a un mismo estado. Cuanto mayor sea el número de combinaciones, tanto mayor será la probabilidad de la existencia de dicho estado.

En este caso particular, encontramos que el 70 % de todas las combinaciones posibles están concentradas en los tres estados centrales de la tabla. Estos estados representan una distribución casi uniforme de las moléculas en la caja. Al ir aumentando el número de moléculas, se favorecerá más y más la uniformidad. Con los números extraordinariamente grandes de moléculas que existen en los gases a presiones ordinarias, la probabilidad de una distribución uniforme (o casi uniforme) es, para todos los fines prácticos, igual a la unidad. En un mol de gas, la probabilidad de que todas las moléculas estén en *A* es  $(1/2)^{N_0} = (1/2)^{6 \cdot 10^{23}}$ , número extraordinariamente pequeño. La probabilidad de que hayan números aproximadamente iguales de moléculas en *A* y en *B* es la unidad, para todos los fines prácticos.

Así, utilizando las leyes de probabilidad a un sistema de moléculas que se suponen totalmente independientes unas de otras, podemos comprender fácilmente el comportamiento de un gas cuando se expande y distribuye uniformemente en un recipiente. Esta idea fundamental de contar las combinaciones que corresponden a diferentes estados de un sistema de moléculas puede utilizarse igualmente en otros casos para la determinación de las probabilidades relativas de varios estados. Se postula que el sistema particular adopta el estado que tenga probabilidad máxima. Esta es la esencia del *segundo principio de la Termodinámica en su interpretación molecular*.

En el ejemplo anterior, se suponía tácitamente que en los diversos estados las partículas se movían con celeridades iguales, con lo que era posible asignar probabilidades iguales a las diversas combinaciones de partículas. En otras pa-



labras, considerábamos que todos los estados tenían la misma temperatura. Este análisis se puede extender para que incluya estados de temperaturas diferentes, pero nos limitaremos al caso más sencillo que hemos tratado.

Vamos a considerar la posibilidad de comparar las probabilidades de diversos estados en función de las propiedades *macroscópicas* de los estados, tales como volumen, temperatura, densidad, etc. Que existe esta posibilidad se ve inmediatamente mediante el ejemplo sencillo de la distribución de las moléculas de un gas en un recipiente. Si hay dos volúmenes posibles diferentes del gas, éste busca ocupar el volumen mayor. En efecto, es posible calcular las probabilidades relativas de dos estados macroscópicos que tengan la misma temperatura, pero volúmenes diferentes. En el estudio anterior, encontramos que la probabilidad de que todas las partículas de un mol de gas se hallen en una mitad del recipiente es  $(1/2)^{N_0}$ , donde  $N_0 = 6 \cdot 10^{23}$ . De manera en todo análoga, encontramos que la probabilidad de que todas las partículas estén en un volumen  $V_1$  es  $(V_1/V)^{N_0}$ , donde  $V$  es el volumen total disponible. Análogamente, la probabilidad de que todas las partículas estén en un volumen  $V_2$  es  $(V_2/V)^{N_0}$ . El cociente  $X_2/X_1$  entre las probabilidades de estar las partículas en  $V_2$  y en  $V_1$ , respectivamente, es, pues;

$$\frac{X_2}{X_1} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{N_0}$$

o sea

$$\ln \frac{X_2}{X_1} = N_0 \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (19-10)$$

En otras palabras, en este caso sencillo las probabilidades relativas de los dos estados de un mol de gas a temperatura constante se pueden expresar directamente en función del cociente entre los volúmenes de los dos estados.

*Relación entre probabilidad y entropía.* En el apartado anterior [véase ec. (19-8)], encontramos que entre dos estados diferentes de un mol de gas perfecto a temperatura constante, existe una diferencia de entropía  $S_2 - S_1 = R \ln (V_2/V_1)$ , y acabamos de ver que el cociente entre las probabilidades de los mismos estados es  $\ln(X_2/X_1) = N_0 \ln (V_2/V_1)$  [véase ec. (19-10)]. Comparando estos dos resultados, podemos ver que la entropía y la probabilidad de un estado están relacionadas (al menos en este caso particular) de la manera siguiente:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{R}{N_0} \ln \frac{X_2}{X_1} = k \ln \frac{X_2}{X_1} \quad (19-11)$$

donde  $k$  es la constante de Boltzmann. Esta relación entre probabilidad y entropía no sólo es aplicable a estados de igual temperatura, sino que puede demostrarse su validez general.

Una vez determinada la diferencia de entropías entre dos estados, podemos

determinar el cociente entre las probabilidades de los estados a partir de la relación de Boltzmann

$$\frac{X_2}{X_1} = e^{(S_2 - S_1)/k} \quad (19-12)$$

EJEMPLO. Un baño de 1001 g de agua está a 0° C. ¿Cuál es la probabilidad de que exista el estado 2, en el cual 1 g de agua es hielo (cediéndose el calor latente al líquido restante), en vez del estado 1, en el cual el gramo de agua mencionado sea agua líquida a 0° C?

Nos hallamos ante una transición entre dos estados especificados de la manera siguiente. Primer estado: 1 g de agua a 0° C y 1000 g de agua a 0° C. Segundo estado: 1 g de hielo a 0° C y 1000 g de agua a  $\Delta T_0^\circ$  C. Llevemos el sistema de un estado a otro por vía reversible y calculemos los valores correspondientes de  $\int_1^2 dQ/T$  para las dos partes en interacción que constituyen el sistema (1 g de agua y 1000 g de agua).

Empecemos con el gramo de agua. En la extracción de calor (p. ej. con una máquina de Carnot) necesaria para formar el hielo, la temperatura  $T = T_0 = 273^\circ$  K permanece constante y se quita el calor latente del agua,  $Q_1 \simeq 80$  cal/g. La variación de entropía correspondiente es

$$(S_2 - S_1)_A = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = -\frac{Q_1}{T_0}$$

El agua restante del baño puede calentarse reversiblemente en forma análoga, y obtenemos

$$(S_2 - S_1)_B = \int \frac{dQ}{T} = mc \int_1^2 \frac{dT}{T} = mc \ln \frac{T_0 + \Delta T}{T_0}$$

donde  $mc \Delta T = Q_1$ .

Para valores pequeños de  $\Delta T$ , podemos hacer

$$\ln \left( 1 + \frac{\Delta T}{T_0} \right) = \frac{\Delta T}{T_0} - \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta T}{T_0} \right)^2$$

Así, la variación total de entropía en dicha transformación imaginaria sería

$$S_2 - S_1 = -\frac{Q_1}{T_0} + mc \frac{\Delta T}{T_0} - mc \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta T}{T_0} \right)^2$$

Como  $Q_1 = mc \Delta T$ , obtenemos

$$S_2 - S_1 = -\frac{mc}{2} \left( \frac{\Delta T}{T_0} \right)^2$$

Con  $Q_1 \simeq 80$  cal, obtenemos  $\Delta T = 80/1000 \cdot 1 = 0,08^\circ$  C y

$$S_2 - S_1 = -\frac{1000}{2} \left( \frac{0,08}{273} \right)^2 \simeq -4,3 \cdot 10^{-5} \text{ cal/}^\circ\text{C}$$

El cociente entre las probabilidades de los estados 2 y 1 será, pues,

$$\frac{X_2}{X_1} = \exp\left(\frac{S_2 - S_1}{k}\right) = \exp\left(-\frac{4,3 \cdot 10^{-5}}{0,33 \cdot 10^{-23}}\right) \simeq \exp(-1,3 \cdot 10^{19})$$

La probabilidad de esta cristalización espontánea sin intercambio de calor con el exterior es, efectivamente, pequeñísima.

Será interesante estudiar más detalladamente, a la luz de lo que hemos aprendido acerca de la probabilidad de los estados, algunas de las cuestiones mencionadas en el apartado 19-1. Consideremos, por ejemplo, el movimiento de un péndulo en el seno de un gas. Al chocar el péndulo con las moléculas del gas, se cede la energía mecánica organizada del péndulo al movimiento desordenado de las moléculas (calor) y el péndulo llegará a detenerse. Este tipo de fenómeno es muy corriente; la probabilidad de que se transforme trabajo mecánico en calor es, para todos los fines prácticos, igual a la unidad. En cambio, ya hemos dicho que la transformación inversa de calor en energía mecánica organizada no ocurre; la probabilidad de este suceso es, para todos los fines prácticos, nula. ¿Cómo se explican los hechos experimentales de este tipo mediante la teoría de la entropía y la probabilidad de los estados expresados por la ecuación (19-12)? ¿Cuán probable es la transformación de energía mecánica en calor, y cuán improbable es el proceso inverso?

Para responder a estas preguntas partiremos de la ecuación (19-7). Calculemos la probabilidad de que el péndulo reciba energía mecánica  $E$  del aire, el cual perderá esa misma cantidad de calor. Si consideramos que la fuente térmica, en este caso la atmósfera, tiene capacidad calorífica infinita, la temperatura del sistema permanecerá invariable. Entonces, los dos estados del sistema que nos ocupa son:

*Estado 1:* La temperatura es  $T$  y la energía del péndulo es nula.

*Estado 2:* La temperatura es  $T$ , el péndulo tiene una energía mecánica  $E$  y la fuente térmica (la atmósfera) ha perdido una cantidad igual de calor; es decir,  $\int dQ = -E$ .

La variación de entropía que se tiene cuando el sistema pasa de uno a otro estado es igual a la variación de entropía de la fuente térmica  $\int dQ/T = -E/T$ . La probabilidad relativa de los dos estados será, pues,

$$\frac{X_2}{X_1} = e^{-E/kT} \quad (19-13)$$

En el movimiento de su centro de masa, el péndulo alcanza una altura máxima  $h$  sobre el suelo tal que  $mgh = E$ , donde  $m$  es la masa del péndulo. Como

ejemplo, tomemos  $h=1$  cm y  $m=1$  g. Entonces, con  $kT \simeq 10^{-14}$  erg (temperatura  $T \simeq 300^\circ\text{K}$ ), obtenemos

$$\frac{X_2}{X_1} \simeq \exp(-1 \cdot 981 \cdot 1/10^{-14}) \simeq \exp(-10^{17})$$

que es un número tan pequeño que puede considerarse, para todos los fines prácticos, que la probabilidad de que se transforme el calor en trabajo es nula.

Para hallar la probabilidad de que la energía mecánica del péndulo se transforme en calor, bastará que cambiemos el signo de la variación de entropía, ya que ahora la fuente térmica recibe calor. El cociente entre la probabilidad de que el péndulo se amortigüe y la probabilidad de que permanezca oscilando es ahora  $\exp(10^{17})$ , es decir, un número tan extraordinariamente grande que la conversión de energía mecánica en calor, para todos los fines prácticos, es una certidumbre.

Desde luego, el resultado de la ecuación (19-13) es aplicable a una masa cualquiera; en particular, puede emplearse para calcular la probabilidad relativa de hallar una molécula al nivel del suelo y a una altura  $h$ , según se ilustra en la discusión siguiente.

*Distribución de la densidad en una atmósfera isoterma (ley de las atmósferas).* ¿Cuál es la probabilidad de hallar una molécula de masa  $m$  a una distancia  $y$  sobre el suelo, comparada con la probabilidad de que se encuentre al nivel del suelo ( $y=0$ )?

Para determinar la probabilidad relativa de estas dos posiciones moleculares, utilizando los conceptos anteriores, introducimos  $E = mgy$  en la ecuación (19-13) y obtenemos

$$\frac{X_2}{X_1} = e^{-E/kT} = e^{-mgy/kT} \quad (19-14)$$

El cociente  $X_2/X_1$  es extraordinariamente pequeño para masas ordinarias (p. ej. 1 g), pero puede verse que cuando tratamos con masas moleculares (del orden de  $10^{-23}$  g), el cociente puede ser muy próximo a la unidad incluso para valores grandes de  $y$ . Es decir,  $(X_2/X_1) \simeq \exp(-10^{-6}y)$ , donde  $y$  está dada en centímetros.

El cociente  $X_2/X_1$  entre las probabilidades debe ser igual al cociente entre las densidades del aire sobre la superficie terrestre a una altura  $y$  y a una altura  $y=0$ . Si representamos por  $M$  la masa molecular y si hacemos  $X_2/X_1 = \rho/\rho_0$ , la ecuación (19-14) podrá escribirse en la forma

$$\rho = \rho_0 e^{-Mgy/RT} \quad (19-15)$$

donde  $\rho$  es la densidad a una altura  $y$  y  $\rho_0$  es la densidad en el suelo.

Es interesante ver que esta expresión es efectivamente la misma que la obtenida directamente de las condiciones de equilibrio en una atmósfera isoterma. La temperatura  $T$  de la atmósfera se supone constante. La presión y la densidad varían con la altura  $y$  sobre el suelo (véase fig. 19-5). El equilibrio de un elemento de gas de espesor  $dy$  exige entonces que la fuerza por centímetro cuadrado,  $p - (p + dp) = -dp$ , hacia arriba debe ser igual a la fuerza por centímetro cuadrado  $\rho g dy$  hacia abajo. Es decir,

$$dp = -\rho g dy$$

Según la ley de los gases,  $p = r \rho T$ , donde  $r$  es la constante de los gases por unidad de masa,  $r = R/M$  ( $M$  = masa molecular). Así pues, sustituyendo  $dp = rT d\rho$ , tenemos

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{g}{rT} dy = -\frac{Mg}{RT} dy$$

Integrando tenemos

$$\rho = \rho_0 e^{-Mgy/RT} = \rho_0 e^{-mgy/kT}$$

donde  $\rho_0$  es la densidad en  $y = 0$  y  $m$  es la masa de una partícula de gas ( $M = N_0 m$ ,  $k = R/N_0$ ). Este resultado es igual al obtenido anteriormente en nuestras consideraciones acerca de probabilidades.

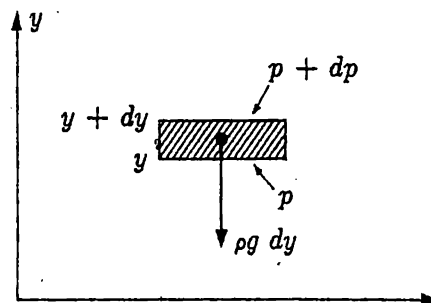


Fig. 19-5. El equilibrio de un elemento gaseoso en el campo gravitatorio terrestre exige que  $dp = -\rho g dy$ .

**EJEMPLO.** Podemos ilustrar la generalidad de las relaciones que hemos estudiado anteriormente, con el ejemplo siguiente que es de naturaleza algo diferente de los que hemos dado hasta ahora. Podemos igualar a cero la energía interna de un átomo de sodio en su estado normal. El átomo puede existir también en el llamado estado excitado que tiene un exceso de energía de  $3,32 \cdot 10^{-12}$  erg, originado por un desplazamiento interno de las cargas eléctricas. Los átomos en este estado emiten espontáneamente una luz amarilla del sodio y a consecuencia de ello el desplazamiento de las cargas vuelve a su estado inicial. Se encierra en un tubo una cierta cantidad de vapor de sodio y se ve que emite luz de intensidad  $I_1$ , cuando la temperatura del vapor se mantiene a  $727^\circ$  C. Supongamos que queremos incrementar 100 veces la intensidad, incrementando la temperatura. ¿Qué incremento de temperatura puede esperarse que produzca este incremento de intensidad?

Representando por  $n_0$  el número de átomos en estado normal, la relación de Boltzmann nos hace presumir que el número de átomos excitados a temperatura  $T$  será

$$n = n_0 e^{-E/kT}$$

donde en este caso  $E = 3,32 \cdot 10^{-12}$  erg es la energía necesaria para excitar un átomo.

Si suponemos que la intensidad de la radiación es proporcional al número de átomos excitados, tenemos

$$I = \text{const } n_0 e^{-E/kT}$$

En consecuencia, el cociente entre las intensidades a dos temperaturas diferentes  $T_1$  y  $T_2$  será

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{e^{-E/kT_2}}{e^{-E/kT_1}} = \exp \left[ + \left( \frac{E}{kT_1} \right) \left( 1 - \frac{T_1}{T_2} \right) \right]$$

Con  $I_2/I_1 = 100$ , tenemos

$$\ln 100 = \frac{E}{kT_1} \left( 1 - \frac{T_1}{T_2} \right)$$

o sea

$$1 - \frac{T_1}{T_2} = \frac{kT_1}{E} \ln 100,$$

$$\frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{kT_1}{E} (\ln 100) = 1 - \frac{1,38 \cdot 10^{-16} \cdot 1000}{3,32 \cdot 10^{-12}} \cdot 4,6 \simeq 0,83$$

$$T_2 \simeq 1200^\circ\text{K}.$$

*Entropía, irreversibilidad y desorden.* Hemos indicado repetidas veces que cuando tiene lugar una variación en un sistema aislado, éste busca su estado de probabilidad máxima. En consecuencia, la entropía del sistema crece. Si un sistema  $A$  se halla en equilibrio, no variará y su entropía permanecerá constante. Para que se produzca una transformación,  $A$  debe entrar en interacción con otro sistema  $B$ . En esta interacción es perfectamente posible que disminuya la entropía de  $A$ , pero siempre esta disminución irá acompañada de un *aumento* de energía de  $B$  tal que la entropía *total* del sistema  $A + B$  aumente durante la transformación. A partir de observaciones de este tipo podemos sacar la conclusión de que siempre que en la Naturaleza tenga lugar una transformación, la entropía del Universo deberá aumentar, aun cuando puedan producirse disminuciones locales de entropía. Este es uno de los enunciados del segundo principio de la Termodinámica.

Una transformación *reversible* es ideal y está constituida por una sucesión de estados de equilibrio, no teniendo sentido de evolución preferido. Por tanto, para las transformaciones reversibles del sistema *total* las probabilidades son *iguales*. Cuando tratemos de transformaciones reversibles de un sistema  $A$ , atribuiremos las variaciones a interacciones de  $A$  con otro sistema  $B$ . De nuevo, en una tal transformación reversible es evidente que la entropía de uno de los dos sistemas debe disminuir, pero siempre queda eso compensado por un in-

cremento igual del otro, con lo que la variación total de entropía en una transformación reversible es nula. Aun cuando las transformaciones reversibles sean ideales y aun cuando la variación de entropía total en dichas transformaciones sea nula, no deja de ser una herramienta importante para el cálculo de la diferencia de entropías entre dos estados del sistema  $A$ , por ejemplo. En efecto, esta es la técnica mediante la cual podemos calcular los cocientes entre las probabilidades de dos estados de  $A$ .

Como en las transformaciones reversibles la variación de entropía es nula y en los irreversibles es mayor que cero, la variación de entropía puede servirnos para medir la irreversibilidad de una transformación. Cuanto mayor sea la irreversibilidad, mayor es la probabilidad de que tenga lugar la transformación.

La entropía puede considerarse también como medida del «desorden»; la Naturaleza parece pasar de estados ordenados (por ejemplo, energía mecánica organizada) a desordenados (p. ej., movimiento térmico desordenado). Desde el mismo punto de vista, dos gases sin mezclar representan un estado ordenado. Cuando se difunden en una cámara común, se mezclan entre sí formando un estado desordenado. Desde luego, esta interpretación no es mas que una definición de la palabra *desorden* en función de la probabilidad; no es mas que otra manera de expresar el hecho de que la Naturaleza tiende hacia los estados más probables. Así pues, un estado desordenado es aquél que puede producirse con un gran número de combinaciones diferentes de los elementos (moléculas) de un sistema. Este significado estadístico del desorden no es compatible con el sentido ordinario de la palabra. La razón de que los papeles situados sobre ciertos escritorios parezcan estar en desorden se debe simplemente a que existen muchas combinaciones en que los papeles están desordenados y muy pocas en que están ordenados.

### PROBLEMAS

19-1. Describir algunos procesos en la Naturaleza que no vulneren el primer principio de la Termodinámica, pero que a pesar de todo, no ocurran.

19-2. Consideremos las tres transformaciones unidireccionales siguientes de un mol de gas monoatómico: (a) expansión isobárica a la presión  $P_1$  desde el volumen  $V_1$  hasta el volumen  $2V_1$ , (b) expansión isotérmica desde el estado  $(P_1, V_1)$  hasta el volumen  $2V_1$ , y (c) calentamiento del gas desde  $P_1$  hasta  $2P_1$  al volumen constante  $V_1$ . ¿Cuáles son los rendimientos mecánicos de estas trans-

formaciones? (Es decir, el cociente entre el trabajo realizado por el gas y el calor cedido al gas.)

19-3. Explicar en detalle la razón por la cual el trabajo realizado por una sustancia en una transformación cerrada pueda representarse por el área encerrada por el ciclo en un diagrama  $P$ - $V$ .

19-4. Las ecuaciones (19-2) y (19-3a, b) indican que, para una máquina de CARNOT

$$\frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Explicar detalladamente los significados de las cantidades que figuran en esta ecuación e indicar las variaciones, si las hay, que habría que aplicar a esta relación para que fuera válida para un ciclo frigorífico.

19-5. En la expansión isotérmica de un gas perfecto, todo el calor absorbido por el gas se convierte en trabajo. ¿Cuál es la razón fundamental de que el calor no pueda transformarse en trabajo con un rendimiento tan elevado en una máquina de funcionamiento periódico?

19-6. En la figura 19-6 se ha representado una transformación cerrada. Consideraremos que consta de dos ciclos

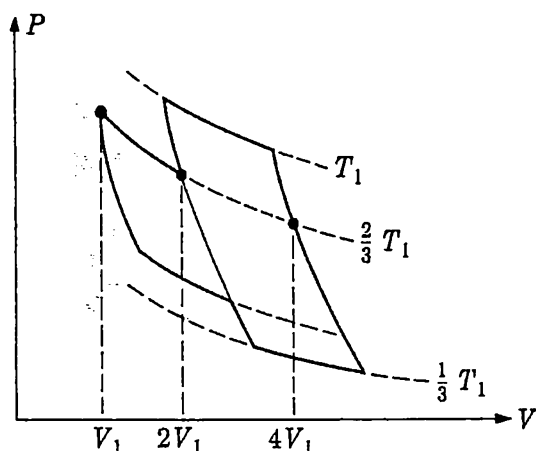


Figura 19-6

de CARNOT que funcionan entre temperaturas diferentes. Utilizando los valores de las temperaturas y volúmenes indicados en la figura, determinar el rendimiento del ciclo y demostrar que es inferior al de una máquina de CARNOT que funcione entre las temperaturas extremas que intervienen en el proceso. (El mismo resultado podría extenderse a un ciclo arbitrario descomponiéndolo en ciclos de CARNOT elementales.)

19-7. En el estudio de la figura 19-2 se vio que todas las máquinas

reversibles que funcionan entre las mismas temperaturas tienen rendimientos iguales independientemente de cuál sea la sustancia que evoluciona. ¿Qué puede decirse del rendimiento de las máquinas irreversibles? (Rend. = Trabajo/calor absorbido.)

19-8. Explicar cómo, en principio, la temperatura puede definirse de manera que sea independiente de la sustancia termométrica que interviene. Demostrar que esta definición es plausible y que da lugar a la misma escala de temperaturas que se obtiene por medio del termómetro de gas perfecto.

19-9. Demostrar que en una máquina de CARNOT  $Q_1/T_1 + Q_2/T_2 = 0$ . ¿Es también nula la suma  $Q_1 + Q_2$ ? Demostrar que para un ciclo reversible cualquiera tenemos  $\int dQ/T = 0$ . ¿Qué es  $\int dQ$ ?

19-10. Un gas perfecto ( $n$  moles, constante de los gases  $R$ ) se lleva del estado 1 al estado 3 mediante una transformación a volumen constante y otra a presión constante, según se indica en la figura 19-7. (a) ¿Cuál es el trabajo total realizado por el gas a lo largo del camino indicado? (b) ¿Cuál es la variación total de energía interna a lo largo de este camino? (c) ¿Cuál es el calor total suministrado al gas a lo largo de este

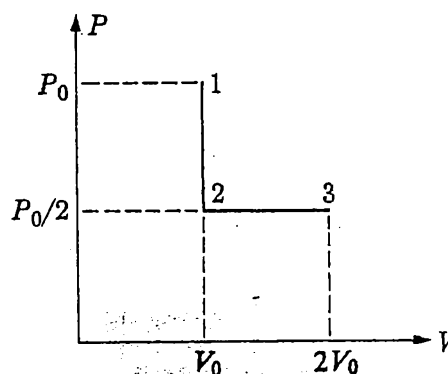


Figura 19-7



camino? (d) ¿Cuál es la variación de entropía a lo largo de este camino?

19-11. Deducir la relación dada por la ecuación (19-8) que expresa la variación de entropía de un gas perfecto que pasa de un estado  $V_1 T_1$  a un estado  $V_2 T_2$ .

19-12. Demostrar que la ecuación de estado de un gas perfecto puede expresarse en la forma  $P/P_0 = (\rho/\rho_0)^\gamma e^{(S-S_0)/C_v}$ , donde  $\gamma = C_p/C_v$ .

19-13. Describir un ciclo de CARNOT tanto en el diagrama  $P - V$  como en el  $T - S$ . ¿Qué representan las áreas encerradas en estos diagramas?

19-14. Un mol de un gas real puede hacerse pasar del estado  $A (P_1, V_1, T_1)$  al estado  $B (P_2, V_2, T_2)$  por medio de diferentes transformaciones. ¿Cuáles de las siguientes parejas varían en cantidades que son iguales para todas las transformaciones? (a)  $Q, W$ , (b)  $S, Q$ , (c)  $U, Q$ , (d)  $U, W$ , (e)  $U, S$ , (f)  $S, W$ .

19-15. Demostrar que cuando se lanzan al aire  $n$  monedas, el número de posibilidades, dado por la ecuación (19-9), de obtener  $n_1$  caras y  $n - n_1$  cruces es igual al coeficiente de  $a^{n_1} b^{n-n_1}$  en el desarrollo de  $(a + b)^n$ .

19-16. Dos fuentes térmicas que contienen cada una  $m$  kilogramos de agua, tienen las temperaturas  $T_1$  y  $3T_1$ . (a) Se ponen en contacto las fuentes y las temperaturas llegan a alcanzar el valor de equilibrio  $2T_1$ . ¿Cuál es la variación de entropía del sistema? (El sistema está constituido por las dos fuentes). (b) En la igualación irreversible de temperaturas de (a) no se ha obtenido trabajo alguno. Utilicemos ahora las fuentes para accionar una máquina térmica reversible que conste de una sucesión de ciclos de CARNOT en la cual la fuente caliente se enfría y la fría se calienta hasta que las temperaturas de ambas sean iguales. ¿Cuál es la tem-

peratura final? (c) ¿Cuál es el rendimiento termodinámico total de esta máquina?

19-17. Un depósito aislado térmicamente se divide en dos compartimientos de igual volumen mediante un tabique conductor del calor. Cada compartimiento contiene  $6 \cdot 10^{10}$  moléculas ( $= 10^{-13}$  mol) de un gas monoatómico a la temperatura  $T = 300^\circ \text{K}$ . Existe la posibilidad de que la temperatura de un compartimiento disminuya en una cantidad  $\Delta T = 0,001^\circ \text{K}$  y el calor liberado sea conducido a través del tabique y empleado en elevar la temperatura del otro compartimiento en  $10^{-3}^\circ \text{K}$ , mientras los volúmenes de los compartimientos permanecen invariables.

(a) ¿Cuál es la variación de entropía del gas cuya temperatura disminuye en  $\Delta T$ ? (b) Deducir una ecuación que exprese la variación de entropía del gas en el otro compartimiento. (c) Calcular el valor numérico de la variación de entropía del sistema (en  $\text{erg}/^\circ \text{K}$ ). (d) ¿Cuántas veces más probable es que sean iguales las temperaturas de los dos compartimientos que que difieran en  $0,002^\circ \text{K}$ ?

19-18. ¿A qué altura habría que ascender sobre el nivel del suelo para notar una variación de un 1 % en el cociente entre las densidades de número de moléculas del nitrógeno y del oxígeno en el aire? Supóngase una atmósfera isoterma  $T = 300^\circ \text{K}$ .

19-19. La atmósfera de Júpiter está compuesta probablemente de hidrógeno, helio, amoníaco y metano. La masa molecular media es aproximadamente de 3,3 y la temperatura  $-138^\circ \text{C}$ . (a) Hallar el valor de  $g$  en la proximidad de la superficie de Júpiter. (b) Hallar las alturas a las cuales las densidades de amoníaco ( $\text{NH}_3$ ) y helio se reducirían al valor de la superficie dividido por  $e$ .

19-20. Una fuente termal suminis-

tra 10 kg/min de agua subterránea a  $85^{\circ}\text{C}$ . En la proximidad existe un gran lago con agua a  $25^{\circ}\text{C}$ . Si se accionara una máquina de CARNOT entre estos dos focos caloríficos, ¿cuál sería el rendimiento termodinámico? ¿Qué potencia (en kilowatt) podría generar la máquina? Supóngase que el agua a  $85^{\circ}\text{C}$  se reduce a  $25^{\circ}\text{C}$ .

19-21. Un mol de pelotas de ping-pong de 0,5 g se distribuye sobre una superficie plana. La temperatura de las pelotas y de su medio ambiente es de  $300^{\circ}\text{K}$ . (a) Si se hiciera una foto instantánea de todas las pelotas, ¿cuántas, aproximadamente, estarían 1 cm o más sobre la superficie plana? (b) ¿Ve Vd. cómo puede expresarse su respuesta al apartado (a) en función del tiempo que transcurre observando una pelota antes de que ascienda 1 cm o más?

19-22. Explicar por qué aumenta la entropía del universo en la expansión libre de un gas perfecto, aun cuando du-

rante dicha expansión no pase calor a través de los límites del sistema.

19-23. Imaginemos una cámara cinematográfica capaz de fotografiar juntos sucesos macroscópicos y microscópicos. Se fotografían los siguientes: expansión isotérmica de un gas perfecto, compresión adiabática de un gas perfecto, un terrón que cae sobre una superficie plana desde una altura  $h$ , y un cubo de hielo que se funde en un vaso de agua caliente. (a) ¿Cuál de esos procesos parecería perfectamente razonable si se hiciera andar hacia atrás al proyector? (b) ¿En qué procesos crece la entropía? ¿En cuáles disminuye? (c) ¿Cuál es la relación entre la entropía y la direccionalidad del tiempo?

19-24. Supóngase una cascada de  $h$  metros de altura. ¿Cuál es la variación de entropía por segundo en el Universo a consecuencia de que caiga desde una altura  $h$  agua a temperatura  $T$  a razón de  $q$  kg/s?

## MECÁNICA DE FLUIDOS

*Resumen.* Empezamos con un estudio de la distribución de presiones necesaria para mantener un fluido en equilibrio bajo la influencia de las fuerzas de interacción y de inercia. Se dan ejemplos que presentan el equilibrio del fluido en un sistema de coordenadas acelerado y en otro giratorio. Sigue después una visión rápida de los diversos tipos de movimiento de fluidos y una descripción del movimiento laminar mediante líneas de corriente y un campo de velocidades. El campo no puede ser arbitrario sino que debe satisfacer las condiciones impuestas por las leyes generales del movimiento. Estas condiciones conducen a los teoremas de Gauss y de Bernoulli.

En nuestros estudios anteriores acerca de los fluidos (líquidos y gases), hemos prescindido casi siempre de la influencia de las fuerzas exteriores y del movimiento total sobre la distribución de la presión en el fluido. En este capítulo estudiaremos algunos aspectos elementales de los problemas que surgen a causa de las fuerzas y del movimiento.

**20-1 Equilibrio de un fluido.** La fuerza resultante que se ejerce sobre todas las partes de un fluido en equilibrio es nula. Cuando la fuerza exterior es la de la gravedad, un elemento de volumen del fluido está en equilibrio bajo la influencia de su peso y de la presión que le ejerce el fluido que le rodea, según se representa en la figura 20-1. (Para un estudio del concepto de presión, véase el apart. 13-3.) La fuerza resultante debida a la presión del fluido que le rodea será igual al peso del elemento de fluido. La línea de acción de la fuerza pasará por el centro de masa del elemento, ya que éste se halla también en equilibrio para la rotación. La presión que el elemento de fluido ejerce sobre el fluido que lo rodea ejerce, desde luego, una fuerza igual y directamente opuesta que mantiene en equilibrio al fluido exterior.

Si se sustituye el elemento de fluido por otro cuerpo de igual forma y que ocupe la misma posición, el equilibrio alrededor de él no se altera y la presión que sobre el cuerpo ejercerá el fluido que lo rodea es la misma que ejercía sobre el elemento de fluido que hemos desalojado. En consecuencia, la fuerza que se ejerce sobre el elemento de fluido y la que se ejerce sobre el cuerpo que lo sus-

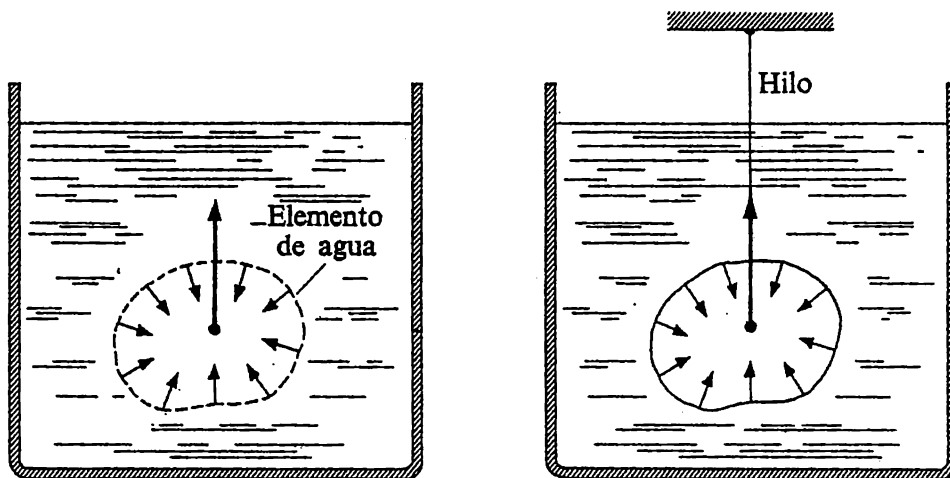


Fig. 20-1. La presión y la fuerza resultante ejercida por el fluido que rodea a un elemento de fluido siguen siendo las mismas si sustituimos el elemento por otro objeto cualquiera de igual forma y que ocupe la misma posición del elemento de fluido.

tituye son de igual magnitud, línea de acción y sentido (principio de Arquímedes). Así pues, cuando la fuerza exterior es la de la gravedad, la fuerza sobre el cuerpo sumergido es de igual magnitud, pero sentido contrario, al peso del elemento fluido desalojado. A la fuerza hacia arriba que se ejerce sobre el cuerpo sumergido suele dársele el nombre de *empuje*.

**EJEMPLO.** Una barra recta uniforme de longitud  $L$ , sección recta de área  $A$  y densidad  $\rho$  puede girar libremente alrededor de un eje horizontal  $P$ , situado a una distancia  $d = L/2$  bajo la superficie libre del agua, según se indica en la figura 20-2. La fuerza de la gravedad está dirigida hacia abajo y es igual a  $F_1 = A\rho Lg$  y tiene un brazo de palanca  $d_1 = L/2 \sin \theta$  respecto al eje  $P$ . El empuje tiene por magnitud  $F_2 = A\rho_0 g (L/2 \cos \theta)$  y tiene un brazo de palanca  $d_2 = (L/4 \cos \theta) \sin \theta$  ( $\rho_0$  = densidad del agua).

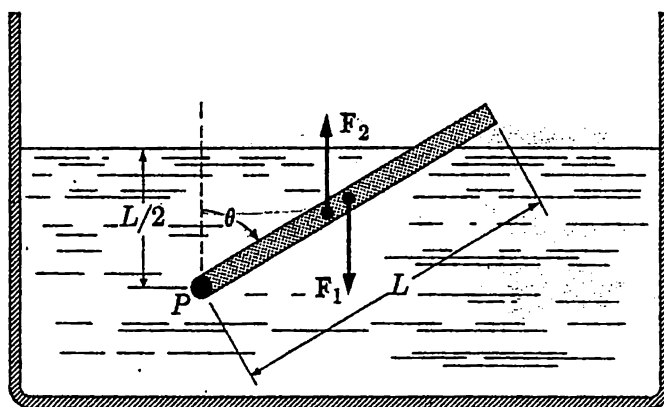


Figura 20-2

El equilibrio exige que el momento resultante sea nulo, por lo que tendremos  $F_1 d_1 = F_2 d_2$ . Sustituyendo los valores de la magnitud de la fuerza y del brazo de palanca, obtenemos la ecuación

$$\frac{\rho_0}{4} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} = \rho \sin \theta$$

Esta ecuación tiene las soluciones  $\theta = 0$  y  $\cos^2 \theta = \rho_0/4\rho$ . Obsérvese que una posición de equilibrio que no sea la  $\theta = 0$  sólo es posible si  $\rho > \rho_0/4$ . Por otra parte, la geometría del problema exige que los ángulos considerados sean menores que  $60^\circ$ , por lo que  $\rho$  debe ser menor que  $\rho_0$ ; es decir, un equilibrio del tipo representado en la figura 20-2 sólo será posible si  $\rho_0/4 < \rho < \rho_0$ . Si  $\rho = \rho_0/2$ , obtenemos  $\cos \theta = 1/2$ , y, por tanto,  $\theta = 45^\circ$ .

Es evidente que la presión en el seno de un fluido aumenta con la profundidad, hecho que hemos utilizado en nuestro estudio de la ley de los gases y en el ejemplo referente a la distribución de la densidad en la atmósfera. La presión en el seno del fluido dependerá de  $y$  de tal manera que la variación de presión a lo largo de una distancia  $dy$  sea igual al peso  $\rho g dy$  del elemento de fluido de sección unidad y espesor  $dy$  ( $\rho$  = densidad). Entonces, si es  $y$  la coordenada vertical creciente hacia arriba, tenemos

$$dP = -\rho g dy \quad (20-1)$$

(véase fig. 20-3). Cuando tratemos con líquidos y no con gases, podremos considerar constante la densidad, y la presión será función lineal de  $y$ ,  $P = -\rho g y + \text{const}$ , o sea

$$P + \rho g y = \text{const} \quad (20-2)$$

En el ejemplo particular de la figura 20-3, medimos  $y$  desde el fondo de un recipiente lleno de líquido hasta una altura  $H$ . La presión en  $y = H$  es igual a la presión atmosférica  $P_0$ , la constante de la ecuación (20-2) es  $P_0 + \rho g H$ , y la distribución de la presión en el recipiente viene dada por

$$P + \rho g y = P_0 + \rho g H$$

Si la densidad varía con  $y$ , la distribución de la presión no se obtendrá de manera tan sencilla, según ya se indicó en nuestro estudio de la distribución de la densidad en una atmósfera isotérmica.

Es importante hacer notar que la presión en el líquido se ajusta por sí misma de tal manera que las superficies de presión constante sean normales a la fuerza exterior, independientemente de la forma del recipiente. (Si hubiera una variación de presión a lo largo de dicha superficie, habría una fuerza resultante paralela a la superficie que actuaría sobre cada elemento fluido y, en conse-

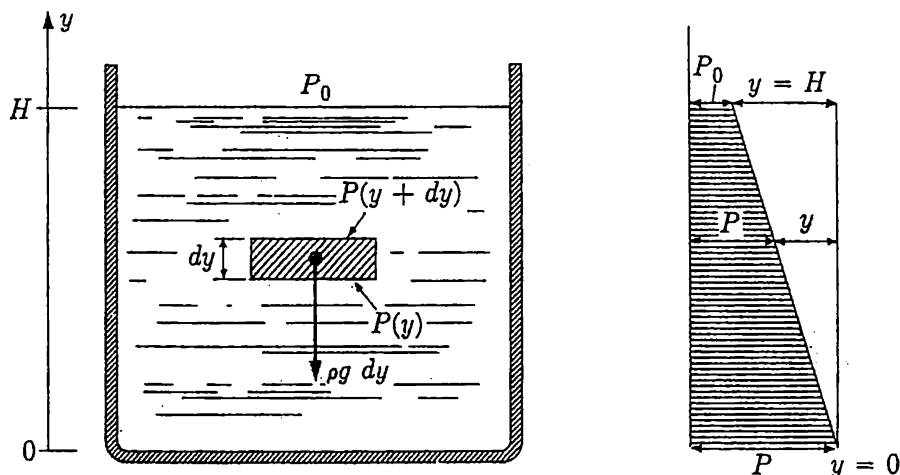


Fig. 20-3. Distribución de la presión en un líquido en reposo ( $\rho$  constante).  $P + \rho gy = \text{const.}$

cuencia, un movimiento sobre la superficie.) La variación máxima de la presión en el fluido se halla en la dirección normal a los superficies de presión constante. La variación de presión por unidad de longitud en esa dirección recibe el nombre de *gradiente de presión* en el fluido. El gradiente de presión es un vector de magnitud igual a la fuerza exterior por unidad de volumen, pero de sentido opuesto. Cuando la fuerza exterior es la de la gravedad, tenemos  $dP/dy = -\rho g$  según la dirección vertical. La variación de presión por unidad de longitud en una dirección  $s$  que forme un ángulo  $\theta$  con la vertical es, pues,  $dP/ds = -\rho g \cos \theta$ .

Si, además de la gravedad, se ejercen sobre el fluido otras fuerzas, las superficies de igual presión no tendrán por qué ser planos horizontales. Como ejemplos, consideraremos como sistema un fluido en un recipiente, primero con aceleración constante y luego girando con velocidad angular constante.

*Fluido en un recipiente-sistema con aceleración constante.* En la figura 20-4, el sistema constituido por el agua y su recipiente tiene una aceleración constante  $a_0$ . En un sistema de coordenadas solidario al recipiente, los fluidos están en reposo (una vez desaparecidas las oscilaciones) bajo la influencia de la gravedad y de la fuerza de inercia (cap. 11) resultante de la aceleración. En este sistema de coordenadas un elemento de masa  $dm$  del líquido se halla sometido a la fuerza de la gravedad  $g dm$  y a la fuerza de inercia  $-a_0 dm$ . Hemos tratado aquí  $g$  como vector con el fin de incorporar la dirección y sentido de la fuerza de la gravedad. La presión en el líquido varía de tal manera que cada elemento de fluido se halla en equilibrio bajo la influencia de la fuerza  $dm(g - a_0)$  y de la fuerza que corresponde al gradiente de presión del fluido. Las superficies de igual presión serán normales, en tal caso, a la fuerza  $dm(g - a_0)$ . La superficie del agua en el recipiente es uno de estos planos de igual presión y estará

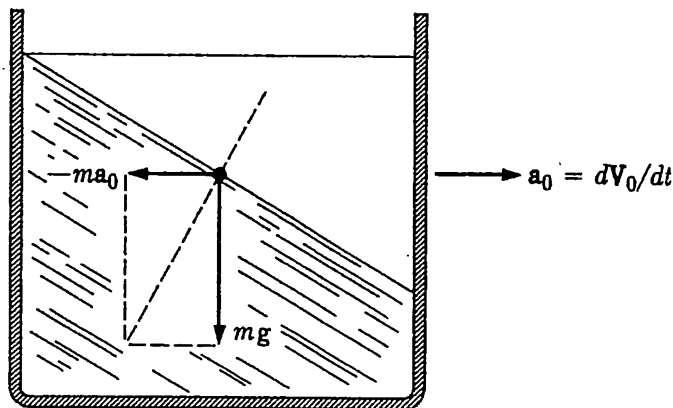


Fig. 20-4. Recipiente de agua acelerado.

inclinada un ángulo  $\theta$  determinado por  $\operatorname{tg} \theta = a_0/g$ , según se indica en la figura 20-4. La magnitud de la variación de presión por unidad de longitud, normal a los planos de presión constante, será pues,  $dP/ds = \rho g \sqrt{1 + (a_0/g)^2}$ .

Si se acelerara el recipiente hacia arriba o hacia abajo, la magnitud del gradiente de presión sería  $\rho(g + a_0)$  o  $\rho(g - a_0)$ , respectivamente. En el caso particular de caída libre, cuando  $a_0 = g$ , el gradiente de presión en el líquido es nulo.

Es interesante estudiar el efecto de un fluido acelerado sobre el empuje que se ejerce sobre un cuerpo sumergido. El fluido acelerado que rodea al cuerpo sumergido ejerce una fuerza resultante sobre el cuerpo. Si todo el fluido tiene una aceleración  $a_0$ , la fuerza (gravedad más fuerza de inercia) que se ejerce sobre un elemento de volumen  $dV$  del fluido es  $\rho(g - a_0) dV$  en un sistema de coordenadas acelerado que siga al fluido. El fluido que rodea al elemento ejerce sobre éste una fuerza igual y opuesta, es decir,  $\rho(-g + a_0) dV$ , donde  $\rho$  es la densidad del fluido. (La fuerza  $-\rho g dV$  es el empuje ordinario y a  $\rho a_0 dV$  se le puede llamar empuje de inercia.) Esta fuerza resultante ejercida por el fluido que le rodea no varía cuando se sustituye el elemento de fluido por el cuerpo sumergido. Si es  $\rho_1$ , la densidad del cuerpo, la fuerza exterior que se ejerce sobre él (gravedad más fuerza de inercia) es  $\rho_1(g - a_0) dV$ , y el fluido que le rodea actúa sobre el cuerpo con el empuje resultante  $\rho(-g + a_0) dV$ . La fuerza resultante  $F'$  ejercida sobre el cuerpo medida desde el sistema de coordenadas acelerado (fig. 20-5) será pues

$$F' = (\rho_1 - \rho)(g - a_0) dV \quad (20-3)$$

Evidentemente, el sentido de la fuerza resultante depende de la diferencia entre las densidades del cuerpo sumergido y el fluido.

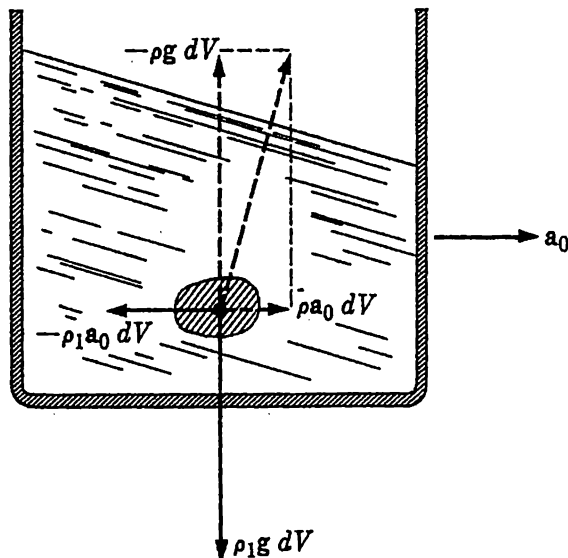


Fig. 20-5. Fuerzas que se ejercen sobre un cuerpo sumergido en un fluido acelerado, medidas desde el sistema de coordenadas del fluido. Las líneas de trazos representan empujes producidos por la presión del fluido que le rodea.

En la figura 20-6 puede verse un experimento que pone de manifiesto este resultado. Se fija al extremo de un hilo una pelota de ping-pong que cuelga del tapón en el interior de una botella. La pelota tiene una densidad media mayor que la del aire desalojado ( $\rho_1 > \rho$ ), y cuando se mueve la botella hacia la derecha con una aceleración  $a_0$ , sobre la pelota se ejercerá una fuerza de inercia resultante hacia la izquierda y la pelota oscila hacia la izquierda. Según la ecuación (20-3), la fuerza resultante que se ejerce sobre la pelota en la dirección horizontal es  $-(\rho_1 - \rho)a_0 dV$ , y tiene el mismo sentido que  $-a_0$ , ya que  $(\rho_1 - \rho) > 0$ .

A continuación, repetimos el experimento con la botella llena de agua. Se invierte la botella con el fin de mantener sumergida la pelota. Cuando se da a

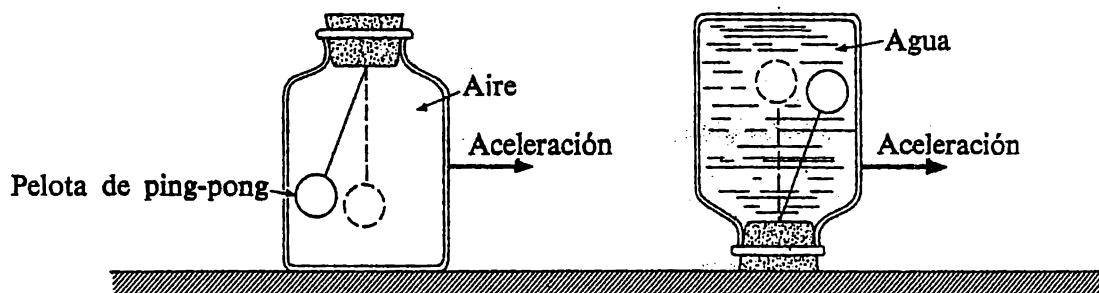


Fig. 20-6. Ejemplo que pone de manifiesto las fuerzas de inercia y empuje en un fluido acelerado. En el aire la pelota de ping-pong se desvía en sentido contrario al de la aceleración, pero en el agua se desvía en el mismo sentido que la aceleración.



la botella una aceleración  $a_0$  hacia la derecha, la pelota no se mueve hacia atrás, sino que *se mueve hacia adelante en la misma dirección y sentido que la aceleración*. El empuje que ejerce el líquido es ahora mayor que la fuerza de inercia que actúa sobre el cuerpo, ya que la densidad del agua es mayor que la densidad media de la pelota. En otras palabras, ahora  $(\rho_1 - \rho)$  es negativo y la fuerza resultante sobre el cuerpo  $-(\rho_1 - \rho)a_0 dV$  tiene la misma dirección y sentido que  $a_0$ .

Si la aceleración de la botella está dirigida hacia abajo y es igual a  $g$ , es decir, cuando la botella se halla en caída libre, la fuerza resultante que se ejerce sobre el cuerpo es nula en el sistema de coordenadas de la botella y el cuerpo no se acelera respecto al fluido. Todo elemento, independientemente de su masa, adquiere la aceleración de caída libre  $g$ .

*Fluido en un recipiente —sistema giratorio con velocidad angular constante.* Supongamos ahora que se pone en rotación con velocidad angular constante  $\omega$  alrededor del eje  $z$ , el sistema constituido por el agua y el recipiente (véase fig. 20-7). En un sistema de coordenadas que gire con el vaso, el fluido está en reposo y un elemento de fluido situado a una distancia  $r$  del eje de rotación se halla en equilibrio bajo la acción de la fuerza de la gravedad  $g dm$ , la de inercia (centrífuga)  $\omega^2 r dm$ , y la fuerza resultante de la presión en el fluido. También ahora, las superficies de igual presión deben ser normales a la fuerza resultante  $dm(g + \omega^2 r)$ , y el ángulo entre la superficie del fluido y el plano horizontal vendrá dado por  $\tan \theta = \omega^2 r / g$ ; es decir, la pendiente de la superficie aumenta con la distancia al eje. Si se expresa la ecuación de la superficie en la forma  $z = z(r)$ , tenemos  $\tan \theta = dz/dr$  y se obtendrá una expresión de la superficie de igual presión a partir de la ecuación

$$\frac{dz}{dr} = \frac{\omega^2}{g} r$$

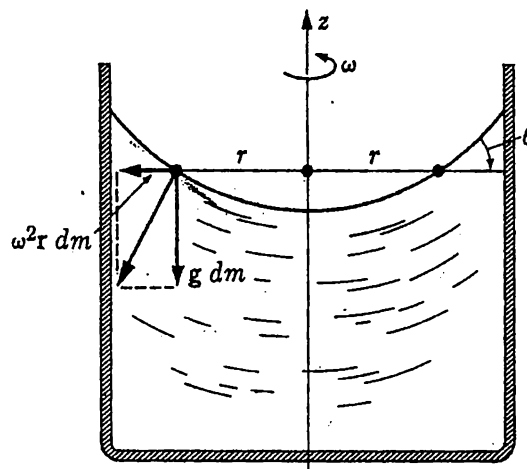


Fig. 20-7. Fluido que gira con velocidad angular constante.



que tiene la solución

$$z = z_0 + \frac{\omega^2}{2g} r^2$$

La superficie libre del agua es una de las superficies de presión constante y forma una superficie parabólica descrita por la ecuación anterior, donde  $z_0$  es la altura de la superficie del agua en  $r = 0$ .

**20-2 Descripción del movimiento de un fluido.** *Campo de velocidades y líneas de corriente.* Cuando observamos fluidos en movimiento, vemos varios tipos evidentes de movimiento que parecen fundamentalmente diferentes. Consideremos, por ejemplo, el movimiento muy irregular y aparentemente imposible de predecir, que lleva el agua en una corriente rápida y turbulenta y comparémoslo con la circulación regular y tranquila en un río ancho. En la circulación irregular o *turbulenta*, un elemento de fluido se mueve siguiendo una trayectoria aparentemente al azar, no muy diferente del movimiento de una molécula en un gas. En cambio, en la circulación regular o *lamelar*, cada elemento de fluido sigue una trayectoria bien definida. Otro tipo de movimiento es la salida de un líquido por un grifo o una manguera en los cuales el chorro de agua se divide en gotitas que se mueven como puntos materiales sueltos. Muchos de los problemas referentes a la circulación turbulenta y a los chorros son complicados; limitaremos nuestro estudio al régimen lamelar.

Un elemento de un fluido en régimen lamelar sigue una trayectoria bien definida a la que llamaremos *línea de corriente*.\* Sólo vamos a considerar aquí el caso de circulación independiente del tiempo, en el cual todos los elementos de fluido que pasan por un punto dado del espacio siguen la misma línea de corriente con la misma velocidad. Es decir, las propiedades del fluido tales como la densidad, la presión y la velocidad en un punto fijo del espacio, no varían con el tiempo. Es importante tener en cuenta que aun cuando la velocidad del fluido en un punto dado no varíe con el tiempo, puede variar de un punto a otro, como ocurre en el caso del agua que circula por una tubería de sección variable.

En estas condiciones, podremos representar gráficamente el movimiento del fluido, de una vez para siempre, por medio de líneas de corriente que describan las trayectorias de los elementos de fluido. En cada punto, la velocidad tiene la dirección de las líneas de corriente; luego, dibujando el vector velocidad en cada punto del fluido habremos especificado totalmente su estado de movimiento. Cuando cada punto del espacio define de esta manera un vector velocidad, decimos que el movimiento está especificado por un *campo de vectores*

\* Las trayectorias y las líneas de corrientes sólo coinciden cuando las condiciones de la circulación no dependen del tiempo, cual es el caso que vamos a tratar.

*velocidad:* En muchas ramas de la Física suele ser corriente y útil la descripción de las propiedades del espacio en función de campos vectoriales. En los capítulos anteriores, hemos descrito la fuerza gravitatoria en función de un campo de fuerzas y para las fuerzas eléctricas y magnéticas se emplean también descripciones análogas.

Es evidente que el campo de velocidades del fluido y el campo de presiones correspondiente no pueden ser arbitrarios, sino que deben ser compatibles con las leyes fundamentales del movimiento, es decir, con la conservación de la masa, de la cantidad de movimiento y de la energía, todas las cuales imponen ciertas condiciones que debe cumplir el campo de velocidades. La condición impuesta por el principio de conservación de la masa es particularmente sencilla y valiosa, por lo que vamos a estudiarla antes de dar ejemplos específicos de campos de circulación.

*Conservación de la masa.* Consideremos la circulación de un fluido por un tubo de sección variable, como el indicado en la figura 20-8. Si la densidad del fluido en todo punto del tubo es independiente del tiempo, también lo será la masa por unidad de longitud del tubo. Por tanto, la masa que circula por el tubo en unidad de tiempo debe ser la misma en todos los puntos, por lo que la velocidad a lo largo del tubo deberá variar cuando varíe el área de su sección recta. Para estudiar esta variación, consideremos el volumen comprendido entre los dos planos fijos de áreas  $A_1$  y  $A_2$  indicados en la figura 20-8. Cuando el fluido se desplaza una distancia  $ds_1$  a través del plano  $A_1$ , penetra a través de éste en la región comprendida entre  $A_1$  y  $A_2$  una masa  $A_1\rho_1 ds_1$ . La masa que penetra por unidad de tiempo será, pues,  $A_1\rho_1(ds_1/dt) = A_1\rho_1u_1$ . Pero como la masa total entre  $A_1$  y  $A_2$  es constante, la masa que sale del tubo por  $A_2$  debe ser igual a la masa que penetra. Si es  $u_2$  la velocidad en  $A_2$  y  $\rho_2$  la densidad en el mismo lugar, la masa que circula en unidad de tiempo es  $A_2\rho_2u_2$  y la conservación de la masa exige que

$$A_1\rho_1u_1 = A_2\rho_2u_2 = \text{const} \quad (20-4)$$

Si la densidad del fluido es constante (como ocurre con la mayoría de los líquidos ya que son prácticamente *incompresibles*), se deduce que la conservación de la masa exige que la velocidad sea inversamente proporcional al área de la sección del tubo.

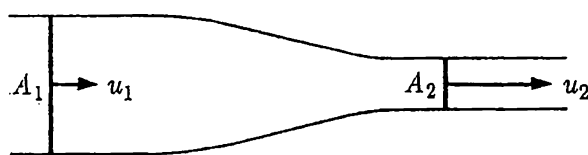


Fig. 20-8. La conservación de la masa impone la condición  $A_1\rho_1u_1 = A_2\rho_2u_2$ .

En este estudio hemos considerado la circulación por un tubo o tubería real. Sin embargo, el resultado obtenido es aplicable a todo campo independiente del tiempo, de la manera siguiente. Imaginemos trazadas las líneas de corriente de elementos de fluido vecinos, de manera que tengamos un haz de líneas de corriente que formen un tubo de corriente, según se indica en la figura 20-9. Como no hay componentes de la velocidad normales a la «pared» del tubo de corriente, la circulación de masa debe ser la misma en todos los puntos y obtenemos la relación de la ecuación (20-4) para la variación de la velocidad a lo largo del tubo de corriente.

En el caso de un fluido incompresible, el área de la sección recta de un tubo de corriente constituye una medida de la velocidad del fluido, hecho que puede aprovecharse para describir gráficamente la circulación de un fluido. Si hacemos el número de líneas por unidad de superficie normal a ellas igual a la magnitud de la velocidad, tenemos una descripción gráfica cuantitativa del campo de velocidades, ya que las líneas de corriente describen tanto la magnitud como la dirección y sentido del vector velocidad. La magnitud de la velocidad es proporcional a la densidad de líneas de corriente.

Este método también puede emplearse para dar descripciones análogas de los campos eléctrico y magnético, por lo que convendrá tener presente el procedimiento.

*Teorema de Gauss.* Vamos a considerar el campo creado por una fuente de simetría esférica que emita  $Q$  g/s de fluido hacia la región que la rodea. Las líneas de corriente serán rectas que salen radialmente de la fuente, según se indica en la figura 20-10. Podríamos materializar aproximadamente una distribución de este tipo por un flujo de agua que salga de una manguera sumergida en agua y provista de algún tipo de «distribuidor» esférico (por ejemplo, un boquerel esférico). También podría obtenerse una distribución radial como la

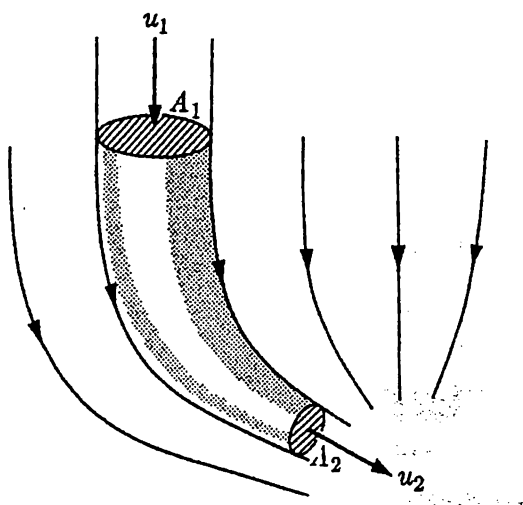


Fig. 20-9. Haz de líneas de corriente que forman un tubo de corriente.

de la figura con una superficie esférica (globo) que se dilate radialmente con una velocidad radial inversamente proporcional al radio de la esfera. También podría obtenerse un campo de simetría esférica al atravesar una corriente un pequeño orificio practicado en una placa. El campo al otro lado de la placa será aproximadamente igual que el de una fuente puntiforme situada en el orificio (se supone, desde luego, régimen lamelar). La velocidad  $u$  del fluido tendrá magnitud constante sobre toda una superficie esférica de radio  $r$  con la fuente en el centro y podrá obtenerse esta velocidad directamente del principio de conservación de la masa. El área de la superficie esférica es  $4\pi r^2$  y si es  $\rho$  la densidad del fluido, obtenemos

$$4\pi r^2 \rho u = Q \quad \text{o sea} \quad u = \frac{Q}{4\pi \rho} \frac{1}{r^2}$$

La velocidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la fuente. Incidentalmente, podemos hacer notar que si se toma el número de líneas de corriente que atraviesan normalmente la unidad de superficie igual a la magnitud de la velocidad, el número total de líneas de corriente que parten de la fuente es  $4\pi r^2 u = Q/\rho$ . Este mismo número de líneas de corriente deberá atravesar cualquier superficie cerrada que rodee a la fuente. Por tanto, si la componente normal a la superficie (fig. 20-11) de la velocidad es  $u_n = u \cos \theta$ , tenemos

$$\int u (dS \cos \theta) = \int u_n dS = \frac{Q}{\rho} \quad (20-5)$$

Esta relación, referente al número de líneas de corriente o de campo, se conoce con el nombre de *teorema de Gauss*. A los campos gravitatorio y eléctrico pue-

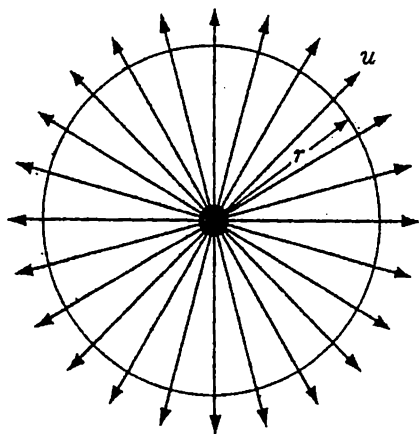


Fig. 20-10. Líneas de corriente que parten de una fuente con simetría esférica.

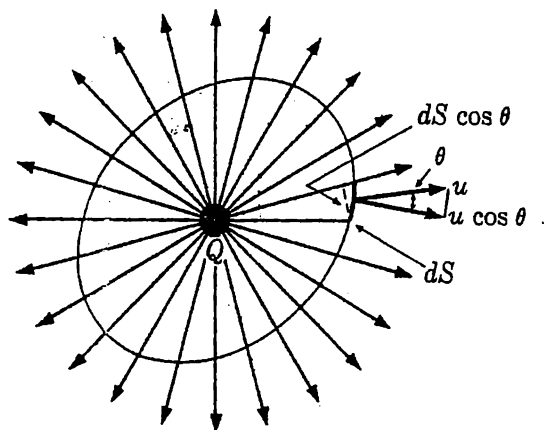


Fig. 20-11. La masa total que fluye a través de una superficie cualquiera que rodee a una fuente puede escribirse en la forma  $\rho \int u_n dS$  (teorema de Gauss).

den aplicarse consideraciones totalmente análogas. Por ejemplo, el campo eléctrico corresponde a la velocidad del fluido y la intensidad  $Q$  de la corriente fluida corresponde a la carga eléctrica.

**20-3 Relación entre la velocidad y la distribución de la presión.** *Teorema de Bernoulli.* Como ya conocemos las condiciones impuestas al campo de velocidades por el principio de conservación de la masa, podemos pasar a estudiar las condiciones correspondientes resultantes de consideraciones acerca de la cantidad de movimiento y de la energía. De este estudio obtendremos la relación que debe existir entre los campos de presiones y velocidades para que se cumplan las leyes generales del movimiento. Convendrá empezar con las observaciones cualitativas siguientes.

Cuando un fluido se halla en reposo bajo la acción de la gravedad, el gradiente de presión en el fluido es  $dP/dy = -\rho g$ , según se vio en el apartado 20-1. Si es constante la densidad, este gradiente corresponde a una distribución de la presión dada por  $P + \rho gy = \text{constante}$ . Este es el caso representado en la figura 20-12a). La presión en todos los puntos del interior del líquido es mayor que la presión exterior  $P_0$ . Si quitamos ahora el fondo del recipiente, el líquido adquirirá la aceleración de caída libre, como en la parte (b) de la figura. Se anula entonces el exceso de presión en el líquido; la presión en todos los puntos del líquido se hace igual a la presión exterior  $P_0$ . Por último, en la figura 20-12(c), la situación es intermedia entre las de (a) y (b) y es más representativa, en general, de los problemas referentes al movimiento de fluidos. En (c), tan sólo una pequeña porción del fluido próximo al orificio de salida adquiere la aceleración de caída libre correspondiente a la fuerza exterior de la gravedad y solamente en esa región caerá la presión a  $P_0$  a consecuencia del movimiento. La distribución de la presión en el resto del fluido corresponde a la diferencia entre la aceleración de caída libre y la aceleración real del fluido. Para determinar esta distribución de la presión es necesario emplear las leyes del movimiento que relacionan las fuerzas, las variaciones de cantidad de movimiento y las energías cinéticas de un elemento fluido.

Consideremos en primer lugar la figura 20-13, que presenta un fluido incompresible que se mueve a lo largo de un tubo horizontal de sección variable. Como el fluido es incompresible, el volumen de un elemento de fluido no variará al circular por el tubo. En consecuencia, cuando se desplaza hacia la derecha el elemento de fluido desde la posición indicada en (a) hasta la indicada en (b), el volumen  $dV$  desplazado en el límite de la izquierda es igual al volumen  $dV$  desplazado en el límite de la derecha del elemento de fluido. Las velocidades del fluido en los límites izquierdo y derecho son, respectivamente,  $u_1$  y  $u_2$ . El efecto resultante del desplazamiento es, pues, totalmente equivalente a quitar del límite de la izquierda un elemento de volumen  $dV$  de energía cinética

$\rho dV(u_1^2/2)$  y añadir a la derecha un elemento de volumen  $dV$  de energía cinética  $\rho dV(u_2^2/2)$ . La ganancia total de energía debida al desplazamiento será, pues,  $(\rho u_2^2/2 - \rho u_1^2/2) dV$ . El trabajo realizado por la presión sobre el límite de la izquierda es  $P_1 dV$  y el trabajo realizado sobre el límite de la derecha es  $-P_2 dV$ . El trabajo total es, pues,  $(P_1 - P_2) dV$ . Igualando el trabajo total realizado sobre el elemento de volumen a la ganancia correspondiente de energía cinética, obtenemos  $P_1 - P_2 = \rho u_2^2/2 - \rho u_1^2/2$ , que también puede escribirse en la forma

$$P_1 + \rho \frac{u_1^2}{2} = P_2 + \rho \frac{u_2^2}{2} \quad (\text{circulación horizontal})$$

Como esta relación es aplicable al movimiento de un fluido a lo largo de un tubo horizontal, no entra en ella el efecto de la gravedad. Si se inclina el tubo de la figura 20-13 quedando el extremo de la izquierda a una altura  $y_1$  y el de la derecha a otra altura  $y_2$ , el efecto del desplazamiento no sólo es incrementar la energía cinética en la cantidad dada anteriormente, sino también incrementar la energía potencial. Cuando se incluye este efecto, se obtiene

$$P_1 + \rho g y_1 + \rho \frac{u_1^2}{2} = P_2 + \rho g y_2 + \rho \frac{u_2^2}{2} \quad (20-6)$$

Esta relación entre la distribución de presiones y la distribución de velocidades es el llamado *teorema de Bernoulli*.

Aun cuando en la deducción iba implícita la circulación por una tubería real, el resultado (20-6) es aplicable a cualquier tubo de corriente de una circulación arbitraria. En otras palabras, cuando se mueve un elemento de fluido a lo largo de su línea de corriente, la suma de su presión  $P$ , su energía potencial

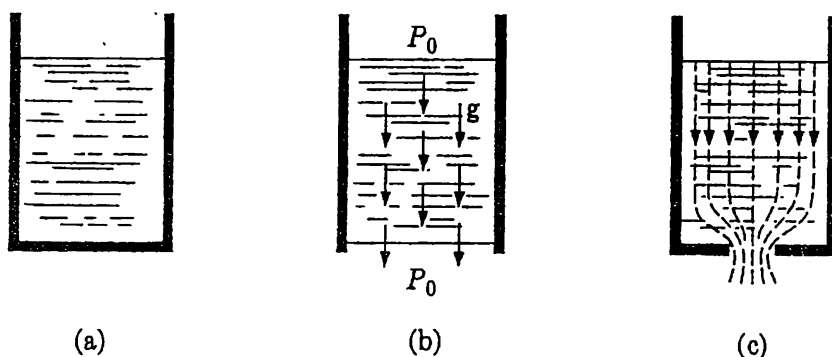


Fig. 20-12. (a) El fluido está en reposo. La presión en el fluido es mayor que  $P_0$ . (b) El exceso de presión en el líquido desaparece al adquirir la aceleración de caída libre. (c) El fluido se acelera, pero no uniformemente. La presión no es tan grande como en (a) pero es mayor que en (b).

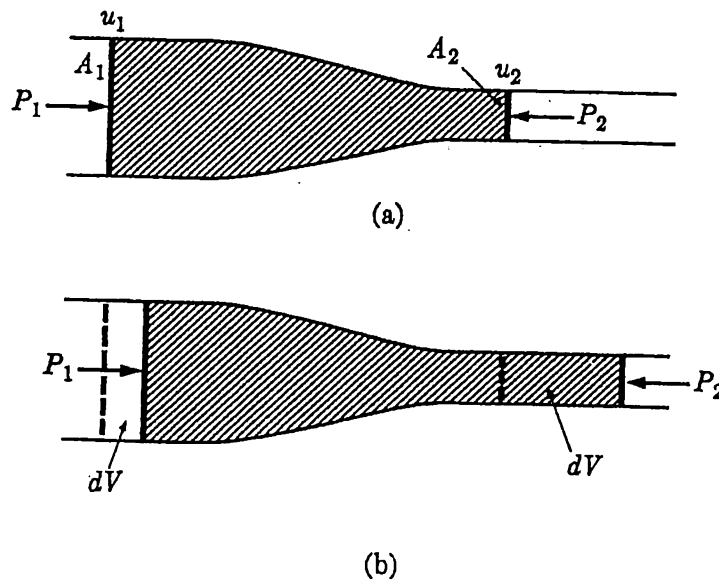


Fig. 20-13. Cuando se desplaza un fluido incompresible desde la posición indicada en (a) hasta la indicada en (b), gana una energía cinética  $dV(\rho u_2^2/2 - \rho u_1^2/2)$ , donde  $dV$  es el volumen desplazado. El trabajo correspondiente realizado por la presión es  $(P_1 - P_2)dV$ ; es decir,  $P_1 + \rho u_1^2/2 = P_2 + \rho u_2^2/2$ .

$\rho gy$  y su energía cinética  $\rho u^2/2$ , se mantiene constante. Vemos que la presión es elevada donde la velocidad es baja y viceversa.

Es importante recordar que la ecuación de Bernoulli (20-6) sólo vale para el caso de un *fluido incompresible, no viscoso, en régimen lamelar*.

**EJEMPLO 1.** Para ilustrar la utilización de la ecuación de Bernoulli, hagamos referencia a la figura 20-12(c) y calculemos la velocidad de salida del agua por el orificio de la base del depósito. Sea  $A_2$  el área de este orificio y  $A_1$  el área de la sección recta del depósito. Si es  $u_2$  la velocidad en  $A_2$ , la superficie del agua en el depósito bajará con una velocidad  $u_1 = (A_2/A_1)u_2$  de acuerdo con el principio de conservación de la masa. La presión  $P_1$  en la superficie es igual a la presión atmosférica exterior  $P_0$  y también es igual a ésta la presión  $P_2$  a la salida. Si el depósito está lleno hasta una altura  $H$ , tenemos en la ecuación de Bernoulli  $y_2 - y_1 = H$  y obtenemos

$$P_1 + \rho gH + \rho \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2 \frac{u_2^2}{2} = P_2 + \rho \frac{u_2^2}{2}$$

y como  $P_1 = P_2$ , la velocidad en  $A_2$  será

$$u_2 = \sqrt{\frac{2gH}{1 - A_2^2/A_1^2}}$$

En muchos casos prácticos, tenemos  $A_2/A_1 \ll 1$  y la velocidad se reduce a  $u_2 \simeq \sqrt{2gH}$ .



**EJEMPLO 2.** Como otro ejemplo de utilización del teorema de Bernoulli, determinemos la llamada presión de estancamiento sobre un obstáculo situado en un fluido en movimiento, según se indica en la figura 20-14. El fluido incidente lleva una velocidad uniforme  $U$ . El obstáculo altera la circulación uniforme en la forma indicada en la figura. En el punto  $A$  la velocidad será nula y la presión  $P_e$  en dicho punto será mayor que la presión  $P_0$  en el fluido no perturbado. Como el fluido incidente lleva la velocidad uniforme  $U$ , del teorema de Bernoulli obtenemos,

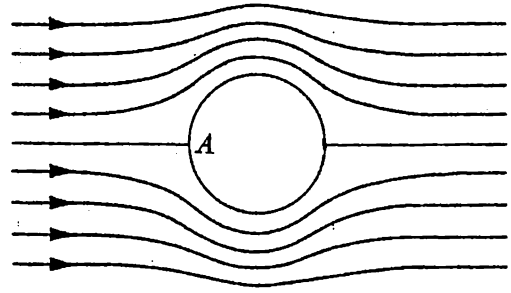


Figura 20-14

$$P_0 + \rho \frac{U^2}{2} = P_e$$

En otras palabras, el exceso de presión en el punto  $A$  es  $P_e - P_0 = \rho U^2/2$ .

**20-4 Extensión del teorema de Bernoulli a un fluido compresible.** Complementaremos los estudios del apartado anterior con una deducción del teorema de Bernoulli para fluidos compresibles. Partiremos de un campo dado de velocidades del fluido y lo supondremos independiente del tiempo. Se conocerá entonces la velocidad  $u$  de un elemento de fluido en función de su coordenada curvilínea de posición  $s$  a lo largo del tubo. Como esta velocidad  $u(s)$  de un elemento del fluido suele variar de un punto a otro, el fluido tendrá una cierta aceleración en cada punto de la trayectoria. Esta aceleración se puede expresar en función de la función velocidad  $u(s)$  dada.

La variación de velocidad cuando el elemento del fluido recorre una distancia  $ds$  es, pues,  $(du/ds)ds$  y la variación instantánea por unidad de tiempo es

$$a = \frac{ds}{dt} \frac{du}{ds} = u \frac{du}{ds} = \frac{d(u^2/2)}{ds} \quad (20-7)$$

Las fuerzas que se ejercen sobre un elemento del fluido de longitud  $ds$ , situado en  $s$ , son la de la gravedad y la fuerza producida por la variación de presión a lo largo de  $s$ . Esta última es  $-A dP$ , donde  $dP$  es la variación de la presión en la longitud  $ds$  ( $A$  = área de la sección recta del tubo), según se indica en la figura 20-15. La componente de la fuerza de la gravedad en la dirección  $s$  es  $-A \rho g ds \cos \theta = -A \rho g dy$ , ya que  $ds \cos \theta = -dy$  ( $\theta$  es el ángulo que forma con la vertical la dirección de  $s$ ). Igualando la componente según  $s$  de la resultante con el producto de la masa por la componente tangencial (según  $s$ ) de la aceleración, obtenemos  $-A dP - A \rho g dy = (\rho A ds)a$ . Introduciendo la ex-

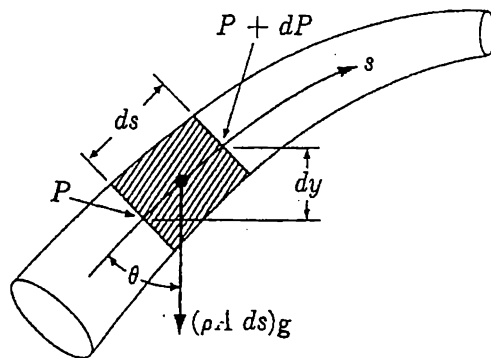


Fig. 20-15. La aceleración tangencial del elemento de fluido en una posición  $s$  es  $u(du/ds) = [d(u^2/2)]/ds$ , y obtenemos  $\rho\{[d(u^2/2)]/ds\} = -\rho g \cos \theta - (dP/ds)$

presión de  $a$  de la ecuación (20-7), obtenemos

$$d\left(\frac{u^2}{2}\right) + \frac{dP}{\rho} + g dy = 0$$

que integrada da

$$\frac{u^2}{2} + gy + \int \frac{dP}{\rho} = \text{const} \quad (20-8)$$

Si el fluido es incomprensible, con lo que la densidad  $\rho$  es constante, la ecuación (20-8) se reduce a la relación dada por (20-6).

Si suponemos que tiene lugar una transformación adiabática al moverse el elemento del fluido a lo largo del tubo de corriente, tenemos  $P/P_0 = (\rho/\rho_0)^\gamma$  donde  $\gamma$  es el cociente entre los calores específicos a presión y volumen constante. Dejamos como ejercicio demostrar que la ecuación (20-8) toma la forma

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} P + \rho gy + \rho \frac{u^2}{2} = \text{const} \quad (20-9)$$

(Véase el prob. 20-13.)

**20-5 Aplicaciones del teorema de Bernoulli.** Existen numerosos fenómenos de circulación de fluidos que podemos comprender basándonos en el teorema de Bernoulli. Como primer ejemplo, consideremos un ala en una corriente fluida, según se indica en la figura 20-16. También se muestran las líneas de corriente en torno al ala y observamos que se aprietan sobre el ala, mientras que debajo permanecen prácticamente inalteradas. Por tanto, la velocidad del fluido será mayor encima del ala que debajo. En el fluido sin perturbar, la velocidad y la presión son uniformes en el fluido y la constante del teorema de Bernoulli es la misma para todos los tubos de corriente. Por tanto, la mayor

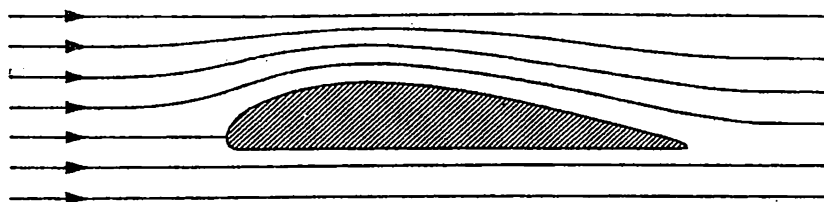


Fig. 20-16. Ala en una corriente fluida.

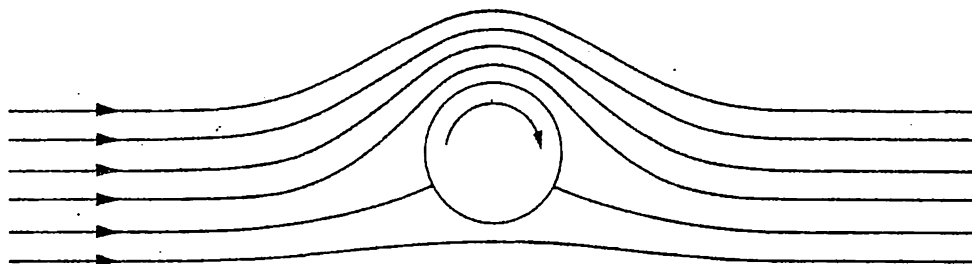


Fig. 20-17. Cilindro giratorio en una corriente fluida.

velocidad sobre el ala significa una presión menor encima del ala que debajo de ella y el resultado será una fuerza de sustentación del ala.

Un efecto análogo se produce sobre un cilindro o esfera en rotación, según se indica en la figura 20-17. El cilindro gira en el mismo sentido que las agujas del reloj, a consecuencia de lo cual se origina un movimiento circulatorio del fluido que lo rodea, dirigido en forma análoga. El fluido se pone en movimiento estacionario de izquierda a derecha y la velocidad resultante será mayor sobre la parte superior del cilindro que sobre la inferior. La diferencia correspon-

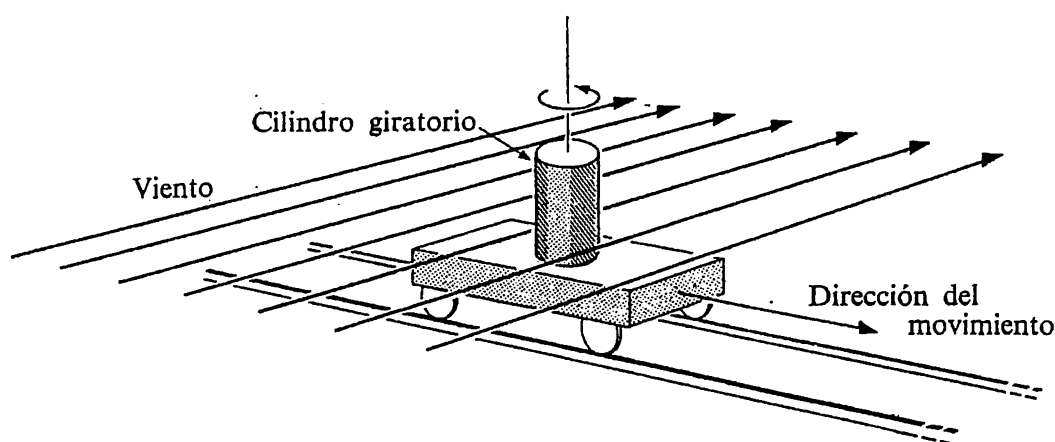


Fig. 20-18. El cilindro giratorio situado sobre el carrito hace que éste se mueva en la dirección indicada cuando sopla el viento.

diente de presiones de Bernoulli origina una fuerza resultante hacia arriba aplicada al cilindro.

Este efecto se puede poner de manifiesto de la manera indicada en la figura 20-18. Sobre un carrito que puede moverse sobre una vía horizontal se monta un cilindro giratorio. Cuando sopla viento en la dirección indicada, es decir, perpendicular a la vía, el carrito empieza a moverse a consecuencia de la fuerza de Bernoulli que se desarrolla sobre el cilindro.

Cuando se da «efecto» hacia adelante a una pelota de tenis, la velocidad del aire bajo la pelota será mayor que encima de ella y este movimiento combinado origina una fuerza de Bernoulli resultante aplicada a la pelota y dirigida hacia abajo. El efecto tendría sentido contrario si se diera a la pelota un «efecto» hacia atrás, en cuyo caso la fuerza de Bernoulli pudiera ser tan grande como la de la gravedad durante una cierta distancia y podía hacer que la pelota «flotase» a lo largo de una línea casi recta.

### PROBLEMAS

20-1. Una vara de madera de longitud  $L$  y densidad  $\rho$  puede girar libremente alrededor de un eje horizontal fijo que pasa por el extremo inferior de la vara. Ésta está sumergida en un baño de agua, según se indica en la figura 20-19. (a) ¿Cuáles son las posiciones de equilibrio estable e inestable de la vara? (b) Se separa la vara un ángulo pequeño a partir de su posición de equilibrio estable y se suelta. ¿Cuál es la frecuencia de la oscilación si, suponemos que el único efecto del líquido es el empuje?

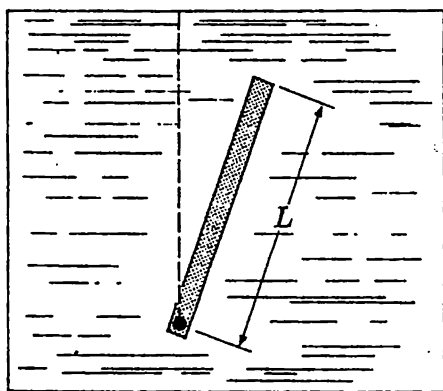


Figura 20-19

20-2. Un dispositivo para medir fuerzas pequeñas en el agua consiste en un cilindro de aluminio con una aguja delgada que parte de su cara inferior, tal como se indica en la figura 20-20. Se ajusta el tamaño de la cavidad de aire en el cilindro de manera que éste quede en reposo inmediatamente bajo la superficie del agua cuando se sumerge toda la unidad. Se impide que se hunda y se mantiene en equilibrio haciendo que la

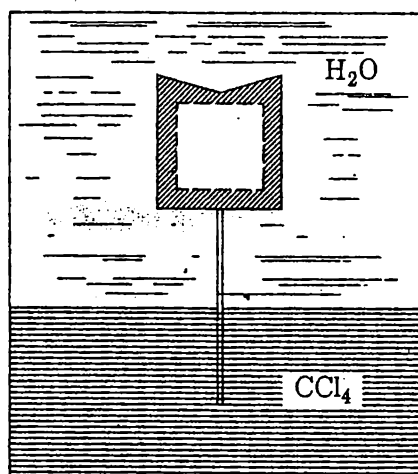


Figura 20-20

aguja penetre en tetracloruro de carbono en la forma que se indica. Si el diámetro de la aguja es  $d = 2$  mm, ¿qué fuerza vertical sobre el cilindro producirá una nueva posición de equilibrio 1 cm más profunda que antes? La densidad del tetracloruro de carbono es  $\rho = 1,595$  g/cm<sup>3</sup>.

20-3. Un cubo de agua desliza hacia abajo por un plano inclinado un ángulo  $\theta$ , exento de rozamientos. ¿Qué ángulo formará con el plano la superficie del agua?

20-4. Un acelerómetro consiste en un recipiente lleno de líquido en el cual puede moverse libremente, alrededor de un eje situado en el fondo del recipiente, una barra de densidad inferior a la del líquido (fig. 20-21). La densidad del líquido es  $\rho_1$  y la de la barra  $\rho_2$  ( $\rho_2 < \rho_1$ ). La longitud de la barra es  $L$ . (a) ¿En qué dirección y sentido se moverá la barra cuando se acelera el recipiente? (b) Asignar valores numéricos a la escala señalada por la barra, de manera que se pueda leer directamente la aceleración. (c) Sugerir métodos para aumentar la sensibilidad del instrumento.

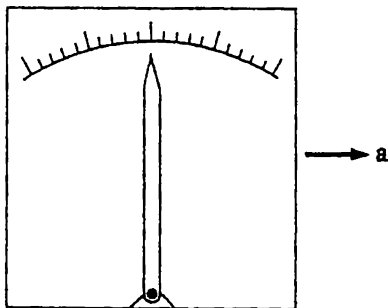


Figura 20-21

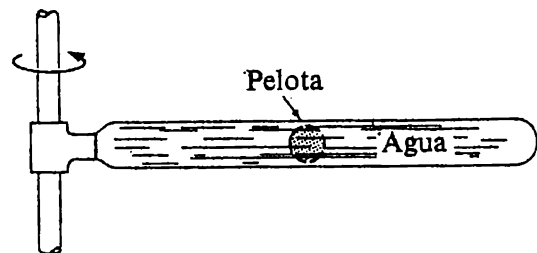


Figura 20-22

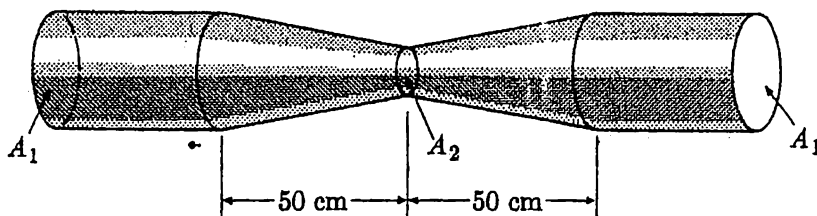


Figura 20-23

20-5. En un coche, un niño sujeta un globo lleno de helio. Al ponerse el coche en movimiento, ¿en qué dirección y sentido se moverá el globo si está sujeto al extremo de un hilo? (Supóngase un coche cerrado.)

20-6. En el interior de un tubo lleno de agua se coloca una pelota de ping-pong, pudiendo aquél girar alrededor de un eje tal como se indica en la figura 20-22. ¿En qué sentido se moverá la pelota al hacer girar al tubo alrededor del eje? ¿Qué pasaría si en vez de una pelota de ping-pong se tratara de una bola de acero? Razonar la respuesta.

20-7. De un cilindro largo sale radialmente agua a razón de  $Q$  g/s por centímetro de longitud del cilindro. ¿Cuál es la velocidad radial del agua a una distancia  $r$  del eje del cilindro?

20-8. Indicar el campo que se obtiene cuando dos fuentes esféricas (puntuales) simétricas, separadas una distancia  $d$ , emiten cantidades iguales de agua por segundo. La velocidad resultante se obtiene por superposición de los campos

de velocidades de una y otra fuente. ¿Cuál es el número total de líneas de corriente que atraviesan una superficie que contenga a las dos fuentes en su interior, si el número de líneas de corriente por unidad de superficie (normal a las líneas) es igual a la magnitud de la velocidad del agua?

20-9. Por un tubo de sección circular variable, como el representado en la figura 20-23, circula agua. El área en  $A_1$  es  $100 \text{ cm}^2$  y en  $A_2$  es  $A_1/4$ . El caudal es de 1 litro/s. Representar gráficamente la velocidad en función de la distribución de presión a lo largo del tubo. La presión en  $A_1$  es de 10 atm. Supóngase régimen lamelar.

20-10. Con un sifón se saca agua

de un recipiente, en la forma indicada en la figura 20-24. (a) ¿Cuál es la velocidad del agua en el punto de salida, el cual tiene una sección mucho menor que el recipiente? (b) ¿Cuál es la presión del agua en el punto más elevado del tubo de corriente? (c) ¿Cuál es el valor de la altura  $h$  más allá del cual ya no es posible hacer el sifón?

20-11. El tubo de PITOT de la figura 20-25 es un dispositivo medidor de la presión a partir de la cual puede determinarse la velocidad. Esto se logra comparando la presión sobre superficies normales y paralelas a la corriente, correspondientes a los puntos de medida  $A_1$  y  $A_2$

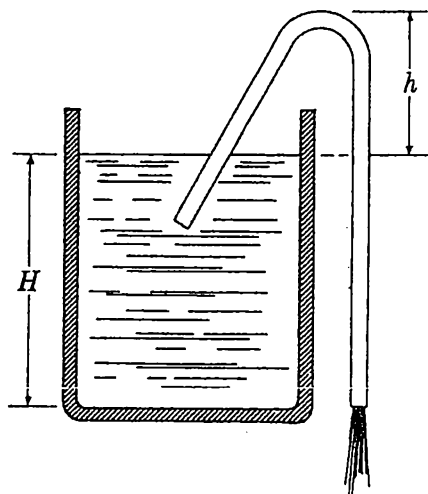


Figura 20-24

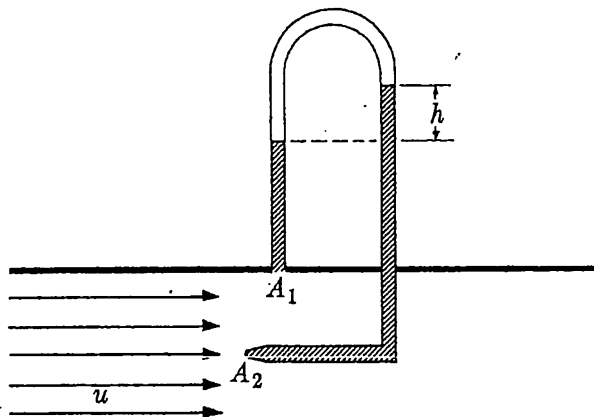


Figura 20-25

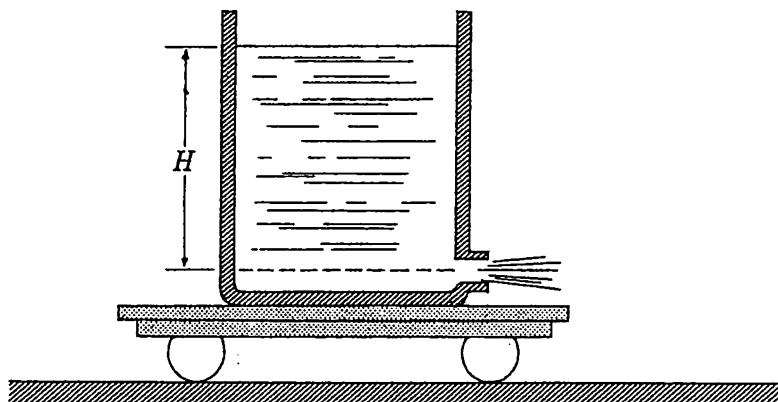


Figura 20-26

de la figura. Si se mide la diferencia de presiones en función de la altura  $h$  de una columna de agua, ¿cuál será la velocidad de la corriente?

20-12. Demostrar la ecuación (20-9) correspondiente a la relación entre la velocidad y la presión de un gas, cuando la transformación del gas a lo largo de una línea de corriente es adiabática.

20-13. Se monta un depósito de agua sobre un carrito que puede moverse

a lo largo de una vía horizontal (rozamientos despreciables). En la pared del depósito se practica un orificio, según se indica en la figura 20-26, y empieza a salir por él agua paralelamente a la vía. La altura inicial del agua es  $H$  y el área del orificio  $A$  (este área es mucho menor que la de la sección del depósito). La masa inicial del agua es  $M_0$  y la masa del carrito con el depósito es  $m_0$ . ¿Cuál es la aceleración inicial del carrito?

## PULSOS ONDULATORIOS TRANSVERSALES Y LONGITUDINALES

*Resumen.* Introducimos la Mecánica de los cuerpos deformables y del movimiento ondulatorio con un análisis de lo que pasa cuando se da un impulso a un cuerpo deformable, mediante una fuerza exterior. Este problema ilustra los aspectos fundamentales de la Dinámica de las ondas y conduce a la determinación de la velocidad de propagación y a la relación entre las fuerzas y las velocidades de las partículas en un pulso ondulatorio. Se aplica el análisis al estudio de pulsos ondulatorios en resortes, barras macizas y columnas de gas.

**21-1 Introducción.** Anteriormente nos hemos ocupado, por una parte, del movimiento global —movimiento de partículas y de cuerpos rígidos— y, por otra, del calor, átomos y moléculas —algunas de las propiedades internas y de los constituyentes de la materia. En el estudio de los cuerpos rígidos hemos supuesto que las diferentes partes de un cuerpo mantienen invariables sus distancias mutuas. Es decir, ignorábamos la naturaleza compresible de la materia. Nos hallamos ahora en mejores condiciones para abandonar la aproximación de cuerpo rígido y preguntarnos cómo responde un cuerpo compresible (no rígido) a fuerzas aplicadas exteriormente. Veremos que ello conduce directamente al estudio de las ondas. Los fenómenos ondulatorios no sólo son importantes en relación con esto, sino también porque son especialmente descriptivos de muchos sucesos de la Naturaleza. La luz, el sonido, la radio y los fenómenos en la superficie del agua son ejemplos conocidos. Menos conocido, tal vez, es el hecho de que los átomos, los electrones y las partículas subnucleares presentan propiedades tanto de ondas como de partículas.

Hablando en general, el movimiento ondulatorio implica la transmisión de un *estado*. Si colocamos de pie fichas de dominó alineadas y tumbamos la primera, se inicia un tren de sucesos que acaba en que todas las fichas estén tumbaradas. A lo largo de la fila de fichas no ha habido ningún transporte total de masa, sino que lo que ha viajado a lo largo de la fila ha sido el *estado* de caída y en este caso tan sencillo, la velocidad a la que se ha movido el estado de caída recibe el nombre de *velocidad de propagación*.

Para ilustrar nuestro problema y establecer algunas de las ideas que intervienen, consideremos un cuerpo deformable muy especial que consista en un



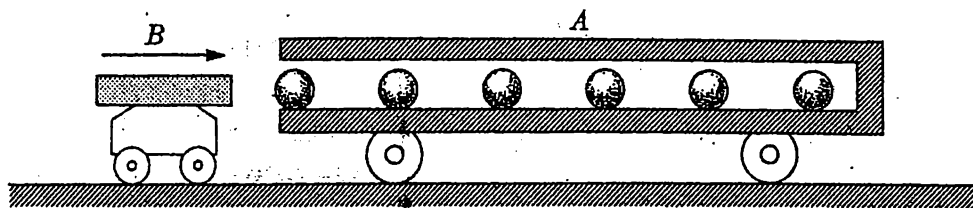


Fig. 21-1. Ejemplo de choque en el cual es evidente que para que se conserve la cantidad de movimiento en todo instante, hay que tener en cuenta la cantidad de movimiento del carrito y la cantidad de movimiento asociada al movimiento interior.

carrito tubular que contenga algunas bolas de igual masa. Éstas pueden moverse libremente y están separadas por distancias iguales, según se indica en la figura 21-1. Consideremos ahora un choque en el cual se aproxime un cuerpo *B* y choque contra la primera bola del carrito *A*. Si la masa del cuerpo *B* es igual a la masa de la bola, *B* quedará en reposo y la primera bola se moverá hacia adelante con una cantidad de movimiento igual a la cantidad de movimiento inicial de *B*. La primera bola entregará su cantidad de movimiento a la segunda, la segunda entregará su cantidad de movimiento a la tercera, etc., con lo que al final se alcanzará la última bola. En cierta manera, se ha llevado la cantidad de movimiento de *B* a lo largo de *A* en forma de onda. Si no hubiera rozamiento entre las bolas y el suelo del carrito (las bolas deslizarían, no rodarían), el mismo *A* no empezaría a moverse hasta que la última bola chocara contra la pared extrema del carrito. Desde luego, si no miráramos en el interior del carrito, observaríamos una violación aparente del principio de conservación de la cantidad de movimiento, ya que mientras la onda se propaga por *A*, tanto *B*

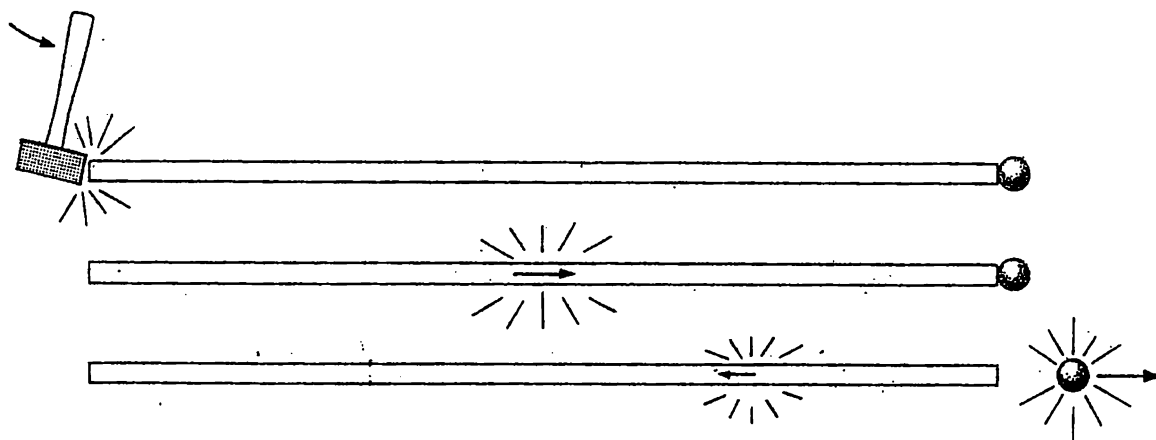


Fig. 21-2. Cuando se golpea con un martillo la tubería larga de hierro, la cantidad de movimiento la recorre y la bola del otro extremo se pone en movimiento al cabo de un tiempo. Corrientemente, se refleja una onda en el extremo de la tubería en que se halla la bola.

como *A* están aparentemente en reposo. El principio de conservación de la cantidad de movimiento lleva implícito, pues, que no sólo se considere el movimiento global del cuerpo sino también el movimiento ondulatorio en el cuerpo.

De otra manera, imaginemos una tubería larga de hierro en reposo sobre una superficie sin rozamiento y con una bola en reposo apoyada contra un extremo. Cuando se da un martillazo al otro extremo de la tubería, el movimiento inicial de la bola sufre un retraso definido y mensurable (alrededor de  $1/100$  s para una tubería de 50 m de longitud). Lo cierto es que el impulso comunicado por el martillo entrega cantidad de movimiento a la tubería. Pero ésta no se mueve como un cuerpo rígido, sino que la cantidad de movimiento se transporta a lo largo de la tubería formando una onda de compresión, transmitiendo los átomos de hierro de uno a otro su cantidad de movimiento hasta que, por último, los átomos del extremo transmiten cantidad de movimiento a la bola. Corrientemente, suele haber una onda reflejada por el extremo de la tubería y dicha onda podrá recorrerla en uno y otro sentido. Cuando haya cesado todo fenómeno ondulatorio en la tubería, la cantidad de movimiento de ésta (considerada ahora como cuerpo rígido) más la cantidad de movimiento de la bola será igual al impulso comunicado por el martillo. Claro está que en los experimentos de choque de discos y carritos estudiados anteriormente, se habrán producido fenómenos análogos a éste, pero el tiempo de recorrido de las perturbaciones ondulatorias era muy corto y en el tiempo que tardábamos en realizar nuestras medidas de velocidad, los cuerpos habían recuperado su condición de rígidos.

Da la casualidad de que nuestro ejemplo de las bolas en el carrito (fig. 21-1) no es el mejor modelo para la transmisión de una onda por la materia. En nuestro modelo, una perturbación relativamente débil haría que las bolas se movieran más lentamente y producirían así una onda de menor velocidad de propagación. Veremos que en la materia todas las perturbaciones pequeñas se propagan, entre amplios límites, con la misma velocidad. Iniciaremos nuestro estudio cuantitativo del movimiento ondulatorio realizando algunos experimentos con un resorte estirado que permita amplitudes grandes y ondas relativamente lentas que se puedan generar y observar con facilidad.

Se estira un resorte-muelle sobre el suelo u. otra superficie relativamente lisa. Si sujetamos un extremo del resorte con la mano y movemos ésta, se verá que a lo largo del resorte se propagan ondas. Si se aplica al resorte un empuje lateral brusco, se genera una onda transversal, mientras que si se estira o comprime bruscamente el resorte, se genera una onda compresiva (longitudinal). Los nombres *longitudinal* y *transversal* indican la dirección del movimiento de las partículas que constituyen el resorte. Como la onda transversal es más fácil de observar que la longitudinal, la estudiaremos primero.

**21-2 Pulsos ondulatorios transversales en un resorte.** Cuando desplazamos bruscamente el extremo del resorte una distancia  $\Delta y$  en un tiempo  $\Delta t$  a la velocidad constante  $u = \Delta y / \Delta t$ , se origina una onda transversal particularmente sencilla. Si hubiéramos desplazado de esta manera el extremo de un cuerpo realmente rígido, todo él se habría movido. En cambio, en el resorte sólo participa en el movimiento una parte del cuerpo, la cual crece continuamente durante el tiempo  $\Delta t$ . Decimos que la perturbación se *propaga* a lo largo del resorte. El frente de onda  $P$  (fig. 21-3), al igual que otros puntos de la onda, se mueve evidentemente a lo largo del resorte con una velocidad constante  $c_t$ , a la que se da el nombre de *velocidad de propagación*. El subíndice  $t$  indica que se trata de una onda transversal. Además, como se ve crecer linealmente el desplazamiento desde el frente  $P$  al final  $Q$  del pulso, deberá ocurrir que todos los elementos de masa del resorte en la región del pulso desde  $P$  hasta  $Q$  tengan la misma velocidad transversal  $u$ . En la figura 21-3, que debe considerarse como resultado experimental, observamos que *todos* los elementos de masa del resorte se hallan en reposo excepto los contenidos entre  $P$  y  $Q$  y que ningún elemento de masa tiene componente de velocidad según la dirección  $x$ . Sólo se mueve hacia la derecha la perturbación, o sea el estado de movimiento, no la masa. En la figura 21-4 se ha representado la velocidad transversal de los elementos de masa del resorte, correspondiente al desplazamiento transversal de la figura 21-3.

Como hemos examinado algunas de las propiedades de los pulsos ondulatorios transversales en un resorte, surge de manera natural la pregunta de qué es lo que determina la velocidad de propagación. Por tanto, refirámonos a alguno de nuestros primeros principios y estudiemos las fuerzas y el movimiento de la masa.

¿Cuál es la cantidad de movimiento en el pulso ondulatorio de las figuras 21-3 y 21-4? En  $t = t_2$  y de entonces en adelante, existe una longitud de resorte  $\Delta x = c_t \Delta t$ , que tiene, toda ella, una velocidad  $u$  en la dirección  $y$ . Si representamos por  $\epsilon$  la masa por unidad de longitud del resorte, una longitud  $\Delta x$  tendrá una masa  $\epsilon \Delta x$ . La cantidad de movimiento del pulso ondulatorio será, pues,  $\epsilon \Delta x u$ , o bien con  $\Delta x = c_t \Delta t$

$$\Delta p_y = \epsilon c_t u \Delta t \quad (21-1)$$

Durante el tiempo que se aplica esta cantidad de movimiento al resorte estirado, la única fuerza exterior que tiene componente  $y$  y está aplicada al resorte es la fuerza ejercida por la mano. El impulso  $F \Delta t$  de esta fuerza debe, por tanto, ser igual a  $\Delta p_y$ , es decir,

$$F_y = \frac{\Delta p_y}{\Delta t} = \epsilon c_t u \quad (21-2)$$

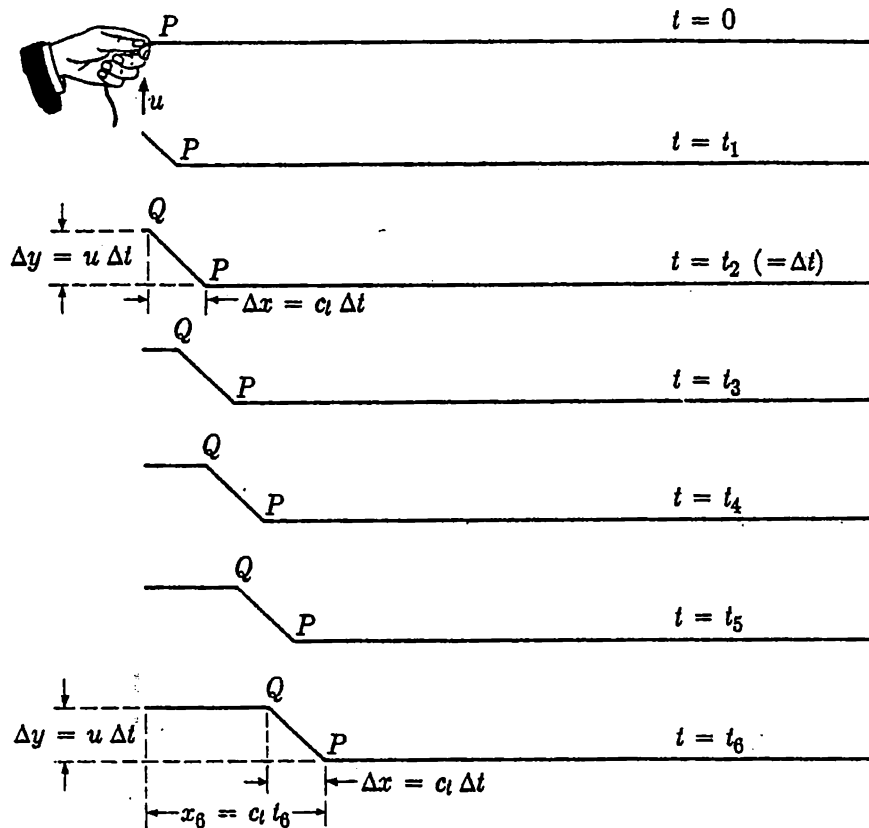


Fig. 21-3. Movimiento ondulatorio transversal en un resorte tenso. En  $t = 0$  se mueve hacia arriba el extremo del resorte con velocidad constante  $u$ .

Es interesante observar que la fuerza aplicada es proporcional a la velocidad  $u$  y no a  $du/dt$  como ocurre en el caso de una partícula única. Desde luego, la razón es que en un cuerpo deformable no se mantiene constante la masa que participa en el movimiento durante el tiempo  $\Delta t$  del impulso exterior, sino que aumenta a razón de  $dm/dt = \epsilon c_t$ . Luego, de  $dp/dt = m du/dt + u dm/dt$  obtenemos, como antes,  $dp/dt = \epsilon c_t u$ , puesto que en este caso de velocidad constante de la partícula tenemos  $du/dt = 0$ .

La perturbación sigue moviéndose a lo largo del resorte, incluso después de que la mano se haya detenido dejando de mover el extremo del resorte. Examinemos las fuerzas en un «corte» imaginario en algún punto de la porción en movimiento del resorte. La parte a la derecha del corte sufre una variación de cantidad de movimiento que, por unidad de tiempo, es  $\epsilon c_t u$ , como antes. Sin embargo, la fuerza que produce la variación de cantidad de movimiento ya no es la de la mano, sino la tensión del resorte. Si éste estuviera horizontal, la parte a la izquierda del corte no ejercería fuerza transversal alguna sobre la parte situada a la derecha. Pero como está inclinado, existe una fuerza  $F_y = S \sin \theta$  que produce la variación de cantidad de movimiento. El ángulo  $\theta$  viene

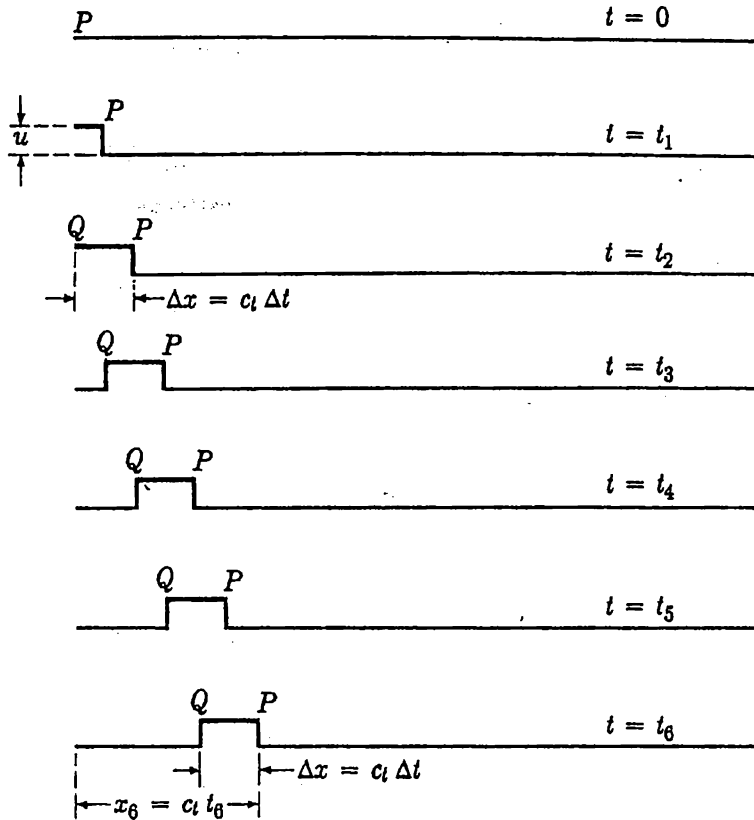


Fig. 21-4. Distribución de la velocidad de los elementos de masa del resorte de la figura 21-3.

dado, claro está, por  $\operatorname{tg} \theta = u/c_t$ . Análogamente, durante el desplazamiento inicial del extremo del resorte la fuerza accionadora puede expresarse tanto en la forma  $F_y = \epsilon c_t u$  como en la forma  $F_y = S \operatorname{sen} \theta$ .

Para avanzar un poco más en nuestras consideraciones, supongamos que el ángulo  $\theta$  es pequeño o, lo que es equivalente, que la velocidad transversal  $u$  de la partícula es pequeña frente a la velocidad de propagación  $c_t$ . Entonces,

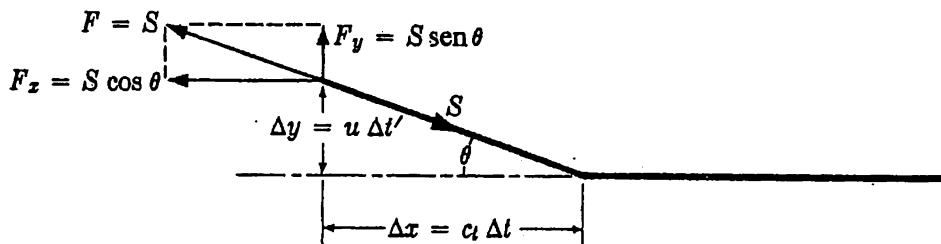


Fig. 21-5. La fuerza  $F$  mantiene la tensión en el resorte. En éste se origina movimiento ondulatorio si se varía la dirección de  $F$ . Cuando  $\theta$  es pequeño,  $F_y$  es aproximadamente igual a  $S(u/c_t)$ , y  $F_x$  es aproximadamente igual a  $S$ .

para  $u \ll c_t$ , tenemos

$$\text{sen } \theta \approx \frac{u}{c_t} \quad (21-3)$$

y en consecuencia

$$F_y = S \text{ sen } \theta = S \frac{u}{c_t} \quad (21-4)$$

Combinando este resultado con  $F_y = \epsilon c_t u$ , obtenemos

$$S \frac{u}{c_t} = \epsilon u c_t$$

de donde despejamos la velocidad de propagación  $c_t$ :

$$c_t = \sqrt{\frac{S}{\epsilon}} \quad (21-5)$$

Con la hipótesis hecha de que  $\theta \ll 1$ , o bien que  $u \ll c_t$ , la velocidad de propagación resulta *independiente de la amplitud de la perturbación* y sólo depende de las propiedades características del resorte, es decir, de la tensión y de la masa por unidad de longitud. No obstante, debe tenerse bien presente que la propagación de perturbaciones transversales grandes, es decir, perturbaciones en las que  $u$  es comparable con  $c_t$ , es más complicada y que en este caso la velocidad de propagación depende de  $u$ . [El ángulo  $\theta$  de la fig. 21-3 se tomó igual a  $45^\circ$  para simplificar el dibujo, pero con un ángulo tan grande la ec. (21-2) no es más que una aproximación grosera.]

Obsérvese que  $\sqrt{S/\epsilon}$  es la única combinación de  $S$  y  $\epsilon$  que tiene las dimensiones de una velocidad. La tensión  $S$  tiene las dimensiones de una fuerza  $[M][L][T]^{-2}$ , y la masa por unidad de longitud  $\epsilon$  tiene por dimensiones  $[M][L]^{-1}$ . Por tanto,  $\sqrt{S/\epsilon}$  tiene las dimensiones de una velocidad  $[L][T]^{-1}$ .

*Energía transportada por un pulso ondulatorio transversal.* En nuestro estudio del movimiento ondulatorio, hemos visto que a lo largo de un resorte en movimiento se transportaba cantidad de movimiento y es importante que nos ocupemos también de la energía que interviene en dicho movimiento. Hallemos primeramente la energía entregada a la onda por la fuerza aplicada cuando se mueve el resorte, y veamos luego qué se hace de ella.

La componente  $y$  de dicha fuerza aplicada al extremo del resorte es  $F_y = Su/c_t$ , y como se aplica a lo largo de una distancia  $\Delta y = u \Delta t$ , el trabajo realizado es

$$W = F_y \Delta y = S \frac{u^2}{c_t} \Delta t = \epsilon c_t u^2 \Delta t \quad (21-6)$$

La energía cinética del pulso ondulatorio es el semiproducto de la masa  $\epsilon c_t \Delta t$  de la porción en movimiento del muelle por el cuadrado de la velocidad  $u^2$ .

Por tanto; tenemos

$$E = \frac{\epsilon c_t u^2 \Delta t}{2}$$

que corresponde exactamente a la mitad de trabajo realizado. ¿Qué se ha hecho de la otra mitad? Completamente aparte de la energía cinética de la onda, existe en el resorte deformado una forma de energía potencial debida al trabajo  $W'$  necesario para deformarlo. Podremos calcular este trabajo de deformación  $W'$  si imaginamos sujeto el resorte al eje  $x$  en  $\Delta x$  y llevando el otro extremo desde  $y = 0$  hasta  $y = \Delta y$ . La fuerza  $F_y$  depende entonces de  $y$ ,

$$F_y = S \frac{y}{\Delta x}$$

y tenemos para el trabajo

$$W' = \int_0^{\Delta y} \frac{S}{\Delta x} y dy = \frac{S \Delta y^2}{2 \Delta x}$$

Como  $\Delta y = u \Delta t$  y  $\Delta x = c_t \Delta t$ , hallamos que

$$W' = \frac{\epsilon c_t u^2 \Delta t}{2}$$

Esta energía está almacenada en el resorte deformado. Así queda interpretada la energía total  $\epsilon c_t u^2 \Delta t$  suministrada por la fuerza exterior y transportada por el pulso ondulatorio a lo largo del resorte.

**EJEMPLO.** Se estira un resorte largo de masa 20 g/cm hasta quedar sometido a una tensión de 200 N. Se da a un extremo del resorte un impulso transversal por medio de una fuerza constante de 10 N que actúa durante 0,2 s. ¿Cuál es la velocidad de propagación y cuánta energía transporta el pulso ondulatorio creado en el resorte?

Tenemos  $S = 200$  N y  $\epsilon = 2$  kg/m y en consecuencia  $c_t = \sqrt{S/\epsilon} = 10$  m/s. La velocidad transversal de las partículas del resorte se obtiene de la relación  $F_y = \epsilon c_t u$ , con lo cual  $u = F_y/\epsilon c_t = 10/2 \cdot 10 = 0,5$  m/s. La energía total del pulso ondulatorio es  $W = \epsilon c_t u^2 \Delta t = 2 \cdot 10 \cdot 0,5^2 \cdot 0,2 = 1,0$  J.

**21-3 Pulsos ondulatorios longitudinales en un resorte estirado.** Si en vez de mover lateralmente el extremo de un resorte-muelle, lo apretamos en su propia dirección, se genera una onda longitudinal (compresiva). En la figura 21-6 puede verse dicha onda longitudinal. En el instante  $t = 0$ , se aplica una fuerza  $F$  al extremo del resorte en  $x = 0$  durante un tiempo  $\Delta t$ , con lo que se comunica al resorte un impulso  $F \Delta t$ . Si el resorte fuera rígido, todo él se movería a causa del impulso y la velocidad del resorte después del impulso sería inversamente proporcional a la masa total del resorte. Así, si éste fuera infinitamente largo y rígido, la velocidad producida por un impulso finito sería nula.

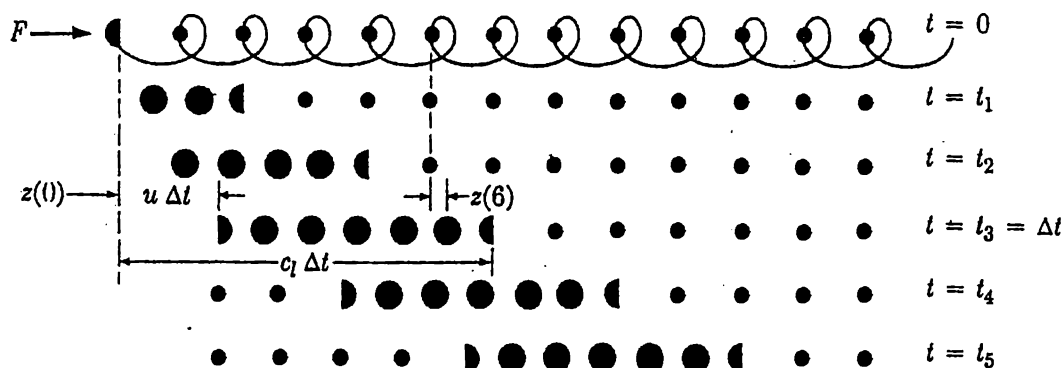


Fig. 21-6. Onda longitudinal (compresiva) en un resorte muelle. Los puntos pequeños indican las posiciones de las espiras y los puntos grandes indican las espiras que están en movimiento. Los semicírculos indican espiras que están poniéndose en marcha, ◐, o deteniéndose, ◑.

Sin embargo, a causa de la compresibilidad del resorte, durante el tiempo  $\Delta t$  del impulso sólo se pone en movimiento parte de él y esta parte tendrá una velocidad no nula independiente de la longitud del resorte. Como en el caso de una onda transversal, la masa que participa en el movimiento *durante* el impulso crece en proporción al tiempo.

La fuerza aplicada al resorte en la figura 21-6 lo está de tal manera que el extremo del resorte se mueve hacia adelante con velocidad  $u$  durante un tiempo  $\Delta t$ . Así pues, el desplazamiento del extremo del resorte situado en  $x = 0$  durante  $\Delta t$  es  $z = u \Delta t$ , según se indica. Durante el mismo tiempo  $\Delta t$ , el frente de la perturbación ha adelantado una distancia  $c_l \Delta t$ , donde  $c_l$  es la velocidad de propagación. Por tanto, la masa de resorte que participa en el movimiento después del impulso es  $\epsilon_1(c_l - u) \Delta t = \epsilon c_l \Delta t$ , donde  $\epsilon_1$  es la masa por unidad de longitud de la porción comprimida del resorte y  $\epsilon$  es la masa inicial por unidad de longitud. En la figura, la longitud  $c_l \Delta t$  cubre siete espiras del resorte. Puede verse que cada una de las espiras que se hallan en el pulso ondulatorio se mueve con una velocidad  $u$ . La cantidad de movimiento del pulso ondulatorio es, pues,

$$\Delta p_x = \epsilon c_l u \Delta t \quad (21-7)$$

Esta cantidad de movimiento se entregó al resorte en un tiempo  $\Delta t$  al aplicar el impulso  $F \Delta t$ . Luego, la fuerza que tiene que haberse ejercido es  $\Delta p_x / \Delta t$  o sea

$$F = \epsilon c_l u \quad (21-8)$$

Aun cuando las expresiones (21-7) y (21-8) son parecidas a las expresiones (21-1) y (21-2), hay que tener bien presente que en un pulso ondulatorio longitudinal la cantidad de movimiento y la fuerza están dirigidas a lo largo del eje



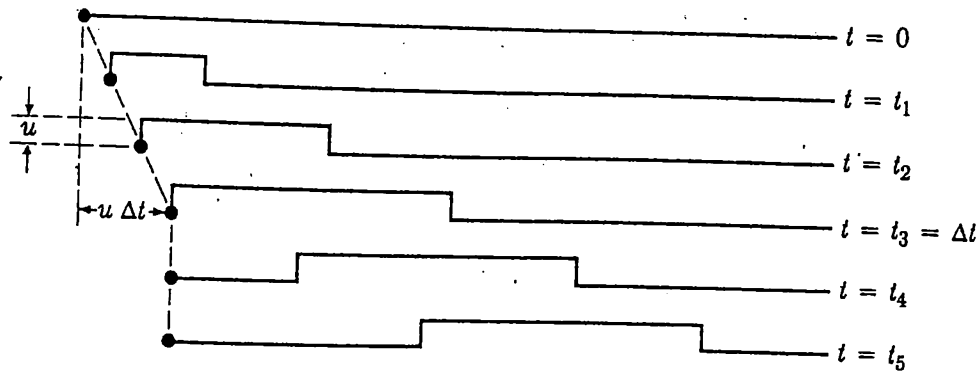


Fig. 21-7. Velocidad de las espiras (velocidad de las partículas) en una onda compresiva de un resorte-muelle.

$x$ , en vez de a lo largo del eje  $y$  como ocurre en los pulsos transversales. En una onda longitudinal, al igual que en una transversal, el pulso ondulatorio sigue recorriendo la longitud del resorte después de terminado el impulso. En el caso actual, la fuerza *ecu* la proporciona la fuerza del resorte.

La cantidad  $z$  en que varía la longitud del resorte medida a partir de su longitud de equilibrio es proporcional a la fuerza que comprime al resorte. En anteriores estudios de la fuerza del resorte (cap. 4) se expresaba esta relación en la forma  $F = -Kx$ , donde  $K$  es la constante del resorte. La constante del resorte no sólo depende del material de que está constituido, sino también de longitud total. En el estudio actual, la longitud total del resorte tiene poca importancia y no precisamos expresar las propiedades elásticas del resorte en función de una cantidad que sólo dependa del material y no de la longitud del resorte. Para un material dado, observamos que la variación de longitud del resorte es proporcional tanto a la fuerza aplicada como a la longitud del resorte. A la constante de proporcionalidad la llamaremos *compresibilidad lineal*  $k$  del resorte. Así pues, si es  $l$  la longitud total de un resorte y  $\Delta l$  su variación de longitud (positiva cuando aumenta  $l$ ) tenemos, por la definición de  $k$ ,

$$\Delta l = -kFl \quad \text{o sea} \quad \frac{\Delta l}{l} = -kF \quad (21-9)$$

El signo menos se debe a que conviene considerar positiva la fuerza  $F$  cuando comprime al resorte. Es inmediato que podemos expresar la compresibilidad lineal  $k$  en función de la constante  $K$  del resorte mediante la relación

$$k = \frac{1}{Kl} \quad (21-10)$$

(Véase ejemplo al final de este apartado.)

Examinando la figura 21-6 vemos que una longitud  $c_l \Delta t$  del resorte se acorta en una cantidad  $u \Delta t$ , con lo que tenemos  $-\Delta l/l = u/c_l$ . Para producir esta compresión, la fuerza  $F$  del resorte deberá ser, según la ecuación (21-9),  $F = -\Delta l/k l = u/k c_l$ . Pero como la fuerza también debe cumplir la condición  $F = \epsilon c_l u$ , en virtud de la ecuación (21-8), obtenemos

$$\frac{u}{k c_l} = \epsilon c_l u$$

De esta relación puede despejarse la velocidad de propagación  $c_l$  :

$$c_l = \sqrt{\frac{1}{k \epsilon}} \quad (21-11)$$

y vemos que  $c_l$  es independiente de la velocidad  $u$  de la partícula. En el caso de una onda transversal hacíamos la aproximación de suponer pequeño  $\theta$ , o sea que la velocidad  $u$  (transversal) de la partícula era pequeña frente a la velocidad de propagación  $c_l$ . Ahora, hemos realizado implícitamente una aproximación análoga, ya que hemos supuesto que el acortamiento  $\Delta l$  de un resorte es proporcional a la longitud  $l$  del mismo y a la fuerza  $F$ . Esta hipótesis sólo es válida cuando  $\Delta l$  es pequeña frente a  $l$ , ya que hemos supuesto que la  $l$  de  $F = \Delta l/k l$ , así como la compresibilidad lineal, es constante. Es evidente que esta hipótesis no es adecuada si  $l$  varía de manera importante. La restricción  $\Delta l \ll l$  es equivalente a la  $u \ll c_l$  y veremos que esta restricción es muy corriente en el estudio del movimiento ondulatorio. El importante principio de superposición, que veremos más adelante, sólo es válido para ondas en las cuales la velocidad  $u$  de las partículas sea mucho menor que la velocidad  $c$  de propagación.

*Energía transportada por un pulso ondulatorio longitudinal.* Al igual que en el caso de ondas transversales, en el pulso ondulatorio longitudinal existe energía y cantidad de movimiento. Cuando se aplica al resorte una fuerza exterior, el trabajo realizado por ella es

$$W = F u \Delta t = \frac{1}{k} \frac{u^2}{c_l} \Delta t = \epsilon c_l u^2 \Delta t \quad (21-12)$$

La energía cinética del pulso ondulatorio es  $(\epsilon c_l \Delta t) u^2 / 2$ . La otra mitad del trabajo realizado por la fuerza exterior aparece en forma de energía potencial de deformación (estática) del resorte. *Durante el pulso*, la potencia  $W/\Delta t$  que pasa en unidad de tiempo por un punto del resorte podrá expresarse en la forma

$$R = \epsilon c_l u^2 \quad (21-13)$$

tanto para ondas longitudinales como transversales.

**EJEMPLO.** Un resorte que tiene, indeformado, una longitud de 2 m y una masa de 4 kg descansa sobre una mesa horizontal. Se mantiene fijo uno de sus extremos y cuando se aplica al otro una fuerza de 20 N, se alarga 10 cm. (a) Determinar el tiempo que tarda un pulso compresivo en recorrer el resorte de un extremo al otro.

La compresibilidad lineal del resorte es  $k = \Delta l / \Delta F = 0,1/20 = 1/400 \text{ N}^{-1}$ . La masa por unidad de longitud es  $\epsilon = 4/2 = 2 \text{ kg/m}$ . La velocidad de propagación es, por tanto,

$$c_l = \sqrt{\frac{1}{k\epsilon}} = \sqrt{\frac{400}{2}} = 10\sqrt{2} \text{ m/s}$$

y el tiempo que tarda un pulso compresivo en recorrer el resorte de un extremo al otro es

$$t = \frac{l}{c_l} = \frac{2}{10\sqrt{2}} = 0,141 \text{ s}$$

(b) Supongamos ahora que el resorte está estirado y tiene una longitud arbitraria  $l$ . Determinar, en función de  $l$ , el tiempo que tarda un pulso en recorrer el resorte de un extremo a otro.

Cuando el resorte está estirado, tanto la compresibilidad lineal como la masa por unidad de longitud habrán variado. En cambio, la constante  $K$  del resorte permanece invariable. La compresibilidad lineal es  $k = 1/Kl$  y la masa por unidad de longitud es  $\epsilon = m/l$ , donde  $m$  es la masa del resorte. La velocidad de propagación es, entonces,

$$c_l = \sqrt{\frac{1}{k\epsilon}} = l\sqrt{\frac{K}{m}}$$

y el tiempo que tarda una onda compresiva en recorrer todo el resorte es

$$t = \frac{l}{c_l} = \sqrt{\frac{m}{K}}$$

que es independiente de la longitud que se haya alargado el resorte.

(c) Determinar la velocidad de propagación de la onda transversal por el resorte cuando éste se haya alargado hasta tener una longitud de 4 m. ¿Cómo depende la velocidad de propagación de la longitud del resorte? ¿Puede en algún caso ser igual la velocidad de propagación de las ondas transversales a la de las longitudinales?

Para estirar el resorte hasta que tenga una longitud de 4 m, se necesita una fuerza  $F = K\Delta l = 200 \cdot 2 = 400 \text{ N}$ . La tensión  $S$  será, por tanto, de 400 N. La masa por unidad de longitud será ahora  $\epsilon = 4/4 = 1 \text{ kg/m}$  y la velocidad de propagación es

$$c_t = \sqrt{\frac{S}{\epsilon}} = 20 \text{ m/s}$$

Cuando se estira el resorte hasta alcanzar una longitud  $l$  arbitraria, la tensión es  $S = K(l - l_0)$ , donde  $l_0$  es la longitud del resorte indeformado. La masa por unidad de longitud es  $\epsilon = m/l$ , como antes, con lo que para la velocidad de propagación

de la onda transversal tenemos

$$c_t = \sqrt{\frac{K(l - l_0)}{m/l}} = c_l \sqrt{1 - \frac{l_0}{l}}$$

En otras palabras, la velocidad de propagación de las ondas transversales por un resorte es siempre *menor* que la de las longitudinales, si bien las velocidades tienden a un valor común cuando  $l$  es mucho mayor que  $l_0$ . (En general, para las ondas elásticas en los sólidos, la velocidad de propagación de las ondas longitudinales es mayor que la de las transversales.)

**21-4 Pulsos ondulatorios longitudinales en una barra maciza.** Las ondas longitudinales en una barra larga, delgada y maciza no son diferentes de las ondas longitudinales en un resorte-muelle. Ordinariamente no hablamos de la compresibilidad de un sólido. Esta propiedad se trata en función del módulo de elasticidad de Young  $Y$ . Si a una barra de sección  $A$  y longitud  $l$  se aplica una fuerza  $F$  (compresión), por la definición de  $Y$  tenemos (véase cap. 18)  $F/A = -Y(\Delta l/l)$ . La compresibilidad lineal de la barra será, pues,

$$k = -\frac{\Delta l}{lF} = \frac{1}{AY}$$

y la masa por unidad de longitud es  $\epsilon = A\rho$ , donde  $\rho$  es la densidad del sólido. Entonces, de la ecuación (21-11) obtenemos para la velocidad de propagación de las ondas longitudinales en la barra

$$c_l = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad (21-14)$$

---

Debe indicarse que esta expresión de la velocidad de propagación de las ondas longitudinales por un sólido sólo es aplicable si no se desarrollan tensiones transversales a la barra a consecuencia de la onda. Dichas tensiones pueden aparecer a consecuencia de la contracción y dilatación transversales (POISSON) que pueden producirse en un sólido, según se mencionó en el capítulo 18. La definición de  $Y$  a partir de la relación  $\Delta l/l = -F/AY$  presupone la ausencia de tensiones transversales en la barra.

---

Para la mayoría de los metales  $Y$  es del orden de  $10^{12}$  dynas/cm<sup>2</sup> y la densidad tendrá valores alrededor de 8 g/cm<sup>3</sup> (véase tabla 18-2). Sería corriente, pues, una velocidad de propagación para las ondas longitudinales de  $c_l \approx \sqrt{10^{12}/8} \approx 3 \cdot 10^5$  cm/s (tabla 20-1).

¿Cuál es el aspecto molecular de una onda compresiva? En un capítulo anterior indicábamos que los átomos de un sólido se hallan continuamente en estado de vibración. Estas frecuencias de vibración son del orden de  $10^{13}$  por segundo, con lo que el período característico de vibración es del orden de  $10^{-13}$  s. El tiempo que tarda la cantidad de movimiento en transmitirse de una capa atómica a la siguiente es, pues, del orden de  $10^{-13}$  s. Como la distancia entre capas adyacentes de átomos es de  $10^{-8}$  cm aproximadamente, queda claro que una perturbación en un extremo de una barra metálica se transmitirá de capa atómica en capa atómica con una velocidad del orden de  $10^{-8} \cdot 10^{13} = 10^5$  cm/s.

TABLA 21-1. VELOCIDAD DEL SONIDO  
EN DISTINTOS SÓLIDOS

<i>Material</i>	<i>Velocidad, m/s</i>
Aluminio	5104
Hierro	5100
Vidrio	5000
Madera (roble)	3850
Cobre	3560
Plomo	1227
Corcho	500
Goma	54

**EJEMPLO.** La cabeza de un martillo de masa  $m$ , choca con velocidad  $v$  contra el extremo de una varilla larga de acero de sección  $10 \text{ cm}^2$ . ¿Cuál debe ser la masa de la cabeza del martillo para que quede en reposo después de chocar contra la varilla? Supóngase que la fuerza ejercida por la cabeza del martillo sobre la varilla pasa instantáneamente de cero a un valor constante  $F_0$  y luego, al cabo de un tiempo  $\Delta t \approx 10^{-4}$  s, cae instantáneamente a cero otra vez.

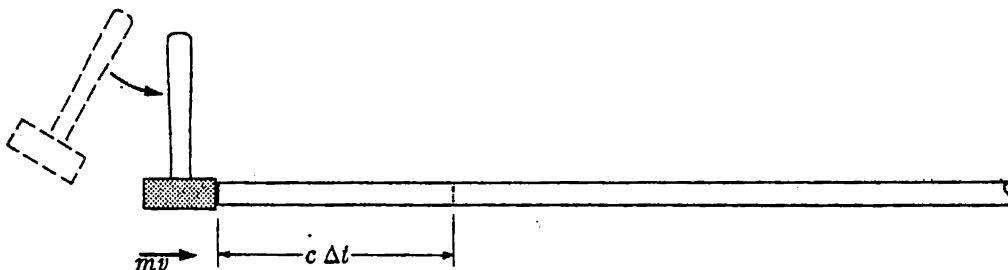


Figura 21-8

Se supone que en este choque se transmite a la onda compresiva de la varilla toda la energía cinética inicial del martillo. La conservación de la cantidad de movimiento exige que se transmita a la onda que se propaga por la varilla toda la cantidad de movimiento inicial del martillo. Ésta era  $mv$  y como la fuerza ejercida sobre el extremo de la varilla era constante durante un tiempo  $\Delta t$ , la velocidad  $u$  de las partículas será la misma a lo largo de toda la longitud  $c\Delta t$  del pulso ondulatorio. Entonces, la cantidad de movimiento en la onda es  $\rho A c u \Delta t$  y en virtud del principio de conservación de la cantidad de movimiento tenemos

$$mv = \rho A c u \Delta t$$

La energía en el pulso ondulatorio es  $\rho A c \Delta t u^2$  y en virtud del principio de conservación de la energía tenemos

$$\frac{1}{2}mv^2 = \rho A c \Delta t u^2$$

Combinando estas dos relaciones encontramos que

$$u = \frac{v}{2}$$

es decir, la velocidad de las partículas es exactamente igual a la mitad de la velocidad inicial del martillo. Sustituyendo en la ecuación de la cantidad de movimiento este valor de la velocidad de las partículas, tenemos

$$mv = \rho A c \Delta t \frac{v}{2} \quad \text{o sea} \quad m = \frac{\rho A c \Delta t}{2}$$

La masa del martillo debe ser igual a la mitad de la masa que interviene en el pulso ondulatorio.

En el caso del acero la densidad es de  $7,8 \text{ g/cm}^3$  y el módulo de Young es  $2 \cdot 10^{12} \text{ dynas/cm}^2$ . La velocidad de propagación es, pues,

$$c = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{12}}{7,8}} \approx 5 \cdot 10^5 \text{ cm/s}$$

Como hemos tomado  $\Delta t = 10^{-4} \text{ s}$ , la longitud de la varilla que se está moviendo en cada instante es  $c \cdot \Delta t = 50 \text{ cm}$ . Esta longitud de varilla tiene una masa de  $\rho A c \Delta t = 7,8 \cdot 10 \cdot 50 = 3900 \text{ g} = 3,9 \text{ kg}$ . La masa del martillo deberá, pues, ser igual a  $1,95 \text{ kg}$ .

A un martillo de esta masa se le puede dar una velocidad de  $300 \text{ cm/s}$ . La velocidad de las partículas del acero en el pulso ondulatorio sería, por tanto, de  $150 \text{ cm/s}$  y durante el tiempo  $\Delta t$  el extremo de la varilla recorrería una distancia  $u\Delta t = 150 \cdot 10^{-4} = 0,015 \text{ cm}$  hacia la derecha.

La cantidad de movimiento total  $mv = 1950 \cdot 300 = 585\,000 \text{ g}\cdot\text{cm/s}$  del martillo se cedió a la varilla en un tiempo  $\Delta t = 10^{-4} \text{ s}$ , con lo que la fuerza  $F_0$  debería ser  $F_0 = mv/\Delta t = 5,85 \cdot 10^9 \text{ dynas}$  que son unos  $6000 \text{ kp}$ .

**21-5 Pulsos ondulatorios en una columna gaseosa.** Las ondas generadas por un émbolo situado al extremo de una columna gaseosa larga son análogas a las ondas longitudinales o compresivas generadas en el extremo de un resorte largo. El gas, al igual que el resorte-muelle, es compresible y tiene una cierta masa por unidad de longitud. Desde luego, cuando está confinado, el gas ejerce una presión sobre toda la superficie de las paredes de su recinto, por lo que para mantener el gas en la columna se precisará una fuerza estática  $F_0 = PA$ , donde  $P$  es la presión del gas y  $A$  el área de la sección recta de la columna. Esta fuerza no origina onda alguna. Pero cuando se varía la fuerza moviendo el émbolo, por ejemplo, hacia adelante, se origina una onda (fig. 21-9).

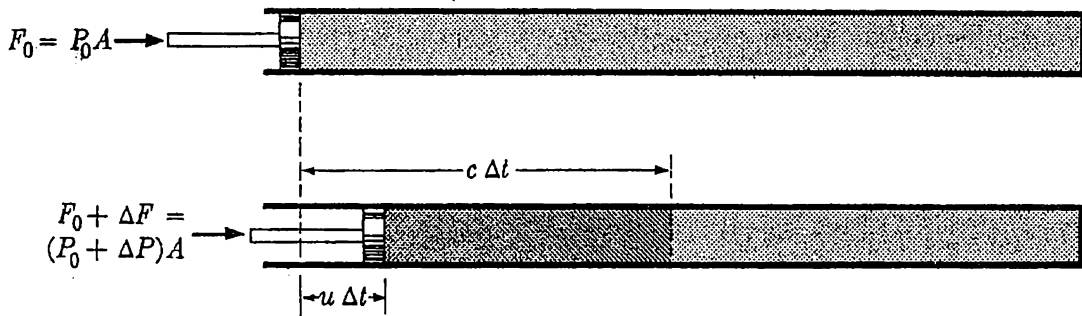


Fig. 21-9. Pulso ondulatorio, originado por un émbolo en movimiento, en una columna gaseosa en un tubo.

*Velocidad de propagación.* En el estudio de las ondas en un resorte y en una barra maciza hemos visto que la velocidad de propagación de una onda compresiva o longitudinal puede expresarse en la forma

$$c = \sqrt{\frac{1}{k\epsilon}} \quad (21-15)$$

donde  $k$  es la compresibilidad lineal definida por la relación  $\Delta l/l = -kF$  donde  $F$  es la fuerza compresiva necesaria para dar lugar a la variación unitaria de longitud ( $\Delta l/l$ ) de la columna considerada, y  $\epsilon$  es la masa por unidad de longitud. Es evidente que se puede aplicar directamente esta relación al cálculo de la velocidad de propagación en una columna gaseosa una vez determinada la compresibilidad lineal  $k$  y la masa por unidad de longitud de la columna. Esta última es, evidentemente,  $\epsilon = A\rho_0$ , donde  $A$  es el área de la sección recta de la columna gaseosa y  $\rho_0$  es la densidad del gas (fig. 21-9). Para determinar la compresibilidad lineal, observaremos que, para un gas confinado en una columna de sección recta uniforme, la disminución unitaria de longitud  $-\Delta l/l$  puede expresarse como disminución unitaria de volumen  $-\Delta V/V$  o como aumento unitario de densidad  $\Delta\rho/\rho_0$ . La fuerza que se ejerce sobre la columna es  $F =$

A  $\Delta P$  donde  $\Delta P$  es el incremento de presión. La compresibilidad lineal podrá, pues, expresarse en la forma

$$k = -\frac{1}{AV} \frac{\Delta V}{\Delta P} = \frac{1}{A\rho_0} \frac{\Delta \rho}{\Delta P} = \frac{\kappa}{A} \quad (21-16)$$

donde  $\kappa$  es la compresibilidad cúbica usual del gas (véase capítulo 17). Por tanto, de la ecuación (21-15) y con  $\epsilon = A\rho_0$ , obtenemos la siguiente expresión para la velocidad de propagación en una columna gaseosa:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\kappa\rho_0}} = \sqrt{\frac{\Delta P}{\Delta \rho}} \quad (21-17)$$

Así pues, la onda presenta la interesante propiedad de que el cociente entre la variación de la presión y la variación de la densidad no es más que el cuadrado de la velocidad del sonido,

$$\frac{\Delta P}{\Delta \rho} = c^2 \quad (21-18)$$

En el caso de perturbaciones pequeñas, es decir, cuando  $\Delta \rho/\rho_0$  y  $\Delta P/P_0$  son mucho menores que la unidad, podemos sustituir (aproximadamente)  $\Delta P/\Delta \rho$  por la derivada  $dP/d\rho$ . Según hemos visto en el capítulo 17, la relación entre la presión y la densidad, y en consecuencia la compresibilidad cúbica  $-(1/V)dV/dP$ , dependen de las condiciones en que tiene lugar la compresión. Por ejemplo, las compresibilidades isotérmica y adiabática son

$$\kappa_{is} = \frac{1}{P_0} \quad \text{y} \quad \kappa_{ad} = \frac{1}{\gamma P_0} \quad (21-19)$$

respectivamente. Luego, introduciendo estas expresiones en la ecuación (21-17), obtenemos las expresiones siguientes para la velocidad de propagación en condiciones isotérmicas y adiabáticas:

$$c_{is} = \sqrt{\frac{P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{RT_0}{M}} \quad c_{ad} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}} = \sqrt{\gamma} c_{is} \quad (21-20)$$

donde  $M$  es la masa molecular del gas y  $\gamma = c_p/c_v$  es el cociente entre los calores específicos a presión constante y a volumen constante. Las expresiones (21-20) que contienen la temperatura se obtuvieron aplicando la ley de los gases  $PV = RT$  (un mol) con ayuda de la cual puede expresarse la densidad  $\rho = M/V$  en la forma  $\rho = PM/RT$ .

En la inmensa mayoría de los casos, la experiencia indica que la velocidad de propagación medida concuerda satisfactoriamente con el valor para condiciones adiabáticas. En el aire a 20° C (293° K), por ejemplo, la velocidad medida



es 344 m/s. El valor calculado basado en la hipótesis de temperatura constante es  $c_{is} = 292$  m/s, mientras que el valor adiabático es  $c_{ad} = 344$  m/s tomando  $\gamma = 7/5$ , que es el valor adecuado para un gas diatómico.

En el capítulo próximo veremos que las ondas débiles de forma arbitraria, cual son las ondas sonoras ordinarias, se pueden formar mediante superposición lineal de pulsos ondulatorios débiles del tipo que consideramos y que la velocidad de propagación para condiciones adiabáticas  $c = \sqrt{\gamma P_0 / \rho_0}$  también es aplicable a estas ondas. A esta velocidad se le suele llamar velocidad del sonido y a todas las perturbaciones ondulatorias (débiles) en medios elásticos suele llamárseles *ondas sonoras*.

Es importante observar que, según nuestro análisis, la velocidad del sonido en un gas dado sólo depende de su temperatura. Así, si variamos por bombeo continuo, la presión en el interior de un recinto que contiene gas, la velocidad del sonido en el gas deberá mantenerse constante mientras se mantenga constante la temperatura de éste. Este resultado ha sido corroborado por la experiencia para un amplio dominio de presiones. Sin embargo, a presiones muy bajas a las cuales el gas deja de comportarse como medio continuo, y a presiones muy elevadas a las cuales no se le puede considerar como gas perfecto a causa de las atracciones intermoleculares, la velocidad del sonido *depende* de la presión estática así como de la temperatura.

El cuadrado de la velocidad del sonido es inversamente proporcional a la masa molecular. Por ejemplo, la velocidad del sonido en el hidrógeno es unas cuatro veces mayor que en el aire (véase tabla 21-2). La dependencia de la velocidad del sonido de la temperatura y la masa molecular dada por la ecuación

TABLA 21-2. VELOCIDAD DEL SONIDO EN DISTINTOS GASES Y LÍQUIDOS

	Temperatura °C	Velocidad, m/s
<i>Gases</i>		
H <sub>2</sub>	0	1269,5
Aire, 1 atm	0	331,7
Aire, 50 atm	0	334,7
Cl <sub>2</sub>	0	205,3
<i>Líquidos</i>		
Agua	20	1482
Benceno	17	1166
Tetracloruro de carbono	20	938

(21-20) es compatible con la interpretación molecular de la propagación de las ondas sonoras. En el caso de la columna gaseosa representada en la figura 21-9, las moléculas chocarán contra el émbolo móvil adquiriendo una pequeña velocidad adicional en la dirección  $x$ . Esta velocidad adicional es del orden de la velocidad  $u$  del émbolo y es muy inferior a la velocidad térmica molecular. La «información» referente al émbolo móvil del extremo de la columna y a la cantidad de movimiento adicional adquirida por las moléculas, podrá esperarse que pase de una a otra capa molecular con una velocidad del mismo orden que la velocidad molecular térmica.

Efectivamente, al igual que la velocidad del sonido, la velocidad térmica molecular obtenida de la teoría cinética de los gases es proporcional a  $\sqrt{T}$  e inversamente proporcional a  $\sqrt{M}$ . La velocidad cuadrática media es  $v = \sqrt{3RT/M}$  comparable con el valor  $c = \sqrt{\gamma RT/M}$  de la velocidad del sonido.

*Propiedades de un pulso ondulatorio.* La dinámica de un pulso ondulatorio en un gas puede desarrollarse por analogía con las ondas en un resorte-muelle y en una barra maciza. Con referencia a la figura 21-9, observamos que cuando un gas está en equilibrio, la fuerza sobre el émbolo móvil es  $F_0 = P_0 A$ , donde  $P_0$  es la presión estática del gas. Si el émbolo se mueve hacia adelante durante un tiempo  $\Delta t$  con una velocidad  $u$ , se pondrá en movimiento una masa de gas  $\rho_0 A c \Delta t$  con la velocidad  $u$ . De la figura 21-9 vemos que una columna gaseosa de longitud inicial  $c \Delta t$  se comprime hasta una longitud  $(c - u) \Delta t$ . Por tanto, si es  $\Delta \rho$ , el aumento de densidad del gas en la región del pulso ondulatorio, la conservación de la masa exige que  $(c - u)(\rho_0 + \Delta \rho) = c \rho_0$ , de la cual se obtiene  $\Delta \rho = \rho_0 u / (c - u)$ . Si la velocidad  $u$  es mucho menor que la velocidad de propagación  $c$ , esta expresión se reduce a

$$\Delta \rho = \delta = \frac{u}{c} \rho_0 \quad (21-21)$$

donde hemos introducido la notación  $\delta$  para  $\Delta \rho$ , por ser más conveniente para estudios ulteriores.

Como en el caso del resorte-muelle o de la barra, es evidente que la velocidad  $u$  de las partículas no es igual a la velocidad total de cada molécula, ya que la mayor parte de la velocidad molecular se debe al movimiento térmico desordenado. La velocidad  $u$  de las partículas es, más bien, la velocidad media adicional que adquieren las moléculas a consecuencia del impulso exterior o fuerza que se ejerce sobre el medio.

Hemos obtenido, pues, el incremento de densidad de la región del pulso ondulatorio, y el incremento correspondiente de la presión se deduce inmediatamente de la ecuación (21-18), que establece que el cociente  $\Delta P / \Delta \rho$  entre la variación de la presión y la variación de la densidad es igual a  $c^2$ . De la misma manera que introdujimos un símbolo especial para el incremento de den-

sidad, será conveniente representar por  $p$  el incremento de presión  $\Delta P$  y a  $p$  le llamaremos presión del sonido. Entonces, de las ecuaciones (21-18) y (21-21), obtenemos

$$p = c^2 \delta = \rho_0 c u \quad (21-22)$$

Según hemos visto anteriormente, la compresión del gas es adiabática y en consecuencia las variaciones de densidad y presión del gas vendrán acompañadas de una variación de temperatura. Dejamos como ejercicio (prob. 21-11) demostrar que el incremento de temperatura en el pulso ondulatorio es

$$\Delta T = \theta = (\gamma - 1) \frac{u}{c} T_0 \quad (21-23)$$

La relación (21-22) existente entre la presión del sonido y la velocidad de las partículas se podría haber obtenido también a partir de la relación entre impulso y cantidad de movimiento. A la cesión de cantidad de movimiento a la columna gaseosa sólo contribuye el exceso de fuerza  $pA$  sobre el émbolo y como esta fuerza actúa durante el tiempo  $\Delta t$ , se da una velocidad  $u$  a una masa de gas  $\rho_0 A c \Delta t$ . Entonces, por el teorema de la cantidad de movimiento, obtenemos  $pA \Delta t = \rho_0 A c \Delta t u$ , o sea  $p = \rho_0 c u$ , como antes.

Al calcular el trabajo realizado por el émbolo sobre la columna gaseosa, cuando recorre aquél hacia adelante la distancia  $u \Delta t$ , debemos considerar la fuerza total  $(P_0 + p)A$  sobre el émbolo. El trabajo por unidad de superficie es

$$(P_0 + p)u \Delta t = P_0 u \Delta t + pu \Delta t = P_0 u \Delta t + \rho_0 c u^2 \Delta t$$

que es la energía cedida al pulso ondulatorio. Según veremos pronto, el desplazamiento medio del émbolo al generar una onda suele ser nulo y, en estas condiciones, el primer término  $P_0 u \Delta t$  tiene por valor medio cero. Por tanto, sólo el segundo término representa la energía de la onda. En el próximo capítulo proseguiremos este estudio.

## PROBLEMAS

21-1. Un muelle fijo por un extremo tiene una longitud  $L = 3$  m cuando no está deformado y una constante  $K = 4,5$  N/m y una masa total  $M = 1$  kg. El muelle está estirado y su longitud es de 6 m. Se genera en él un pulso ondulatorio transversal moviendo lateralmente su extremo con una velocidad constante  $u = 2$  m/s durante el tiempo que transcurre entre  $t = 0$  y  $t = 0,2$  s. (a) ¿Cuál es la velocidad

de propagación en el muelle? (b) Dibujar la forma del muelle en los instantes  $t = 0,1$ ;  $0,2$  y  $0,3$  s. (c) ¿Qué tiempo tarda el pulso en recorrer todo el muelle? (d) Si se estirara más el muelle hasta alcanzar una longitud de 12 m, ¿qué tiempo tardaría el pulso en llegar al extremo?

21-2. Hacemos referencia al problema anterior. (a) ¿Qué impulso se comunica al muelle? (b) Dibujar la velo-

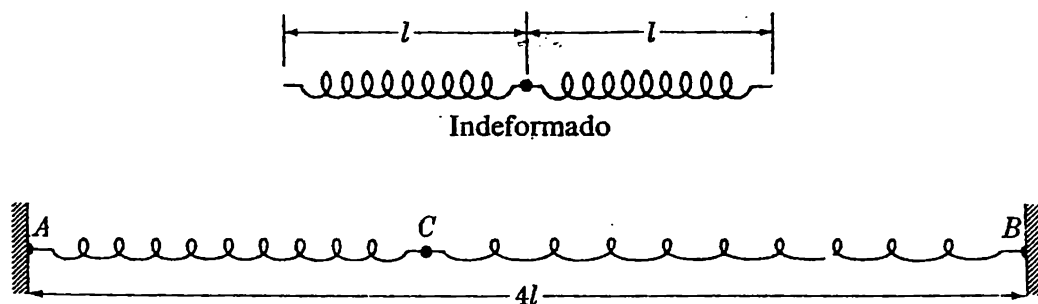


Figura 21-10

cidad transversal de las partículas en los instantes  $t = 0,1$ ;  $0,2$  y  $0,3$  s. (c) En el instante  $t = 0,3$  s, ¿qué parte o partes del muelle no están en equilibrio?

21-3. Dos resortes  $A$  y  $B$  de igual longitud  $l$  e igual masa  $m$ , pero de constantes diferentes  $K_a = 2K_b$  están unidos en el punto  $C$  y estirados hasta alcanzar una longitud total de  $4l$ , según se indica en la figura 21-10. Los otros extremos de  $A$  y  $B$  se mantienen fijos. (a) Determinar la longitud de cada uno de los resortes cuando están estirados. (b) Se aplica en la unión  $C$  un impulso transversal de manera que cada resorte reciba un pulso ondulatorio transversal. Si se aplica este impulso en el instante  $t = 0$ , determinar el cociente  $t_a/t_b$ , donde  $t_a$  y  $t_b$  son los tiempos de llegada de esos pulsos a los extremos fijos de los resortes  $A$  y  $B$ , respectivamente.

21-4. Hacemos referencia a los problemas 21-1 y 21-2. (a) ¿Qué trabajo se realizó para crear el pulso ondulatorio en el muelle? (b) Hallar, por cálculo directo, la energía cinética del pulso y también la energía necesaria para deformar estáticamente el muelle dándole la forma de la onda.

21-5. Consideremos el muelle descrito en el problema 21-1. Se le da un impulso longitudinal moviendo hacia adelante el extremo con velocidad constante  $u = 2$  m/s

durante el tiempo que va de  $t = 0$  hasta  $t = 0,2$  s. El muelle se halla estirado hasta alcanzar una longitud  $L = 6$  m. (a) ¿Cuál es la velocidad de propagación? (b) Dibujar la distribución sobre el muelle de la velocidad de las partículas en los instantes  $t = 0,1$  s,  $0,2$  s y  $0,3$  s. (c) ¿Cuál es el impulso total aplicado al muelle? (d) ¿Cuándo alcanzará el pulso el extremo del muelle? Demostrar que la longitud del muelle, supuesta mayor que la que tiene cuando no está deformado, no influye sobre este tiempo. ¿Es esto también cierto en el caso de una onda transversal?

21-6. Hacemos referencia al problema 21-3. Supongamos que se aplica un impulso *a lo largo* del resorte en la unión  $C$ , de manera que se generen ondas longitudinales. ¿Cuáles son los tiempos de llegada de los pulsos ondulatorios a  $A$  y  $B$ ?

21-7. De los datos de la tabla 18-3 determinar la velocidad de propagación de las ondas longitudinales en el aluminio, el hierro, el plomo y el cobre.

21-8. Se da un impulso a una barra de acero larga, en uno de sus extremos. La duración del impulso es de  $10^{-3}$  s, siendo constante la fuerza durante este tiempo e igual a  $F = 10^5$  N. La sección de la barra es  $A = 10$  cm<sup>2</sup> y la fuerza está distribuida uniformemente sobre esta sección. Determinar la densidad de energía del pulso ondulatorio generado por el

impulso. ¿Cuál sería la densidad de energía, en condiciones análogas, en una barra de cobre? ¿y de aluminio?

21-9. Una barra larga y recta de hierro, de sección recta  $10 \text{ cm}^2$ , está en reposo sobre una mesa exenta de rozamiento. Un cuerpo pequeño de masa  $m = 2 \text{ kg}$  y velocidad inicial  $v = 10 \text{ m/s}$  choca directamente contra el extremo de la barra y se observa que rebota hacia atrás con una velocidad de  $2 \text{ m/s}$  después del choque. (a) Estimar el tiempo de choque y la fuerza de contacto durante él. Supóngase que el choque es tal que la energía mecánica total (incluida la energía de la onda) se conserva y que la fuerza de contacto se mantiene constante durante la interacción. (b) Para que sea válido el análisis realizado en (a) la longitud de la barra debe superar a un cierto valor. Determinar esta longitud crítica. (c) Utilizando la longitud determinada en (b),

¿cuál será la velocidad del centro de masa de la barra una vez han desaparecido en ella las oscilaciones?

21-10. Calcular la velocidad del sonido en  $\text{H}_2$ ,  $\text{He}$  y  $\text{CS}_2$  a  $0^\circ \text{C}$ .

21-11. Refiriéndonos a la ecuación (21-23) del texto, deducir esta expresión para el incremento de temperatura de un pulso ondulatorio en un gas.

21-12. La temperatura del chorro en la tobera de un motor a reacción es de unos  $500^\circ \text{C}$ . ¿Cuál es la velocidad del sonido en el chorro?

21-13. La primera porción de un estampido puede aproximarse a un pulso ondulatorio del tipo estudiado en el texto. Supóngase que en el pulso el exceso de presión es de  $0,1 \text{ atm}$  en aire a  $20^\circ \text{C}$ . ¿Cuáles serán (a) la velocidad de las partículas en el pulso ondulatorio, (b) el exceso de densidad, y (c) el exceso de temperatura?

## SUPERPOSICIÓN DE PULSOS ONDULATORIOS; ONDAS ARMÓNICAS

*Resumen.* El principio de superposición de las fuerzas, aplicado a ondas de pequeña amplitud en cuerpos deformables, conduce al principio de superposición lineal de los desplazamientos y velocidades de las partículas en los pulsos ondulatorios. Las propiedades conocidas de los pulsos ondulatorios elementales, estudiadas en el capítulo anterior, resultan ser aplicables directamente a ondas de pequeña amplitud que dependan del tiempo de manera arbitraria. De esta manera, la relación fuerza-velocidad y el cálculo de la potencia y de la energía total de las ondas siguen teniendo validez, según ilustraremos con ejemplos. Se estudia el significado del tiempo retardado y se deduce y aplica al estudio de las ondas armónicas la descripción matemática de una onda unidimensional. Por último se da un breve análisis de la ecuación de onda unidimensional.

**22-1 Superposición lineal de ondas.** En nuestros estudios de mecánica anteriores estudiábamos el principio de superposición de las fuerzas que, en esencia, expresa el hecho experimental de que la cantidad de movimiento cedida en unidad de tiempo por un cierto número de fuerzas que se ejercen sobre un cuerpo es igual a la cantidad de movimiento cedida en unidad de tiempo por una fuerza única que sea la suma vectorial de las distintas fuerzas. Según hemos visto, este principio es aplicable a un número cualquiera de partículas y, en consecuencia, también a un cuerpo deformable. En el caso de perturbaciones ondulatorias débiles en un cuerpo deformable, veíamos en el capítulo 21 que la cantidad de movimiento cedida en unidad de tiempo a un cuerpo es proporcional a la velocidad de las partículas en la onda. Por tanto, el principio de superposición puede expresarse, en este caso, mediante una superposición lineal de velocidades de partículas.

Para estudiar experimentalmente esta cuestión emplearemos, como antes, ondas transversales porque son más fácilmente observables. En el primer experimento intervienen dos impulsos exteriores, aplicados sucesivamente, uno dirigido *hacia arriba*, seguido de otro dirigido *hacia abajo*. Si se aplican por separado estos dos impulsos a un resorte no perturbado inicialmente, los pul-

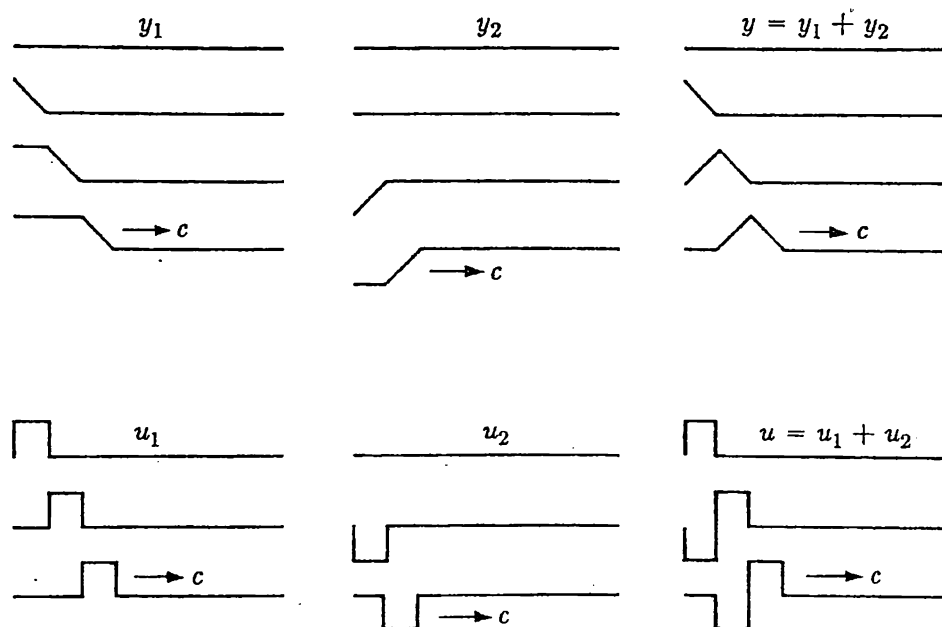


Fig. 22-1. Ejemplo de superposición lineal de pulsos ondulatorios.

Los pulsos ondulatorios de desplazamiento  $y_1$  e  $y_2$  y los impulsos de velocidad de partículas  $u_1$  y  $u_2$  serían los representados en la figura 22-1. Cuando se aplican al mismo resorte *ambos* impulsos, el resorte se deformará algo en el tiempo en que está aplicado el segundo impulso, pero si la deformación es suficientemente pequeña hallaremos que el resorte responde al segundo impulso de la misma manera que si no hubiera estado perturbado por el primer impulso. Así pues, el pulso ondulatorio total resulta ser la suma o superposición lineal de  $y_1$  e  $y_2$ . La relación  $F = \epsilon cu$  de la ecuación (21-8) será entonces aplicable en todo momento durante la generación de la onda, si es  $u$  la velocidad total de las partículas en la onda y  $F$  la fuerza accionante total.

**EJEMPLO.** Se estira un resorte de manera que tenga una tensión  $S = 12,8$  N y una masa de  $0,2$  kg/m. Sobre su extremo  $x = 0$  se ejerce una fuerza transversal que hace que el desplazamiento transversal del resorte dependa del tiempo de la manera indicada en la figura 22-2. (a) Determinar la velocidad transversal de las partículas en función del tiempo en la posición  $x = 0$ . (b) Determinar la fuerza transversal en función del tiempo en  $x = 0$ . (c) ¿Cuál es la forma del resorte que presentaría una fotografía instantánea tomada en el instante  $t = 0,7$  s?

La velocidad de la partícula en  $x = 0$  no es más que la derivada respecto al tiempo del desplazamiento, por lo que durante el intervalo de tiempo entre  $0$  y  $0,4$  s la velocidad de las partículas es  $50$  cm/s y durante la décima de segundo siguiente es  $-200$  cm/s.

La fuerza transversal que se ejerce sobre el resorte en  $x = 0$  es  $F_y = \epsilon cu$ . La velocidad de propagación es  $c = \sqrt{S/\epsilon} = 8$  m/s, por lo que la fuerza es  $0,8$  N durante

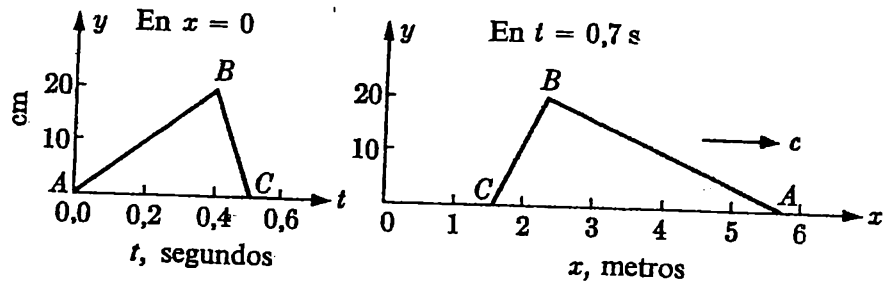


Figura 22-2

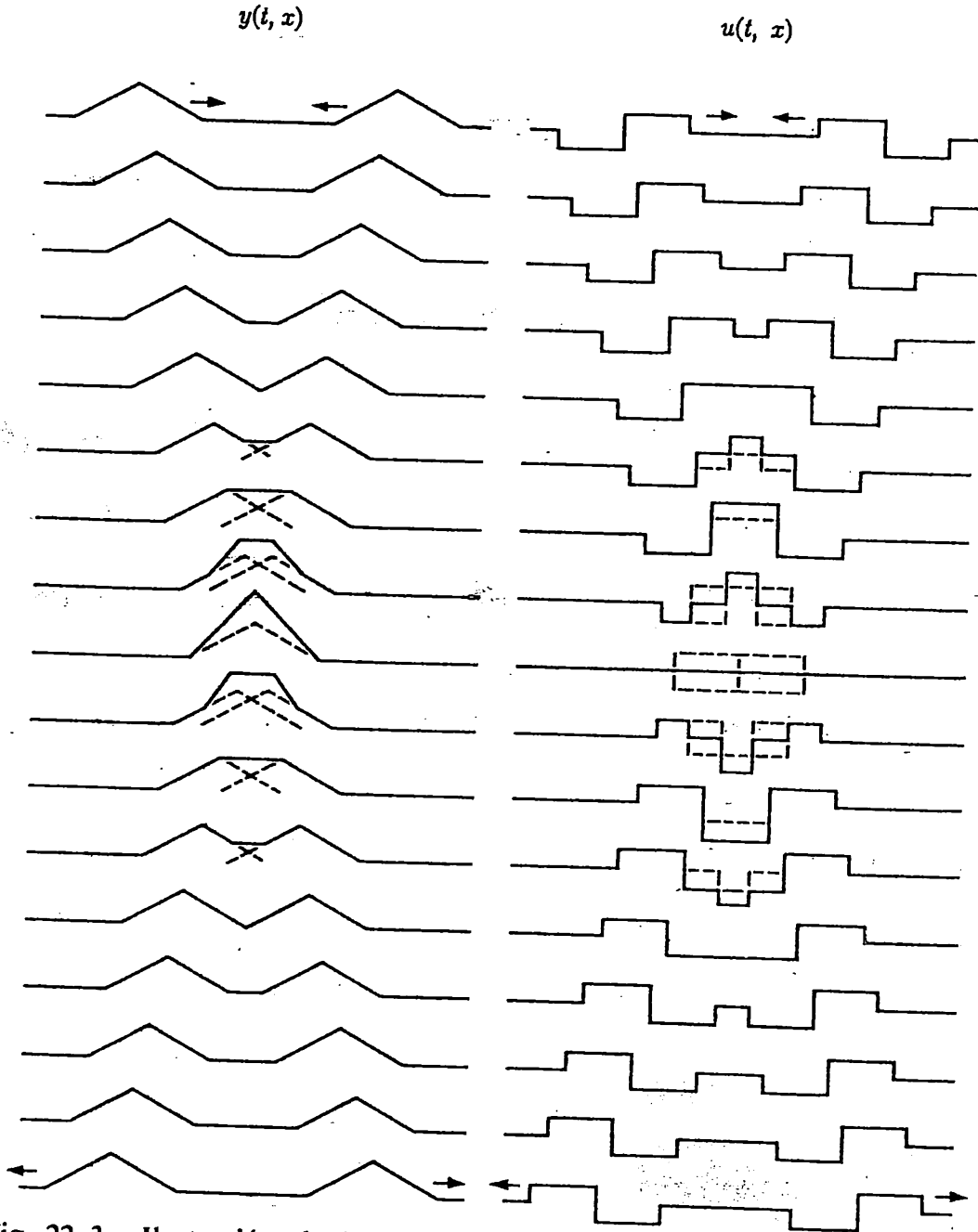


Fig. 22-3. Ilustración de la superposición lineal de pulsos ondulatorios que se mueven en sentidos contrarios.



el intervalo de tiempo comprendido entre 0 y 0,4 s, y es  $-3,2$  N en el intervalo de tiempo comprendido entre 0,4 y 0,5 s.

El desplazamiento del resorte *en función de  $x$*  en un instante dado es lo que tendríamos en una fotografía instantánea del resorte en dicho instante. Hagamos notar que la parte del pulso que haya llegado más lejos es la parte que se generó antes, o sea, la marcada con *A* en la figura. Como esta parte se generó en  $t = 0$ , hallamos que durante el tiempo  $t = 0,7$  s se habrá movido a una velocidad  $c = 8$  m/s y por tanto habrá alcanzado el punto situado a  $0,7 \cdot 8 = 5,6$  m del origen. El punto *B*, cresta del pulso, se generó en el instante  $t = 0,4$  s y en el instante  $t = 0,7$  s sólo habrá estado en movimiento 0,3 s y por tanto habrá alcanzado el punto  $x = 0,3 \cdot 8 = 2,4$  m. Análogamente, la parte final *C* del pulso ha estado en movimiento 0,2 s y en el instante  $t = 0,7$  s se hallará a  $0,2 \cdot 8 = 1,6$  m del origen. La longitud total del pulso a lo largo del resorte es  $c\Delta t = 8 \cdot 0,5 = 4$  m, donde la duración es  $\Delta t = 0,5$  s.

Otro experimento, quizá aún más interesante, es el siguiente. Consideremos dos pulsos iguales aplicados a los extremos de un resorte largo. Un pulso se mueve hacia la derecha y el otro hacia la izquierda. En la figura 22-3, que debe considerarse como resultado experimental, vemos que los dos pulsos ondulatorios se cruzan y siguen después con la misma forma que tenían antes. Además, el desplazamiento  $y$  de las partículas del resorte es igual a la suma de los desplazamientos de las partículas de uno y otro pulso. Análogamente, la velocidad  $u$  de las partículas se obtiene por superposición lineal.

**EJEMPLO 1.** Consideremos dos pulsos ondulatorios iguales que se propaguen en sentidos contrarios por un resorte. Los pulsos de desplazamiento son iguales, pero opuestos y en un momento se contrarrestarán, con lo que el resorte quedará recto, según se indica en la figura 22-4. ¿Cómo puede interpretarse la energía de esos pulsos ondulatorios en dicho momento?

En cada uno de los pulsos ondulatorios hay una energía  $E_1$ . La mitad de la energía de cada pulso es cinética y la otra mitad, potencial. Cuando se superponen los pulsos, no hay energía potencial. Pero fijémonos en la velocidad  $u$  de las partículas. La energía cinética inicial de cada pulso es  $E_1/2$  por lo que  $E_1$  es la energía cinética total inicial. Sin embargo, en el instante de la superposición los pulsos de velocidad de las partículas se suman, con lo que la velocidad total de las partículas será doble que antes y la energía cinética es  $4 \cdot E_1/2 = 2 E_1$ . Como no hay energía potencial, la energía total es  $2E_1$ , que es igual a la energía total  $E_1 + E_1$  de los pulsos antes de encontrarse.

**EJEMPLO 2.** Un resorte se halla deformado inicialmente, siendo su forma la indicada en la figura 22-5, y se suelta. ¿Cuál será el movimiento subsiguiente del resorte?

El desplazamiento inicial puede considerarse como superposición de dos pulsos ondulatorios, uno que se mueve hacia la izquierda y otro hacia la derecha (véase fig. 22-3), porque dicha superposición reproduce enteramente el estado inicial del resorte. Al soltarlo, la mitad del pulso de desplazamiento inicial se moverá hacia la izquierda y la otra mitad hacia la derecha. Inicialmente, la energía es puramente po-

tencial, pero, después de haber soltado el resorte, la energía de los pulsos que se propagan es la mitad cinética y la mitad potencial.

El principio de superposición nos permite considerar un pulso ondulatorio de forma arbitraria como superposición lineal de muchos pulsos ondulatorios elementales pequeños (fig. 22-6). Desde luego, con un número arbitrariamente grande de pulsos ondulatorios elementales podemos obtener, con tanta aproximación como queramos, la forma de una onda dada. Como cada uno de los pulsos se propaga con velocidad  $c$  y sus formas y tamaños no varían, podemos sacar análogamente la conclusión de que un pulso ondulatorio *arbitrario* cualquiera se propagará con velocidad  $c$  sin que se alteren su forma y tamaño, si se prescinde del rozamiento y de otras pérdidas. Es esta una consecuencia muy importante del principio de superposición y está sometida, desde luego, a la restricción de que sólo vale cuando la velocidad de las partículas es muy inferior a la velocidad de propagación.

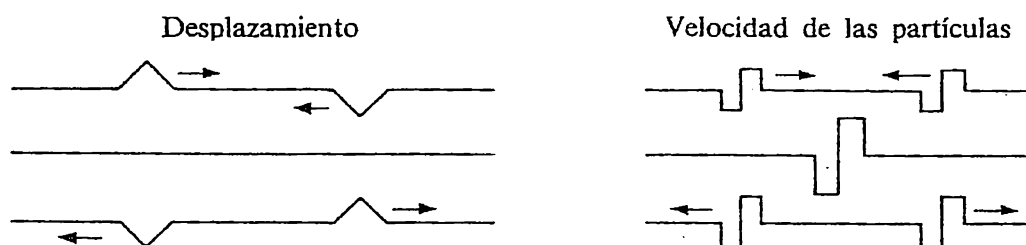


Figura 22-4

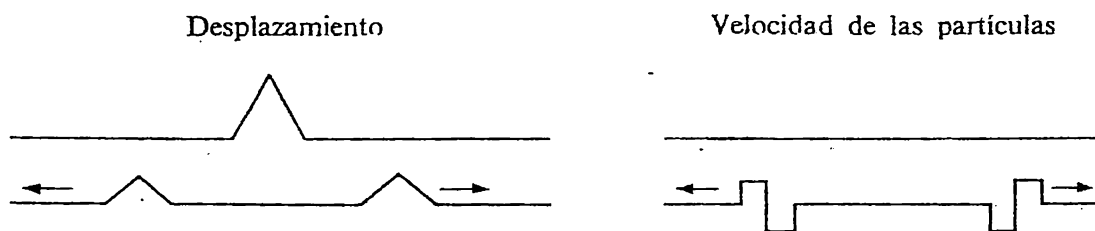


Figura 22-5

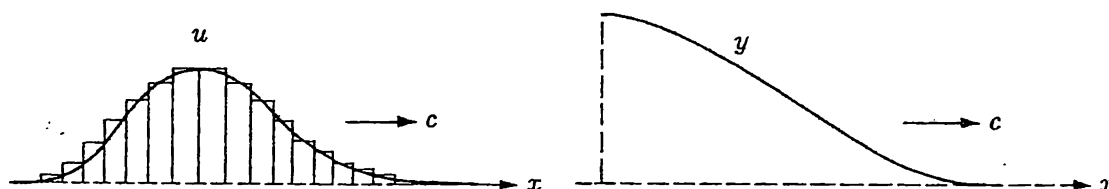


Fig. 22-6. Una onda (débil) de forma arbitraria se puede tratar como una superposición lineal de pulsos ondulatorios elementales.

Puesto que, según vimos en el capítulo 21, para cada pulso ondulatorio elemental la relación entre la fuerza accionante y la velocidad de las partículas se puede expresar en la forma

$$F = \epsilon cu \quad (22-1)$$

del principio de superposición se deduce que esta relación no sólo es aplicable a pulsos ondulatorios sino a todas las ondas débiles de forma arbitraria generadas variando continuamente las fuerzas accionantes. Antes de utilizar esta relación en el estudio de ondas continuas en resortes, barras y columnas de aire, queremos hacer algunas observaciones acerca de lo que determina la elección de signo de las cantidades  $u$  y  $F$  en esta relación.

Comencemos con el caso de una onda transversal en un resorte. Como en el capítulo anterior, la fuerza transversal accionante se aplica en el extremo izquierdo  $x = 0$  del resorte. La fuerza, la velocidad de las partículas y el desplazamiento de éstas se cuentan positivos cuando están dirigidos en el sentido positivo de las  $y$ , y en estas condiciones tenemos  $F = \epsilon cu$ . La onda que se origina se mueve en el sentido positivo de las  $x$  y en un corte imaginario del resorte en la región de la onda tenemos una fuerza transversal  $F_1$  que está relacionada con la velocidad de las partículas en dicho punto por  $F_1 = \epsilon cu_1$ . La fuerza  $F_1$  es la fuerza que se ejerce sobre la parte de resorte a la derecha del corte. La fuerza transversal que se ejerce sobre la parte de la izquierda es, claro está,  $-F_1$ . (Véase fig. 21-5).

Consideremos ahora una onda transversal que se propague en el sentido negativo de las  $x$ . La relación entre la fuerza transversal y la velocidad de las partículas es, desde luego, la misma que antes si tomamos la fuerza que se ejerce sobre la parte del resorte situada a la izquierda de un corte imaginario practicado en él. En cambio, si expresamos la relación entre la velocidad de las partículas y la fuerza transversal en función de la fuerza que se ejerce sobre la parte derecha del corte tenemos, para una onda que se propague hacia la izquierda,  $F_2 = -\epsilon cu_2$ .

Es fácil comprobar que se obtiene un resultado análogo en el caso de ondas longitudinales en resortes, barras y columnas de aire. Por ejemplo, en el caso de una onda sonora en un gas, originábamos un pulso ondulatorio desplazando un émbolo en el sentido positivo de las  $x$  (véase fig. 21-9). El émbolo generaba una onda compresiva que se propagaba en el sentido positivo de las  $x$  y la relación entre la presión y la velocidad de las partículas en la onda era  $p_1 = \rho cu_1$ . Si se desplaza el émbolo en el sentido negativo de las  $x$  se produce una onda de enrarecimiento que se propaga en el sentido positivo de las  $x$  y la velocidad de las partículas en esta onda es negativa. No obstante, también es negativa en esta onda la presión del sonido  $p$  y volvemos a tener  $p_1 = \rho cu_1$ . En cambio, si tenemos una onda que se mueve en el sentido negativo de las  $x$ , la presión

del sonido es positiva en una compresión pero la velocidad de las partículas tiene el sentido de las  $x$  negativas y tenemos  $p_2 = -\rho c u_2$ . A las ondas longitudinales en un resorte y en una barra serán aplicables relaciones análogas si se cuenta positiva  $F$  cuando se comprime el cuerpo. Estas relaciones se obtienen directamente si tomamos como velocidad de propagación  $+c$  para las ondas que se mueven hacia la derecha y  $-c$  para las ondas que se mueven hacia la izquierda.

Según se mencionó anteriormente, sólo pueden superponerse linealmente ondas débiles en las que  $u \ll c$ . Podemos comprender fácilmente esta limitación si consideramos una onda de gran amplitud en un resorte. En la región de gran deformación del resorte, la tensión y la masa por unidad de longitud (y en consecuencia el producto  $\epsilon c$ ) ya no pueden considerarse las mismas que en el resto del resorte. Si se añadiera entonces otro pulso ondulatorio al resorte, la velocidad de propagación y la velocidad de las partículas de este pulso dependerían de la deformación existente en el resorte. En las regiones de desplazamiento grande, la velocidad de propagación es mayor que en las de desplazamiento pequeño y se origina así una deformación de la onda.

*Energía de una onda.* Si es  $F$  la fuerza que origina una onda en un resorte o en una barra maciza y es  $u$  la velocidad de las partículas de la onda en el punto de aplicación de la fuerza, la potencia suministrada por la fuerza a la onda es  $R = Fu$ . Cuando la velocidad de la partículas esté relacionada con la fuerza accionante por la relación  $u = F/\epsilon c$  dependiendo  $F$  del tiempo de manera arbitraria, vemos que la expresión

$$R = Fu = \epsilon c u^2 \quad (22-2)$$

tiene validez general. Esta potencia se cede a la onda y ésta la transporta en la dirección de propagación. La energía total cedida a la onda se obtendrá, pues, mediante la integral

$$H = \int R dt = \epsilon c \int u^2 dt \quad (22-3)$$

donde la integración se extiende a todo el tiempo de aplicación de la fuerza. Cuando se aplica esta relación a ondas en una barra maciza o en una columna de aire tenemos  $\epsilon = A\rho$ , donde  $A$  es el área de la sección recta y  $\rho$  la densidad.

En el caso de generación de sonido por un émbolo en una columna gaseosa, como en la figura 21-9, a la potencia suministrada por el émbolo no sólo contribuye la presión del sonido  $p$ , sino también la presión estática  $P_0$ , con lo que

$$(P_0 + p)u = P_0 u + \rho_0 c u^2$$

donde se ha introducido  $p = \rho_0 c u$ . Análogamente, la energía total suministrada por un émbolo de área unidad es

$$H = P_0 \int u \, dt + \rho_0 c \int u^2 \, dt \quad (22-4)$$

En la mayoría de los casos el desplazamiento total  $\int u \, dt$  del émbolo (y del gas) es nulo, por lo que también lo es el primer término de la ecuación (22-4).

**EJEMPLO.** Queremos hallar la energía total de la onda descrita en la figura 22-2. La onda está generada por un desplazamiento transversal en el cual se desplaza el extremo del resorte hasta  $y = 0,2$  m y vuelve atrás. El desplazamiento hacia afuera tiene lugar en el intervalo de tiempo comprendido entre  $t = 0$  y  $t_1 = 0,4$  s y el desplazamiento de regreso en el intervalo de tiempo comprendido entre  $t_1 = 0,4$  s y  $t_2 = 0,5$  s. Las velocidades eran constantes en estos desplazamientos e iguales, respectivamente, a  $u_1 = 0,2/0,4 = 0,5$  m/s y  $u_2 = -0,2/0,1 = -2$  m/s. Tenemos  $\epsilon = 0,2$  kg/m y la tensión del resorte es  $S = 12,8$  N, con lo que  $c = \sqrt{64} = 8$  m/s. Así pues, tenemos  $\epsilon c = 1,6$  kg/s. La energía total de la onda es, pues,

$$\begin{aligned} H &= \epsilon c \left[ \int_0^{t_1} u_1^2 \, dt + \int_{t_1}^{t_2} u_2^2 \, dt \right] = \epsilon c [u_1^2 t_1 + u_2^2 (t_2 - t_1)] \\ &= 1,6 [0,5^2 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,1] = 0,8 \text{ J} \end{aligned}$$

**22-2 Descripción matemática de una onda.** En este apartado estudiaremos brevemente los elementos de la descripción matemática de las propiedades de una onda unidimensional. Comenzaremos considerando la propiedad fundamental de que la onda se propaga con velocidad constante y sin variar su forma. Por ejemplo, si una onda generada en  $x = 0$  se propaga en el sentido positivo de las  $x$ , es evidente que el desplazamiento de la onda en la posición  $x$  y en el tiempo  $t$  se originó en el punto generador  $x = 0$  en un instante anterior  $t - (x/c)$ . A esta tiempo se le suele llamar *tiempo de retardo*. En consecuencia, si se genera en  $x = 0$  mediante un desplazamiento que varíe con el tiempo según la función  $y(t)$ , una onda que se propague en el sentido positivo de las  $x$ , el desplazamiento en el punto  $x$  en el instante  $t$  estará dado por

$$y(x, t) = y \left( t - \frac{x}{c} \right) \quad (22-5)$$

que es el valor de  $y$  calculado en el tiempo retardado  $t - (x/c)$ . Obsérvese que esta descripción es aplicable a una onda que se propague en el sentido *positivo* de las  $x$ . Una onda que se propague en el sentido *negativo* de las  $x$  se describirá de manera análoga mediante la función  $y [t + (x/c)]$  si, como antes, el desplazamiento en  $x = 0$  viene dado por  $y(t)$ .

El desplazamiento se describe mediante una función de dos variables, posición  $x$  y tiempo  $t$ . Cuando observamos el movimiento en un punto fijo del espacio, sólo varía  $t$ , mientras que  $x$  se mantiene fija. En cambio, una fotografía instantánea del desplazamiento en un instante determinado  $t$  da la variación de  $y$  con  $x$ , manteniendo  $t$  constante. La velocidad de la partícula en un punto fijo  $x$  es, desde luego, la derivada del desplazamiento respecto al tiempo. Para indicar que en esta derivación se mantiene constante  $x$ , es costumbre utilizar el símbolo  $\partial/\partial t$ , de derivación parcial y la velocidad de la partícula podrá expresarse mediante la derivada parcial

$$u(t, x) = \frac{\partial y}{\partial t} \quad (22-6)$$

Si nos ocupamos de ondas transversales en un resorte, la pendiente del resorte se podrá expresar en forma análoga como  $\partial y/\partial x$ , que es la derivada parcial de  $y$  respecto a  $x$ . Entre las derivadas parciales respecto a  $x$  y respecto a  $t$  de la función de onda  $y[t - (x/c)]$  existe una relación sencilla. Si hacemos  $z = t - (x/c)$ , tenemos

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = \frac{\partial y}{\partial z}$$

y

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -\left(\frac{1}{c}\right) \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)$$

y por tanto  $c(\partial y/\partial x) = -\partial y/\partial t$ . Análogamente, para una onda  $y[t + (x/c)]$  que se propague en el sentido negativo de las  $x$ ,  $c(\partial y/\partial x) = \partial y/\partial t$ . Así pues, para ondas que se propaguen en uno y otro sentido en la dirección  $x$ , tenemos

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \mp \frac{1}{c} \frac{\partial y}{\partial t} \quad (22-7)$$

En el caso de ondas transversales en un resorte, podemos determinar la fuerza transversal que se ejerce sobre el resorte en un corte imaginario de éste en el punto  $x$ , según se indica en la figura 22-7. La fuerza total ejercida sobre la longitud del resorte a la derecha del punto  $x$  es, desde luego, la tensión  $S$  dirigida según se indica y si es positiva la pendiente del resorte en este punto, la componente  $y$  de esta fuerza es negativa, con lo que

$$F_y = -S \frac{\partial y}{\partial x} \quad (22-8)$$

Luego, utilizando los resultados de las ecuaciones (22-3) y (22-4) y  $c^2 = S/\epsilon$ ,

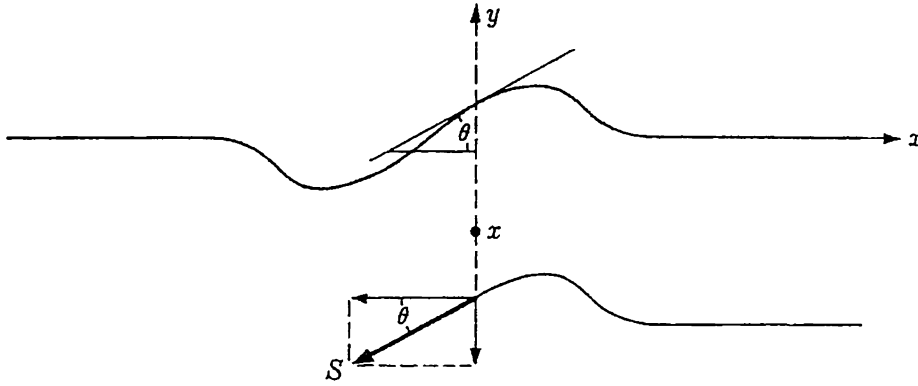


Fig. 22-7. La fuerza transversal es  $-S \sin \theta \approx -S(\partial y / \partial x)$ .

obtenemos, como antes,

$$F_y = \pm \epsilon c u$$

para ondas que se propaguen en los sentidos positivo y negativo de  $x$ , respectivamente.

**22-3 Ondas armónicas.** En este apartado estudiaremos el caso particular importantísimo en que la fuerza accionante varía armónicamente con el tiempo. En tal caso, en el punto generador  $x = 0$  podemos hacer  $F = F_0 \cos \omega t$ , donde  $f = \omega/2\pi = 1/T$  es la frecuencia y  $T$  es el período. Esta fuerza accionante puede generar una onda en un resorte, en una barra, o en una columna gaseosa. En todos los casos, la velocidad de las partículas producida en  $x = 0$  se puede expresar como  $u(0, t) = (F_0/\epsilon c) \cos \omega t = u_0 \cos \omega t$ , y el desplazamiento de la partícula podrá escribirse como  $y(0, t) = (u_0/\omega) \sin \omega t$  o sea

$$y(0, t) = y_0 \sin \omega t \quad (22-9)$$

El desplazamiento  $y(x, t)$  en la posición  $x$  en el instante  $t$  es igual al desplazamiento que se generó en  $x = 0$  en el instante anterior  $t - (x/c)$ , con lo que tenemos

$$y(x, t) = y_0 \sin \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \quad (22-10)$$

El desplazamiento armónico continuo en el extremo accionado de un resorte, por ejemplo, puede considerarse como una serie de pulsos que se propagan a lo largo del resorte, todos ellos con la misma velocidad de propagación  $c$ . La distancia recorrida por uno de dichos pulsos en un tiempo igual al período

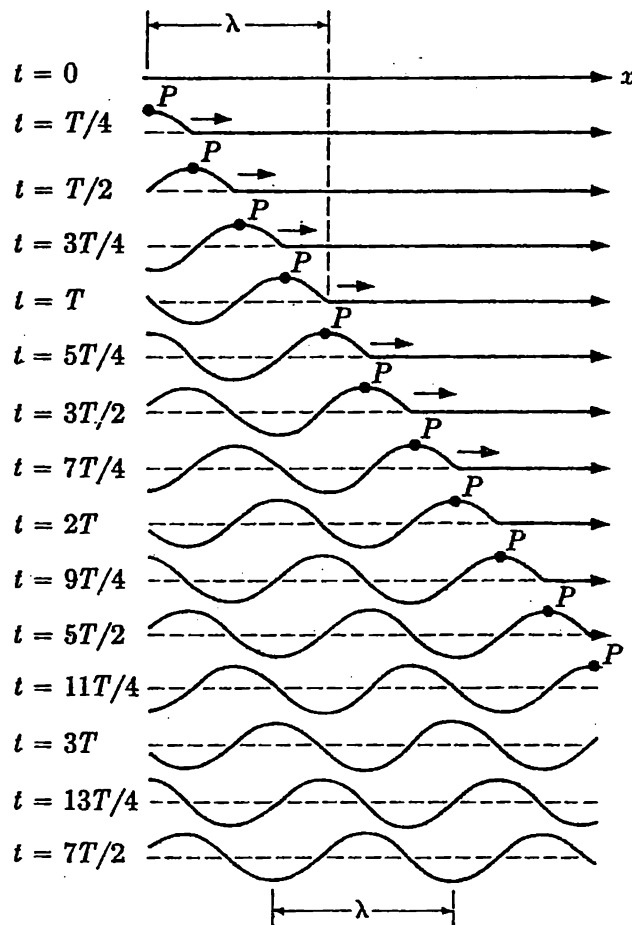


Fig. 22-8. El desplazamiento  $y(0,t) = y_0 \sin \omega t$  en  $x = 0$  genera la onda  $y(x,t) = y_0 \sin \omega [t - (x/c)]$ .

$T$  recibe el nombre de *longitud de onda*  $\lambda$  que, por tanto, podrá expresarse de la manera siguiente:

$$\lambda = cT = \frac{c}{f} \quad (22-11)$$

La longitud de onda  $\lambda$  es, pues, la distancia que separa en el resorte dos pulsos iguales, o sea la distancia repetitiva de la onda periódica que aparece en las fotografías instantáneas del resorte, según se ilustra en la figura 22-8. A una onda de este tipo se le llama *onda armónica progresiva*, para diferenciarla de las llamadas ondas estacionarias que estudiaremos más adelante. Cuando la onda llega al extremo lejano del medio elástico, el resorte en nuestro caso, suele reflejarse y a causa de ello se altera la representación de ondas de la figura 22-8. De momento, sólo nos ocuparemos de la onda progresiva y, por conveniencia, consideraremos infinitamente largo el medio elástico.

La expresión matemática de una onda armónica progresiva puede escribirse



de varias maneras diferentes. Por ejemplo, introduciendo  $T$  y  $\lambda$  en la ecuación (22-10) obtenemos

$$y(x, t) = y_0 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (22-12)$$

En (22-12) vemos que, para un valor dado de  $x$ , el argumento de la función sinusoidal variará en  $2\pi$  cuando se incremente  $t$  en  $T$ ; y que para un tiempo  $t$  dado, el argumento de la función sinusoidal varía en  $2\pi$  cuando se pasa del punto de observación  $x$  al  $x + \lambda$ .

La ecuación (22-11) es la onda debida a un desplazamiento  $y(0, t) = y_0 \sin \omega t$  en  $x = 0$ . También podemos decir que es la onda que en  $t = 0$  tiene un desplazamiento dado por  $y(x, 0) = -y_0 \sin (2\pi x/\lambda)$ . En consecuencia, una onda que se propague en el sentido positivo de las  $x$  y que tenga el desplazamiento  $y(x, 0) = y_0 \sin (2\pi x/\lambda)$  en  $t = 0$  vendrá dada por

$$y(x, t) = -y_0 \sin \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right]$$

Si el desplazamiento en  $x = 0$  depende del tiempo en la forma más general  $y(0, t) = y_0 \sin (\omega t + \phi)$ , donde  $\phi$  es la fase inicial, la onda resultante que se propaga en el sentido positivo de las  $x$  tendrá la forma general

$$y(x, t) = y_0 \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x}{c} + \phi \right) \right] \quad (22-13)$$

**EJEMPLO.** La figura 22-9 es una representación de tres instantáneas de una onda progresiva en un resorte de masa por unidad de longitud  $\epsilon = 0,2$  kg/m. La primera de ellas está rotulada con  $t = 0$ , aunque el movimiento se iniciara anteriormente. Sin embargo, el cronómetro se puso en marcha cuando lo hizo en este instante la cámara fotográfica. Queremos determinar (a) la velocidad de propagación, (b) la longitud de onda y la frecuencia, (c) la fuerza transversal accionante, (d) la tensión y (e) la expresión matemática de la onda.

Se ve claramente que la onda se propaga en el sentido positivo de las  $x$  y que la velocidad de propagación es  $1/0,1 = 10$  m/s porque el punto  $P$ , por ejemplo, recorre una distancia de 1 m en 0,1 s.

La longitud de onda es de 3 m porque en  $t = 0$  la forma del resorte ocupa en 3 m un ciclo completo. Por tanto, la frecuencia  $f$  es  $c/\lambda = 10/3$  Hz y el período  $T$  es  $1/f = 0,3$  s.

La amplitud  $y_0$  del desplazamiento es 0,1 m, con lo que la velocidad transversal máxima es  $u_0 = \omega y_0 = 2\pi \cdot (10/3) \cdot 0,1 = 2,1$  m/s. La amplitud de la fuerza accionante es, por tanto,  $F_0 = \epsilon c u_0 = 0,2 \cdot 10 \cdot 2,1 = 4,2$  N.

La tensión es  $S = c^2 \epsilon = 10^2 \cdot 0,2 = 20$  N.

La forma del resorte en  $t = 0$  está dada por  $y = y_0 \sin (2\pi x/\lambda)$ .

La expresión general de una onda que se propaga en el sentido positivo de las  $x$  es de forma  $y(x, t) = y_0 \sin [2\pi(t/T - x/\lambda + \phi)]$  y si esta onda ha de tener la forma

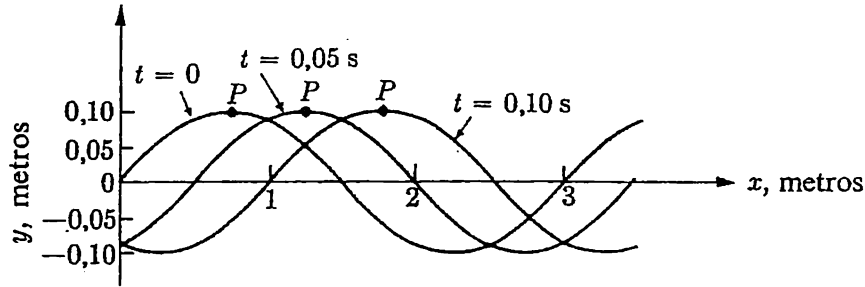


Figura 22-9

$y_0 \sin(2\pi x/\lambda)$  en  $t = 0$ , la fase inicial ha de ser tal que  $\sin(-2\pi x/\lambda + \phi) = \sin(2\pi x/\lambda)$ ; es decir,  $\phi = \pi$ . La onda se podrá escribir, pues, simplemente en la forma  $y(x, t) = -y_0 [\sin 2\pi(t/T - x/\lambda)]$ .

*Transmisión de energía en un movimiento ondulatorio armónico.* Apliquemos la expresión general  $R = Fu$  (véase ec. 22-2) de la potencia transportada por una onda. En el caso de una fuerza accionante armónica  $F = F_0 \cos \omega t$ , la velocidad de la partícula en  $x = 0$  es  $u = (F_0/\epsilon c) \cos \omega t = u_0 \cos \omega t$  y la potencia será

$$R(t) = \frac{F_0^2}{\epsilon c} \cos^2 \omega t = \epsilon c u_0^2 \cos^2 \omega t \quad (22-14)$$

Esta potencia debe cederse a la onda armónica que la transmite al propagarse en el sentido positivo de las  $x$ . La potencia varía con el tiempo entre el valor 0 y el valor máximo  $\epsilon c u_0^2$ . Como  $\cos^2 \omega t = (1 + \cos 2\omega t)/2$ , vemos que la potencia fluctúa con frecuencia doble que la de la fuerza alrededor del valor medio

$$\bar{R} = \frac{1}{2} \epsilon c u_0^2 \quad (22-15)$$

En la mayoría de los casos es este valor medio, y no la potencia instantánea, el que tiene interés.

Esta expresión de la potencia es aplicable a todas las ondas que hemos estudiado. En los casos de barras macizas y columnas gaseosas tenemos  $\epsilon = A\rho_0$ , donde  $A$  es el área de la sección recta y  $\rho_0$  la densidad. La potencia media transmitida por unidad de superficie normal a la dirección de propagación recibe el nombre de *intensidad*  $I$  de la onda armónica. Luego, para ondas en barras macizas y columnas gaseosas tenemos

$$I = \frac{1}{2} \rho_0 c u_0^2 \quad (22-16)$$

y la densidad media de energía correspondiente en la onda es

$$h = \frac{I}{c} = \frac{1}{2} \rho_0 u_0^2 \quad (22-17)$$

**EJEMPLO 1.** Nos referimos a la onda armónica en el resorte de la figura 22-9, ¿Cuál es la potencia media transmitida por el resorte? El desplazamiento máximo de las partículas de la onda es 0,1 m y como la frecuencia de oscilación es  $f = 10/3$  Hz. la velocidad máxima de la partícula es

$$u_0 = \omega y_0 = 2\pi \cdot \frac{10}{3} \cdot 0,1 \simeq 2,1 \text{ m/s}$$

La masa por unidad de longitud del resorte es  $\epsilon = 0,2$  kg/m y la velocidad de propagación es  $c = 10$  m/s, con lo cual  $\epsilon c = 2$  kg/s. La potencia media será, pues,

$$R = \frac{1}{2} \epsilon c u_0^2 = 4,4 \text{ J/s} = 4,4 \text{ W}$$

**EJEMPLO 2.** El umbral de audibilidad del oído humano a 1000 Hz se sabe que corresponde a una intensidad media de onda de unos  $10^{-16}$  W/cm<sup>2</sup>. Supóngase que se genera una onda sonora de esta intensidad mediante un émbolo móvil situado en el extremo de un tubo recto uniforme. (a) ¿Cuál es la amplitud de la velocidad? (b) ¿Cuál es la amplitud del desplazamiento del émbolo? (c) ¿Cuáles son la longitud de onda y la densidad de energía en la onda?

Una intensidad de  $10^{-16}$  W/cm<sup>2</sup> corresponde a una intensidad de  $10^9$  erg·s<sup>-1</sup>/cm<sup>2</sup>. La densidad del aire a 20° C y 76 cm Hg de presión es  $\rho_0 \simeq 0,0014$  g/cm<sup>3</sup> y la velocidad del sonido es  $c \simeq 340$  m/s. Así pues, la cantidad  $\rho_0 c$  es aproximadamente igual a 42 g/cm<sup>2</sup>·s y la velocidad de las partículas obtenida de  $I = \rho c u_0^2 / 2$  será,  $u_0 \simeq \sqrt{2 \cdot 10^{-9} / 42} \simeq 7 \cdot 10^{-6}$  cm/s. La amplitud del desplazamiento de las partículas es  $z_0 = u_0 / \omega$  y con  $\omega = 2\pi \cdot 1000$  s<sup>-1</sup>, obtenemos  $z_0 \simeq 10^{-9}$  cm, que es algo menor que una dimensión atómica. Por último, la longitud de onda de la onda sonora de 1000 Hz es  $\lambda = c/f = 34,4$  cm y la densidad media de energía en la onda es  $h = I/c \simeq 3 \cdot 10^{-14}$  erg/cm<sup>3</sup>.

**22-4 Ecuación de onda.** Según acabamos de ver, el desplazamiento de una partícula en una onda se propaga en el sentido positivo de las  $x$  puede expresarse en la forma  $y(t - x/c)$  y, análogamente, para una onda que se propague en el sentido negativo de las  $x$  tenemos la expresión  $y(t + x/c)$ . La velocidad de las partículas de la onda es entonces  $\partial y / \partial t$  y, según indica la ecuación (22-7), está relacionada con la variación de  $y$  por unidad de  $x$  de la manera sencilla:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \mp c \frac{\partial y}{\partial x} \quad (22-18)$$

Los signos menos y más corresponden a ondas que se propaguen en los sentidos positivo y negativo de  $x$ , respectivamente. Por tanto, una propiedad característica de una onda unidimensional es que la velocidad de variación de una cantidad es  $(\mp c)$  multiplicado por su variación por unidad de longitud. En conse-

cuencia, si derivamos la ecuación (22-18) para obtener la aceleración  $\partial^2 y / \partial t^2$ , obtenemos

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (22-19)$$

Esta ecuación, que la satisfacen las ondas que se propagan con velocidad  $c$  tanto en el sentido positivo como en el negativo, es aplicable a todos los tipos de ondas unidimensionales que hemos estudiado y recibe el nombre de *ecuación de onda unidimensional*.

Para obtener esta ecuación hemos partido de la expresión de una onda progresiva y hemos demostrado que las derivadas de la función de onda estaban relacionadas de esta manera sencilla. Inversamente, si sabemos de antemano que la segunda derivada respecto al tiempo de una cantidad  $y$  es proporcional a la segunda derivada respecto al espacio de la misma cantidad, con lo que  $\partial^2 y / \partial t^2 = (\text{const}) \partial^2 y / \partial x^2$ , entonces  $y(x, t)$  es una onda o una superposición de ondas y el cuadrado de la velocidad de propagación debe ser igual al cociente constante entre  $\partial^2 y / \partial t^2$  y  $\partial^2 y / \partial x^2$ . La velocidad de propagación depende, desde luego, de las propiedades elásticas del medio considerado. -

Ilustremos ahora, con un ejemplo específico, que el análisis del movimiento de un elemento de masa de una cuerda conduce efectivamente a una ecuación de onda para el desplazamiento de las partículas de la cuerda. La partícula de la cuerda es el elemento entre  $x$  y  $x + \Delta x$  de la figura 22-10. La masa de este elemento es  $\epsilon \Delta x$ , y está sometido a dos fuerzas, que son las fuerzas de tensión en los extremos del elemento. Las magnitudes de estas fuerzas son iguales a la tensión  $S$ , pero como varía la pendiente de la cuerda, las fuerzas no se contrarrestan sino que dan origen a una componente en la dirección transversal. Según la ecuación (22-8), la fuerza transversal que se ejerce sobre la parte de cuerda a la derecha de un corte es  $-S(\partial y / \partial x)$  y la fuerza sobre la cuerda a la izquierda del corte es  $S(\partial y / \partial x)$ . Así pues, la fuerza resultante que se ejerce so-

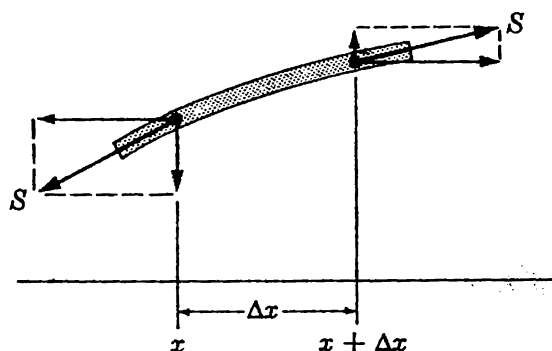


Fig. 22-10. La fuerza transversal resultante que se ejerce sobre el elemento de masa  $\epsilon \Delta x$  es  $S(\partial y / \partial x)_{x+\Delta x} - S(\partial y / \partial x)_x$ .

bre el elemento en el sentido positivo de las  $y$  es  $-S(\partial y/\partial x)_x + S(\partial y/\partial x)_{x+\Delta x}$ , que puede expresarse en la forma  $S(\partial^2 y/\partial x^2) \Delta x$ . La ecuación del movimiento del elemento de masa será, pues,  $\epsilon \Delta x (\partial^2 y/\partial t^2) = S(\partial^2 y/\partial x^2) \Delta x$  o sea

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left(\frac{S}{\epsilon}\right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (22-20)$$

y vemos que  $\partial^2 y/\partial t^2$  es, efectivamente, proporcional a  $\partial^2 y/\partial x^2$ , como en la ecuación de onda. La constante de proporcionalidad es  $S/\epsilon$  y la velocidad de propagación será

$$c = \sqrt{\frac{S}{\epsilon}}$$

### PROBLEMAS

22-1. En el instante  $t = 1,2$  s una onda transversal en un resorte de densidad lineal  $\epsilon = 0,3$  kg/m tiene la forma indicada en la figura 22-11. La velocidad de propagación en el resorte es 10 m/s. Representar gráficamente (a) el desplazamiento de una partícula, (b) la velocidad de una partícula y (c) la fuerza transversal, en función del tiempo en  $x = 0$  y  $x = 20$  centímetros.

22-2. La velocidad de propagación de las ondas transversales en una cuerda tensa es  $c = 10$  m/s. El desplazamiento transversal en  $x = 0$ , principio de la cuerda, es  $y(t, 0) = 0,1(t^2 - t^3)$  m, cuando  $0 < t < 1,0$  s, e  $y = 0$  para los restantes valores de  $t$ .

(a) Representar gráficamente el desplazamiento transversal en función del tiempo en  $x = 0$ . (b) Representar gráficamente el desplazamiento transversal en función de  $x$  en  $t = 1,0$  s. (c) ¿Cuál es la expresión matemática del desplazamiento en función del tiempo en  $x = 10$  metros? ¿Cuáles son los desplazamientos en este punto en los instantes  $t = 1,0$  s,  $1,5$  s y  $3,0$  s? (d) ¿Cuál es la velocidad transversal de la partícula en  $x = 10$  m y  $t = 1,5$  s? (e) ¿Cuál es la pendiente de la cuerda en  $x = 10$  m y  $t = 1,5$  s? (f) Si la masa de la cuerda por unidad de longitud es  $\epsilon = 2$  g/cm, ¿cuál es la fuerza transversal al principio de la cuerda? (g) ¿Cuál es la cantidad de movimiento trans

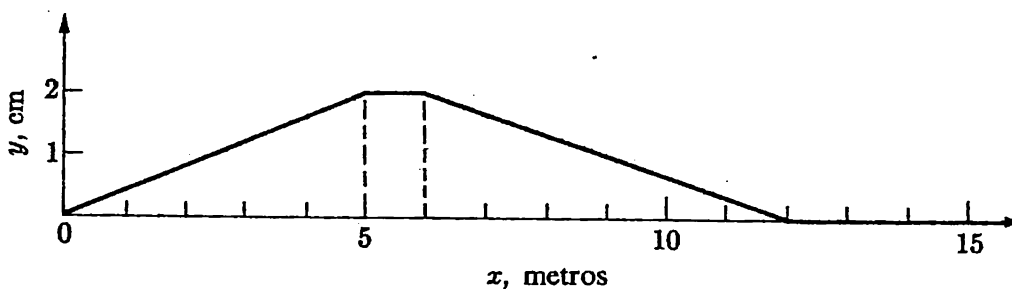


Figura 22-11

versal total del pulso ondulatorio cuando recorre la cuerda?

22-3. Se observa que un pulso tarda 0,1 s en recorrer una cuerda larga de extremo a extremo. La tensión de la cuerda se logra haciéndola pasar por una polea y colgándole un peso de masa 100 veces mayor que la de la cuerda. (Tómese  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ). (a) ¿Cuál es la longitud de la cuerda? (b) Se da a los extremos de la cuerda impulsos simultáneos tales que los pulsos ondulatorios que se originan, cuya forma es la de triángulo isósceles, se mueven hacia el centro a partir de los extremos de la cuerda. Los triángulos tienen bases de 1 m y alturas de 20 cm. ¿Cuáles son las velocidades transversales de la cuerda en los lados delantero y posterior de los triángulos? (c) Representar gráficamente el desplazamiento de las partículas, la velocidad de las partículas y la fuerza transversal en función del tiempo en cada extremo de la cuerda. La masa de la cuerda es de 0,05 kg (d) ¿Cuál es la forma y cuál la velocidad de las partículas de la cuerda cuando se superponen los pulsos en el centro?

22-4. ¿Cuál es la energía total transportada por el pulso ondulatorio (a) en el problema 22-1, y (b) en el problema 22-2?

22-5. Consideremos una cuerda larga

dirigida según el eje  $x$ . La velocidad de propagación de las ondas transversales es 10 m/s y la masa por unidad de longitud 0,1 kg/m. En los puntos  $A$  y  $B$ , situados en  $x_a = 5 \text{ m}$  y  $x_b = -5 \text{ m}$ , se dan a la cuerda los desplazamientos transversales representados en la figura 22-12 en función del tiempo. (a) Dibujar la forma de la cuerda en  $t = 0,3 \text{ s}$ ,  $0,5 \text{ s}$  y  $1 \text{ s}$ . (b) ¿Qué punto entre  $A$  y  $B$  está siempre en reposo? (c) Dibujar las distribuciones correspondientes de la fuerza transversal. (d) ¿Cuál es la energía total de la cuerda entre  $A$  y  $B$  en  $t = 0,5 \text{ s}$  y en  $t = 1,5 \text{ s}$ ?

22-6. Un resorte de longitud 1 m está constituido de cierto material que hace que su constante sea  $K = 100 \text{ N/m}$  y su masa 0,25 kg. Se acciona el extremo  $x = 0$  de un resorte largo de este material con un desplazamiento longitudinal  $z(0, t) = 0,02 [(t/t_0) - (t/t_0)^2] \text{ m}$  durante el tiempo entre  $t = 0$  y  $t = t_0 = 0,2 \text{ s}$ . El desplazamiento es nulo en los demás instantes. (a) ¿Qué funciones del tiempo son la velocidad de la partícula y la fuerza accionante en  $x = 0$ ? (b) ¿Durante qué intervalo de tiempo pasa el pulso ondulatorio por el punto  $x = 10 \text{ m}$ ? (c) ¿Qué región del resorte está ocupada por el pulso ondulatorio en el instante  $t = 2 \text{ s}$ ? (d) ¿Cuál es la energía total del pulso?

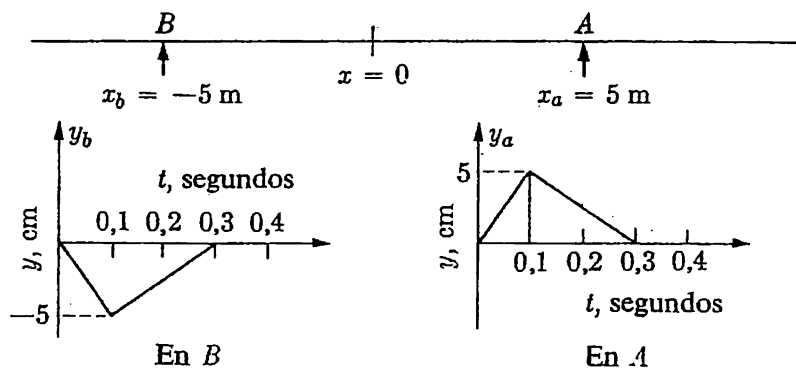


Figura 22-12

22-7. Hacemos referencia al problema 22-6. El desplazamiento

$$z(0, t) = z_0[(t/t_0) - (t/t_0)^2]$$

para  $0 < t < t_0$ ;  $z(0, t) = 0$  para  $0 > t > t_0$ , donde  $t_0 = 0,2$  s, se aplica primeramente al extremo de una barra de acero y luego al extremo de una columna de aire. (a) ¿Cuál debería ser, en estos dos casos, el valor de  $z_0$  para que la potencia máxima por centímetro cuadrado sea  $1 \text{ W/cm}^2$ ? La presión estática en la columna de aire es  $1 \text{ atm} \simeq 10^6$  barías. (b) ¿Cuál es la energía total del pulso ondulatorio en los dos casos si es  $A = 2 \text{ cm}^2$  el área de la sección recta tanto de la barra como de la columna de aire? (c) ¿Es compatible el resultado de (a) con la hipótesis de amplitud pequeña?

22-8. Consideremos la cuerda del problema 22-2. El extremo de la cuerda está accionado con movimiento armónico transversal  $y = y_0 \sin \omega t$ , con una frecuencia  $f = 10 \text{ Hz}$  y una amplitud  $y_0 = 0,2 \text{ m}$ . (a) ¿Cuál es el desplazamiento, en función del tiempo, a una distancia  $x = 1 \text{ m}$ ? (b) Dibujar la forma de la cuerda en el instante  $t = 0,5 \text{ s}$ . ¿Cuál es la longitud de onda? (c) ¿Cuáles son la velocidad, aceleración y fuerza transversales, en función del tiempo, en  $x = 1 \text{ m}$ ? Determinar las amplitudes de estas cantidades. (d) ¿Cuál es la diferencia de fase

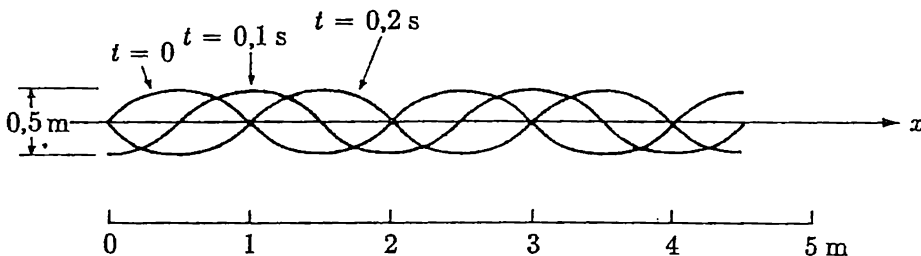
entre la oscilación armónica del resorte en  $x = 0$  y en  $x = 0,2 \text{ m}$ ?

22-9. En la figura 22-13 se reproducen tres instantáneas consecutivas de una onda progresiva en una cuerda. Con referencia a la figura, determinar la amplitud del desplazamiento de la onda, la longitud de onda, la velocidad de propagación, la frecuencia de la fuerza accionante y su amplitud. ¿Cuál es la potencia de la onda y cuál es la densidad de energía en la cuerda?

22-10. Se desea generar una onda sonora progresiva en un tubo de sección recta de área  $2 \text{ m}^2$ , a una frecuencia de  $20 \text{ Hz}$  y con una amplitud de presión igual a  $0,01 \text{ atm}$ . Si hay que generar esta onda sonora con un émbolo plano de igual área que la sección del tubo y situado en un extremo de éste, ¿cuál debería ser la amplitud del desplazamiento del émbolo y la fuerza que lo accionara? ¿Cuál sería la potencia total transportada por la onda sonora a lo largo del tubo?

22-11. ¿Qué intensidad de onda sonora corresponde a una amplitud de velocidad de una décima parte de la velocidad del sonido?

22-12. Una onda armónica de presión sonora  $p = p_0 \sin(\omega t - 2\pi x/\lambda)$  tiene una amplitud de presión  $p_0 = 1$  baría y una frecuencia de  $1000 \text{ Hz}$ . ¿Cuáles son las expresiones matemáticas de las ondas de desplazamiento de las partículas, de su



Cuerda: masa por unidad de longitud,  $\epsilon = 3 \text{ g/cm}$

Figura 22-13

velocidad, de la densidad, y de la temperatura asociadas a la onda sonora? Para cada onda, determinar su amplitud. ¿Cuáles de estas ondas están en concordancia de fase con la onda de presión?

22-13. ¿Qué amplitud del desplazamiento de las partículas se precisa en el extremo de una barra de acero para generar un sonido armónico de frecuencia  $10^6$  Hz e intensidad  $10 \text{ W/cm}^2$ ?

22-14. Se aplica un émbolo vibrante, primeramente a la columna de aire de un tubo largo y después al extremo de una barra larga de acero de igual sección que el tubo. ¿Cuál es el cociente entre las intensidades de sonido generadas por el émbolo en el aire y en la barra de acero, (a) si la fuerza que acciona el émbolo es la misma en ambos casos, y (b) si la amplitud de desplazamiento es la misma en ambos casos?

22-15. Un oscilador constituido por una masa y un resorte ( $m = 2 \text{ kg}$ , constante del resorte  $K = 32 \text{ N/cm}$ ) se conecta a una cuerda larga tensa, según se indica en la figura 22-14. La masa desliza sobre un barra guía horizontal sin rozamiento según la dirección  $y$ , mientras la cuerda se extiende en la dirección  $x$ . La cuerda tiene una tensión  $S = 100 \text{ N}$  y su masa por unidad de longitud es  $\epsilon = 0,25 \text{ kg/m}$ . Prescíndase de las refle-

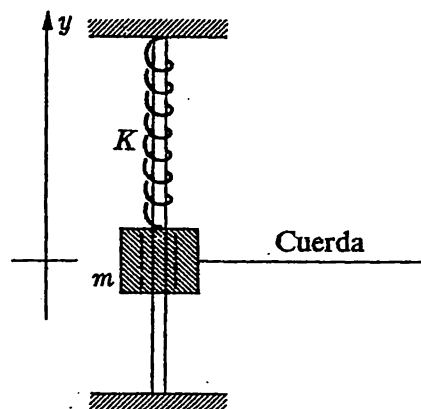


Figura 22-14

xiones en el extremo lejano de la cuerda. (a) ¿Cuál es la frecuencia de las oscilaciones libres del oscilador, prescindiendo del efecto de la cuerda? (b) ¿Cuál es la naturaleza del efecto de la cuerda sobre el movimiento del oscilador? ¿Actúa la cuerda como una masa o una rigidez adicionales, o como una fuerza de rozamiento? (c) ¿Cuál es la  $Q$  (véase cap. 8) del oscilador, considerando el efecto de la cuerda? (d) Supongamos que se suelta el oscilador desde  $y = y_0 = 5 \text{ cm}$ . Indicar la forma y longitud del tren de ondas en la cuerda en el instante en que la amplitud del oscilador se ha reducido al producto de  $1/e$  por el valor inicial. ¿Cuál será la forma de la cuerda al cabo de un tiempo muy largo?



## REFLEXIÓN DE ONDAS Y OSCILACIONES CARACTERÍSTICAS

*Resumen.* En los límites entre dos medios elásticos, las ondas suelen reflejarse. Se estudia la mecánica de la reflexión y transmisión de un pulso ondulatorio con distribución rectangular de la velocidad, y aplicando los principios de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía, determinamos los pulsos ondulatorios reflejado y transmitido. Se compara el análisis con el problema, en cierto modo análogo, del choque unidimensional perfectamente elástico de dos partículas, una de las cuales se hallaba en reposo inicialmente. Se estudian después el campo ondulatorio resultante de la superposición de una onda incidente y una reflejada y a continuación las propiedades de las ondas estacionarias. El análisis de las reflexiones sucesivas en los extremos de un cuerpo elástico conduce a los conceptos de períodos propios y frecuencias propias y al estudio de los modos característicos o normales de oscilación. Se menciona brevemente la descomposición de una oscilación arbitraria en modos normales, y por último se ilustra con ayuda del movimiento de un resorte el movimiento armónico forzado de un cuerpo elástico finito.

En nuestro anterior estudio de las ondas sólo mencionamos la posibilidad de reflexión de las mismas en los límites, pero no intentamos analizar este fenómeno. La reflexión de las ondas es suficientemente importante para justificar un estudio especial y en este capítulo vamos a examinar no solamente la mecánica de los procesos de reflexión, sino también las propiedades de la onda que resulta al superponerse una onda incidente y otra reflejada.

**23-1 Reflexión de las ondas.** La reflexión de las ondas nos es conocida, desde un punto de vista cualitativo, por hechos conocidos tales como el eco de una onda sonora o la reflexión de una onda que se propaga por la superficie del agua o por una cuerda. Esta última es particularmente fácil de estudiar experimentalmente y al mismo tiempo aclara mucho las ideas. Si se fija a una pared un extremo de una cuerda tensa larga, o de un resorte largo de espiras muy apretadas, y se da al otro extremo un impulso transversal, el pulso ondulatorio resultante, al llegar a la pared, se refleja sin variación apreciable de su amplitud. No obstante, los sentidos del desplazamiento y de la velocidad de

las partículas se han invertido. Los experimentos de este tipo ponen de manifiesto que también se produce reflexión en la unión con algún otro resorte de diferente masa por unidad de longitud. Cuando la masa del segundo resorte disminuye continuamente a partir de un valor inicial muy grande, hallamos que la intensidad del pulso reflejado disminuye, hasta que se anula cuando son iguales las masas por unidad de longitud de ambos resortes. Si hiciéramos disminuir aún más la masa por unidad de longitud del segundo resorte, se obtendría de nuevo una onda reflejada en la cual los sentidos del desplazamiento y de la velocidad de las partículas serían los mismos de la onda inicial. En todos los casos se transmite al segundo resorte, a través de la unión, parte de la onda incidente.

En el estudio cuantitativo del problema de la reflexión haremos uso del principio de superposición, según el cual una onda de forma arbitraria puede considerarse constituida por la superposición lineal de pulsos ondulatorios elementales con distribución rectangular de la velocidad (véase fig. 22-6). En consecuencia, basta estudiar el comportamiento de uno de dichos pulsos ondulatorios elementales al alcanzar la superficie de separación de dos medios. Concretando, consideraremos un pulso ondulatorio transversal en un resorte pero, como en el estudio anterior de las ondas, los razonamientos y ecuaciones utilizados, así como los resultados obtenidos en el análisis, son aplicables directamente a ondas longitudinales en resortes, barras macizas y columnas gaseosas.

Según se indica en la figura 23-1, el pulso ondulatorio inicial tiene una velocidad  $u_i$  de las partículas y una duración  $\Delta t$ . Se propaga con una velocidad  $c_1$  por un resorte cuya masa por unidad de longitud es  $\epsilon_1$ . Este resorte está unido a otro de masa por unidad de longitud  $\epsilon_2$  y al que corresponde una velocidad de propagación  $c_2$ . Al alcanzar la unión, el pulso incidente se divide en un pulso reflejado y otro transmitido con velocidades de las partículas  $u_r$  y  $u_t$  respectivamente. El objeto del análisis es determinar los valores de  $u_r$  y  $u_t$  en función de la velocidad  $u_i$  de las partículas en el pulso incidente y de las propiedades de los dos resortes. Las condiciones antes y después de la reflexión son las indicadas en la figura 23-1. Ya hemos visto en los experimentos estudiados anteriormente que, en ciertas condiciones, las velocidades de las partículas en los pulsos incidente y reflejado tienen signos contrarios y este hecho debe ser previsto por el análisis.

Según vimos en el capítulo 21, la cantidad de movimiento (en la dirección transversal) del pulso ondulatorio incidente es  $\epsilon_1 c_1 u_i \Delta t$ , y la energía total es  $\epsilon_1 c_1 u_i^2 \Delta t$ . A los pulsos reflejado y transmitido serán aplicables expresiones análogas. Entonces, la conservación de la cantidad de movimiento y de la energía exige que

$$\begin{aligned}\epsilon_1 c_1 u_i &= \epsilon_1 c_1 u_r + \epsilon_2 c_2 u_t \\ \epsilon_1 c_1 u_i^2 &= \epsilon_1 c_1 u_r^2 + \epsilon_2 c_2 u_t^2\end{aligned}\tag{23-1}$$

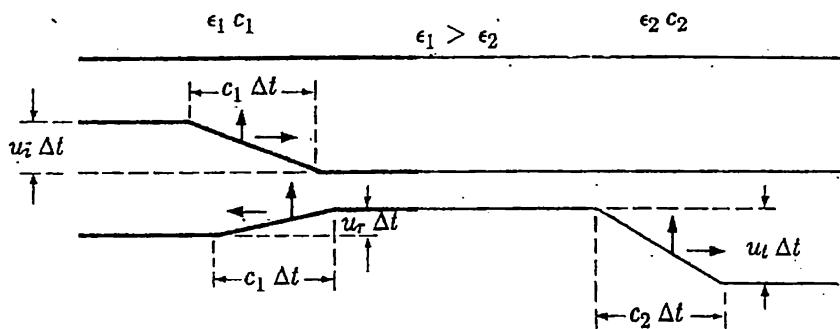


Fig. 23-1. Reflexión y transmisión de un pulso ondulatorio elemental

Estas dos ecuaciones son suficientes para la determinación de las dos velocidades desconocidas  $u_r$  y  $u_t$ . Obtenemos

$$\epsilon_1 c_1 (u_i - u_r) = \epsilon_2 c_2 u_t, \quad u_i + u_r = u_t \quad (23-2)$$

y

$$u_r = \frac{1 - (\epsilon_2 c_2 / \epsilon_1 c_1)}{1 + (\epsilon_2 c_2 / \epsilon_1 c_1)} u_i; \quad u_t = \frac{2}{1 + (\epsilon_2 c_2 / \epsilon_1 c_1)} u_i \quad (23-3)$$

Antes de pasar a discutir estos resultados, es interesante y de gran ayuda observar que el problema de la reflexión de ondas es parecido, en cierto modo, al choque unidimensional perfectamente elástico de dos bolas, una de las cuales estuviera inicialmente en reposo. (Véase cap. 7). Si las bolas  $A$  y  $B$  que chocan tienen por masas  $m_a$  y  $m_b$  y está  $B$  inicialmente en reposo, en virtud de la conservación de la cantidad de movimiento y de la energía, tenemos

$$\begin{aligned} m_a v_a &= m_a v'_a + m_b v'_b, \\ m_a v_a^2 &= m_a v'^2_a + m_b v'^2_b \end{aligned} \quad (23-4)$$

donde las cantidades con acento son las velocidades después del choque. De estas ecuaciones obtenemos

$$v'_a = \frac{1 - (m_b/m_a)}{1 + (m_b/m_a)} v_a, \quad v'_b = \frac{2}{1 + (m_b/m_a)} v_a \quad (23-5)$$

La velocidad inicial de  $A$  corresponde a la velocidad de las partículas en el pulso ondulatorio incidente y, análogamente, las velocidades de  $A$  y  $B$  después del choque corresponden a las velocidades de las partículas en los pulsos reflejado y transmitido, respectivamente. Solamente cuando son iguales las masas  $m_b = m_a$ , de las bolas se entrega a  $B$  toda la cantidad de movimiento y energía iniciales de  $A$ , con lo que la velocidad final de  $A$  es nula. Análogamente, en el caso de resortes, tan sólo cuando sean iguales éstos, o mejor, cuando  $\epsilon_2 c_2 = \epsilon_1 c_1$ , será nula la onda reflejada y se transmite al resorte adyacente, a través de la unión,

toda la cantidad de movimiento y toda la energía. Además, observamos que cuando  $m_b > m_a$  y, análogamente, cuando  $\epsilon_2 c_2 > \epsilon_1 c_1$ , las velocidades  $v'_a$  y  $u_r$  son negativas; es decir, sus sentidos son opuestos a los de  $v_a$  y  $u_i$  respectivamente. Este resultado es compatible con la observación experimental, antes estudiada, de que la velocidad de la partícula en un pulso ondulatorio que se propaga por un resorte se invierte cuando es reflejado por una pared (fig. 23-3).

Una vez determinadas las ondas de velocidad reflejada y transmitida, es fácil obtener las correspondientes ondas de desplazamiento reflejada y transmitida. Para una onda que se propague en el sentido positivo de las  $x$  tenemos  $\partial y_1 / \partial x = (1/c) \partial y_1 / \partial t = -u_1/c$ , y para una onda que se propague en el sentido negativo de  $x$ , la relación es  $\partial y_2 / \partial x = (1/c) \partial y_2 / \partial t = u_2/c$ . (Véase ec. 22-7). La figura 23-2 presenta los pulsos ondulatorios transversales de velocidad y de desplazamiento en el caso en que  $\epsilon_1 c_1 < \epsilon_2 c_2$ .

Los cocientes  $u_r/u_i$  y  $u_t/u_i$  reciben los nombres de *coeficiente de reflexión de la velocidad* y de *coeficiente de transmisión de la velocidad*, respectivamente. En la figura 23-3 se han representado estos coeficientes, que son funciones exclusivas del cociente  $\epsilon_2 c_2 / \epsilon_1 c_1$ . A la cantidad  $\epsilon c$  se le suele llamar *impedancia a las ondas característica* del medio. Si es mayor  $\epsilon_1 c_1$  que  $\epsilon_2 c_2$ , como en el caso representado en la figura 23-1, el pulso transmitido es mayor y el pulso reflejado

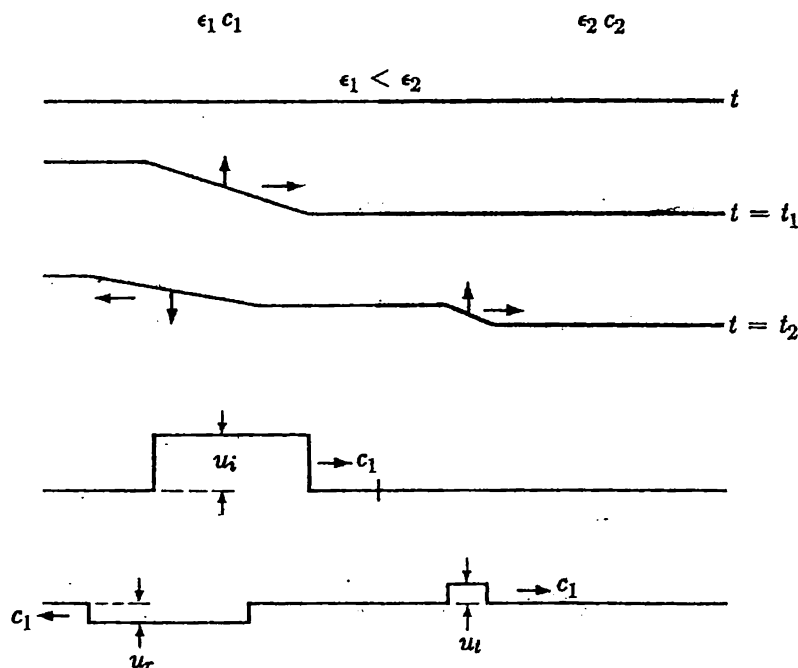


Fig. 23-2. Reflexión y transmisión de un pulso ondulatorio en el caso en que  $\epsilon_2 c_2 > \epsilon_1 c_1$ . El resorte de la izquierda tiene menor masa por unidad de longitud que el de la derecha. El pulso incidente se transmite en parte y en parte se refleja. La velocidad de las partículas en el pulso reflejado está dirigida hacia abajo mientras que en los pulsos incidente y transmitido está dirigida hacia arriba.

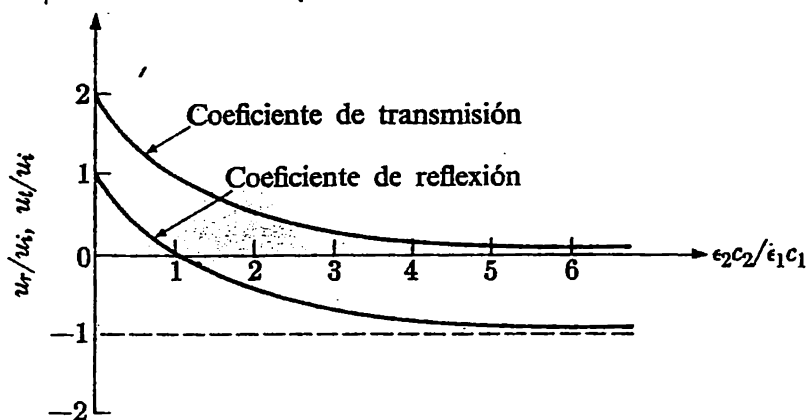


Fig. 23-3. Coeficientes de reflexión y de transmisión para una onda de velocidad que se transmite del medio 1 al medio 2.

menor, que el pulso incidente. En el límite, cuando  $\epsilon_1 c_1$  es mucho mayor que  $\epsilon_2 c_2$ , el pulso transmitido es el doble del pulso incidente y el pulso reflejado es igual al pulso incidente. Podríamos preguntarnos qué ocurre con la conservación de la energía en este caso, ya que es evidente que hay tanta energía en el pulso incidente como en el reflejado, lo cual no deja nada para la porción transmitida. Ocurre que cuando tenemos  $\epsilon_2/\epsilon_1 = 0$ , tenemos  $\epsilon_2 = 0$  para todo valor finito de  $\epsilon_1$ , con lo que la onda transmitida no transporta energía. En realidad, el coeficiente de transmisión de la energía  $\epsilon_2 c_2 u_t^2 / \epsilon_1 c_1 u_i^2$  se convierte en

$$\frac{\epsilon_2 c_2 u_t^2}{\epsilon_1 c_1 u_i^2} = \frac{4r}{(1+r)^2} \quad \text{donde } r = \frac{\epsilon_2 c_2}{\epsilon_1 c_1} \quad (23-6)$$

Si es mayor  $\epsilon_2 c_2$  que  $\epsilon_1 c_1$ , como ocurre en la figura 23-2, el pulso transmitido será siempre menor que el incidente. Además, el pulso reflejado está siempre cambiado de signo; es decir, si en el pulso incidente las partículas se movían *hacia arriba* cuando se acercaba la onda, se moverán *hacia abajo* en la onda reflejada. En el límite  $\epsilon_2 = \infty$  (por ejemplo, un resorte unido a una pared), no hay pulso transmitido y el reflejado tiene la misma amplitud que el incidente, pero una velocidad de las partículas de sentido contrario al de la velocidad de las partículas en la onda incidente. En la figura 23-4 puede verse la reflexión de un pulso ondulatorio transversal que se propaga por un resorte, en los dos casos límites  $\epsilon_2 c_2 / \epsilon_1 c_1 = \infty$  y  $\epsilon_2 c_2 / \epsilon_1 c_1 = 0$ .

El análisis que hemos realizado y los resultados obtenidos para los coeficientes de reflexión y transmisión son aplicables directamente a ondas que dependan del tiempo en forma arbitraria y tanto a ondas transversales como longitudinales que se propaguen por resortes, barras macizas y columnas gaseosas. En el caso ondas longitudinales habrá que utilizar, claro está, en la expresión la velocidad de propagación de las ondas longitudinales. Además, cuando se

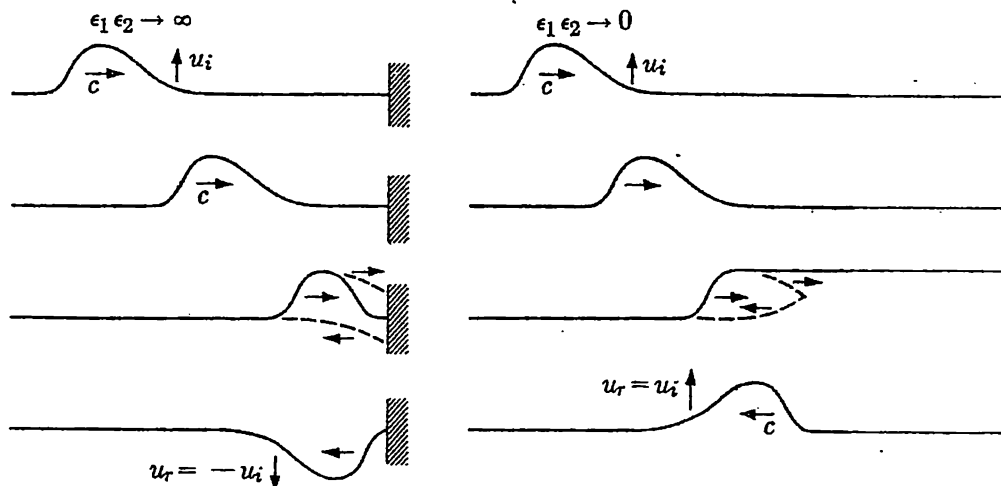


Fig. 23-4. Pulsos ondulatorios transversales reflejados en un resorte unido a una pared y en otro unido a un resorte mucho más ligero.

trata de ondas en barras macizas y columnas de aire se acostumbra a utilizar la impedancia característica  $\rho c$  por unidad de superficie.

**EJEMPLO.** Una barra de hierro que transporta una onda longitudinal se une por un extremo a (a) una columna de aire, (b) una columna de agua y (c) una barra de cobre. En todos los casos, las secciones rectas son iguales a la de la barra de hierro. ¿Qué fracción de la energía de la onda incidente se transmite a los distintos medios?

Utilizando los datos de, por ejemplo, la Tabla 17-3, obtenemos como impedancia característica del hierro  $\rho_1 c_1 \cong 4 \cdot 10^6$  g/s·cm<sup>2</sup>. Análogamente, para el aire, agua y cobre tenemos  $(\rho c)_a \cong 42$ ,  $(\rho c)_{H_2O} \cong 1,5 \cdot 10^6$ , y  $(\rho c)_{Cu} \cong 3,2 \cdot 10^6$  g/s·cm<sup>2</sup>. Entonces, según la ecuación (23-6), encontramos los siguientes coeficientes de transmisión de la energía (a)  $4 \cdot 10^{-5}$ , (b) 0,79 y (c) 0,98. Evidentemente, la energía transmitida por la barra de hierro al aire es muy pequeña, mientras que en el caso de transmisión al agua y, en particular, al cobre, la cesión de energía es considerable. Cuando las impedancias características de los dos medios son iguales, no se generarán ondas reflejadas cuando cruce su límite una onda incidente. La «adaptación» o «igualación» de las impedancias de dos medios constituye un problema importante de muchas aplicaciones técnicas de fenómenos ondulatorios.

Asociadas a las ondas reflejada y transmitida de los desplazamientos y velocidades de las partículas, hallamos también ondas de fuerza reflejada y transmitida o, en el caso de una columna gaseosa, ondas de presión. Según se estudió al tratar de la ecuación (22-1), la relación entre la fuerza y la velocidad de las partículas es  $F_1 = \epsilon c u_1$  para una onda que se propague en el sentido de  $x$ , y  $F_2 = -\epsilon c u_2$  para una onda que se propague en el sentido opuesto. Análogamente, para una onda en un gas tenemos  $p_1 = \rho c u_1$  y  $p_2 = -\rho c u_2$  para ondas

que se propaguen en los sentidos positivo y negativo, respectivamente. Se deduce, pues, que el *coeficiente de transmisión de la fuerza (y de la presión)*  $F_t/F_i$  es igual al coeficiente de transmisión de la velocidad, mientras que el *coeficiente de reflexión de la fuerza (y de la presión)*  $F_r/F_i$  es de igual valor absoluto, pero de signo contrario, que el coeficiente de reflexión de la velocidad.

Para todos los tipos de onda que hemos estudiado, los coeficientes de reflexión y transmisión están determinados unívocamente por el cociente  $\epsilon_2 c_2 / \epsilon_1 c_1$  (o bien  $\rho_2 c_2 / \rho_1 c_1$ ) de las impedancias características de los dos medios que intervienen. Al tratar de la reflexión de ondas transversales en la unión de dos cuerdas, observamos que el cociente  $\epsilon_2 c_2 / \epsilon_1 c_1$  puede expresarse simplemente en función de las masas  $\epsilon_2$  y  $\epsilon_1$  porque la tensión  $S = c^2 \epsilon$  ha de ser la misma en las dos cuerdas. Por tanto, *en este caso* (ondas transversales en una cuerda) obtenemos

$$\frac{\epsilon_2 c_2}{\epsilon_1 c_1} = \frac{c_1}{c_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

*Condiciones en los límites.* Aún cuando hemos deducido las propiedades de las ondas reflejada y transmitida en la unión de dos resortes a partir de consideraciones acerca de la cantidad de movimiento y de la energía, hubiéramos podido deducirlas igualmente a partir de las condiciones necesarias de las ondas *en la unión o límite* entre dos resortes. Como éstos están unidos, el desplazamiento total de un resorte en la unión debe ser igual al desplazamiento total del otro en el mismo punto. El resorte que se halla más allá de la unión sólo transporta la onda transmitida y por tanto, el desplazamiento total de este resorte es  $y_t$ . En cambio, el otro resorte transporta las ondas incidente y reflejada y su desplazamiento total será,  $y_i + y_r$ . La condición de continuidad del desplazamiento en la unión es, pues,

$$y_i + y_r = y_t \quad (\text{en la unión})$$

Es evidente que no sólo los desplazamientos sino también las velocidades de las partículas deben ser iguales en la unión (de otra manera los resortes no se mantendrían juntos) y tenemos

$$u_i + u_r = u_t \quad (\text{en la unión}) \quad (23-7)$$

Por ser más conveniente para la descripción y el cálculo, hemos supuesto regularmente la existencia de pulsos rectangulares de velocidad y de desplazamiento, los cuales tienen ángulos recortados. Esta hipótesis no es real, porque los elementos de masa de los ángulos tendrían aceleraciones infinitas. (Si los dobleces no son suaves, el elemento de masa infinitesimal en el doblez se hallaría sometido a la influencia de una componente de fuerza finita en la dirección transversal, y, por tanto, tendría aceleración infinita.) Por tanto, en la práctica

los pulsos de velocidad tendrán siempre una pendiente finita y los cambios de dirección del resorte estarán siempre redondeados o alisados, según se indica en la figura 23-4. Así pues, para evitar una aceleración infinita, la componente transversal de la fuerza ha de ser la misma a ambos lados de un corte imaginario practicado en el resorte y a ambos lados de la unión de dos resortes. Recordemos que la fuerza transversal puede expresarse en la forma  $F_1 = \epsilon c u_1$  para una onda que se propague en el sentido positivo de  $x$ , y en la forma  $F_2 = -\epsilon c u_2$  para una onda que se propague en el sentido negativo de  $x$ . La fuerza transversal total en la onda transmitida será  $F_t = \epsilon_2 c_2 u_t$ , y la fuerza transversal total correspondiente a la superposición de las ondas incidentes y reflejada es  $F_i + F_r = \epsilon_1 c_1 u_i - \epsilon_1 c_1 u_r$ . La continuidad de la fuerza transversal en la unión podrá expresarse, pues, en la forma

$$F_i + F_r = F_t \quad \text{o sea} \quad \epsilon_1 c_1 (u_i - u_r) = \epsilon_2 c_2 u_t \quad (\text{en la unión}) \quad (23-8)$$

En el caso de una onda sonora en una columna gaseosa, esta condición límite no hace mas que expresar la continuidad de la presión. Las condiciones obtenidas de la continuidad de la velocidad de las partículas y de la fuerza expresadas en las ecuaciones (23-7) y (23-8) son equivalentes a las condiciones (23-2) obtenidas de la conservación de la cantidad de movimiento y de la energía. La condición de continuidad de la fuerza transversal resultaba de la continuidad de la pendiente del resorte y está bien claro que podría haberse expresado directamente esta condición en función de las pendientes

$$\frac{\partial y_i}{\partial x} + \frac{\partial y_r}{\partial x} = \frac{\partial y_t}{\partial x} \quad (\text{en la unión})$$

**EJEMPLO 1.** Se unen dos cuerdas de  $\epsilon_1 = 0,1 \text{ kg/m}$  y  $\epsilon_2 = 0,4 \text{ kg/m}$  y se mantienen bajo una tensión  $S = 10 \text{ N}$ , según se indica en la figura 23-5. Al extremo de la cuerda más ligera se aplican dos impulsos transversales, uno inmediatamente después del otro, con lo que resulta una onda de desplazamiento en la cuerda ligera, como la representada en la figura.

La velocidad de propagación en la cuerda ligera es  $c_1 = \sqrt{S/\epsilon_1} = \sqrt{10/0,1} = 10 \text{ m/s}$ , mientras que la velocidad de propagación en la cuerda pesada es  $c_2 = \sqrt{10/0,4} = 5 \text{ m/s}$ . La amplitud y la velocidad transversal de las partículas en las partes correspondientes de los pulsos están relacionadas por

$$u_t = \frac{2}{1 + \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1}} u_i = \frac{2}{1 + \sqrt{0,4/0,1}} u_i = \frac{2}{3} u_i$$

y

$$u_r = \frac{1 - \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1}}{1 + \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1}} u_i = -\frac{1}{3} u_i$$



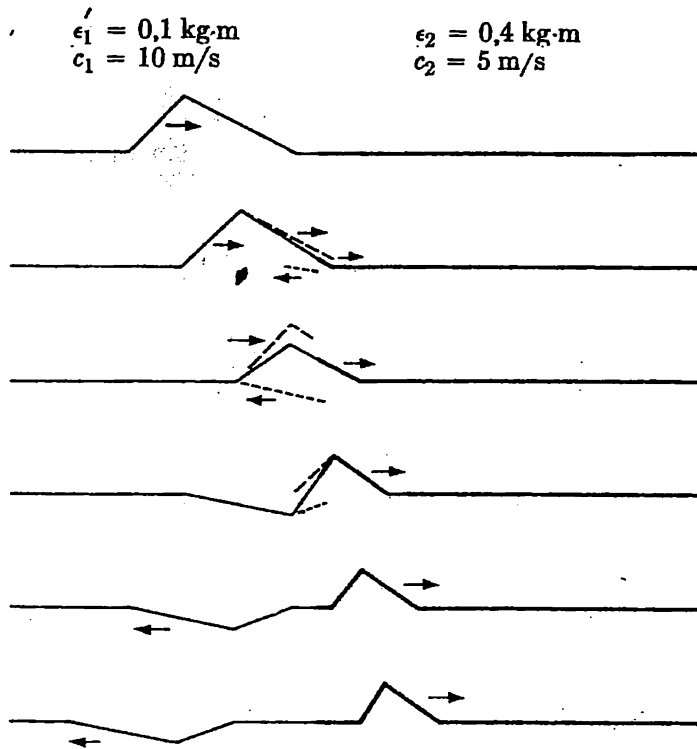


Fig. 23-5. Reflexión de una onda en una unión. Obsérvese que la pendiente de las cuerdas es continua en la unión.

El pulso ondulatorio reflejado se habrá, pues, invertido y reducido su amplitud a un tercio de la amplitud incidente. El pulso ondulatorio transmitido es del mismo signo que el incidente, pero su amplitud se ha reducido a los dos tercios de la amplitud incidente. Obsérvese que en la unión de las dos cuerdas no hay angulosidades. El cociente entre las energías de las ondas transmitida e incidente, es decir, el coeficiente de transmisión de la energía, es  $\epsilon_2 c_2 u_t^2 / \epsilon_1 c_1 u_i^2 = 8/9$ .

**EJEMPLO 2.** Hacemos referencia al ejemplo del final del apartado 21-4 en que se producía una onda compresiva en una barra de acero por efecto de un martillazo. Suponíamos que el martillo ejercía una fuerza constante sobre la barra durante su tiempo de contacto  $\Delta t = 10^{-4}$  s. Esta fuerza resultaba ser de  $5,85 \cdot 10^9$  dynas y hallábamos que la velocidad de propagación de la onda en la barra era  $c = \sqrt{Y/\rho} = 5 \cdot 10^5$  cm/s y la velocidad de las partículas en la onda compresiva era  $u = v/2$ , o sea la mitad de la velocidad inicial del martillo.

Supongamos ahora que la varilla tenga una longitud *finita*. Como la onda recorría una distancia  $c\Delta t = 50$  cm durante el tiempo de choque, es evidente que en una barra de más de 25 cm la onda reflejada por el extremo lejano de la varilla no puede haber vuelto para influir en el choque entre martillo y barra. Supongamos, por tanto, que fuera 100 cm la longitud de la barra. Al cabo del tiempo que tarda la onda reflejada en volver al extremo en que se dio el martillazo, el martillo ya no estará en contacto con la barra y la onda volvería a reflejarse y a recorrer la longitud de la barra

$5 \cdot 10^5/100 = 5000$  veces por segundo. Estos viajes de la onda en uno y otro sentido no durarán, desde luego, indefinidamente. En cada recorrido, parte de la energía cinética ordenada de la onda se convierte en energía cinética térmica desordenada de los átomos de hierro y cuando por fin cesa el movimiento ondulatorio, la barra es una vez más un cuerpo indeformado, animado de una velocidad  $V$  tal que se conserve la cantidad de movimiento. En el caso de una barra de 100 cm, la masa  $M$  sería de 7800 g y la velocidad  $V$  sería  $mv/M = 60$  cm/s. La energía cinética de la barra es ahora  $MV^2/2 = 1,4 \cdot 10^6$  erg, mientras que la energía cinética inicial del martillo y de la onda era  $mv^2/2 = 87,8 \cdot 10^6$  erg. La diferencia  $mv^2/2 - MV^2/2 = 86,4 \cdot 10^6$  erg se habrá empleado en calentar la barra.

Un observador casual, no verá toda esta actividad en el interior de la barra que, en todo caso, habrá concluido al cabo de un tiempo muy corto. El choque es inelástico y se pierde parte de la energía cinética del movimiento global. Cuanto más larga sea la barra (de más de 25 cm), tanto más inelástico será el choque, ya que la velocidad  $V$  debe variar como  $1/M$  con el fin de mantener fija la cantidad de movimiento, y la energía cinética varía como  $MV^2/2$ . Si la barra tuviera exactamente 25 cm de longitud, tendría una masa de 1950 g, igual que la del martillo. Entonces, basándonos en la hipótesis de que el martillo queda en reposo después del choque, la energía cinética final de la barra será igual a la energía cinética inicial del martillo. Este resultado también se puede comprender considerando las ondas en la barra, de la manera siguiente.

Al recorrer la barra la onda compresiva, la velocidad de las partículas que adquieren los átomos de hierro de la barra es  $u_i = v/2$ . En el extremo de la barra se reflejará esta onda y la velocidad de las partículas en la onda reflejada es  $u_r = u_i = v/2$ , porque el coeficiente de reflexión en el extremo de la barra es igual a la unidad. La velocidad de las partículas total es, pues,  $u = u_i + u_r = v/2 + v/2 = v$ . Como la barra tiene una longitud de 25 cm, la onda reflejada alcanza el extremo de la barra que fue golpeado, en el preciso momento en que el martillo pierde contacto con ella y en el preciso momento en que se termina la onda incidente inicial. La onda reflejada vuelve a reflejarse de manera que sigue directamente a la onda original y toda la barra tendrá una velocidad de las partículas  $v$ . Como esto es cierto, no hay energía cinética de vibración y el centro de masa también se moverá con velocidad  $v$ . Por tanto, tenemos un choque elástico entre martillo y barra.

El fenómeno que acabamos de describir es indicativo de la naturaleza ondulatoria de todo choque perfectamente elástico entre cuerpos extensos. Cuando los choques son inelásticos, parte de la energía del cuerpo incidente se transforma en energía cinética de vibración y la energía asociada a las ondas acaba disipándose en forma de calor, sonido u otra forma de energía no asociada al movimiento mecánico global.

**23-2 Ondas estacionarias.** Después de haber estudiado la mecánica de la reflexión de las ondas estamos preparados para determinar las ondas que resultan al superponerse las ondas incidente y reflejada. Las ondas así obtenidas tienen un interés especial cuando las ondas que se componen son armónicas y de igual amplitud. Este es el caso que se presenta, por ejemplo, cuando se refleja

una onda armónica en el extremo fijo de un resorte, cuando la onda sonora que se propaga por un tubo es reflejada por una pared rígida, o cuando se refleja la onda en el extremo libre de una barra maciza. En los dos primeros casos, el coeficiente de reflexión es  $-1$ , y en el último  $+1$ .

En todos estos ejemplos, la onda resultante es la suma de dos ondas armónicas de igual amplitud y frecuencia, que se propagan en sentidos opuestos. La adición de estas dos ondas puede efectuarse gráficamente y de esta manera es fácil comprobar que la onda resultante presenta la interesante característica de que en ciertos puntos es siempre nula la amplitud de oscilación. Estos puntos reciben el nombre de *nodos* y la distancia que separa dos nodos consecutivos es igual a media longitud de onda. En la región comprendida entre los nodos, la amplitud de la onda varía desde cero (en los nodos) hasta el valor máximo en el punto medio del segmento determinado por los nodos. A una onda de este tipo se le llama *onda estacionaria*, ya que al movimiento ondulatorio no está asociado ningún sentido de propagación. En la figura 23-6 puede verse el desplazamiento transversal de una onda estacionaria en un resorte. En este caso particular, el período de oscilación es de 8 s y se ha representado el desplazamiento del resorte en diferentes instantes de un semiperíodo. Obsérvese que en la región entre dos nodos, las oscilaciones en todos los puntos están en concordancia de fase. En una onda progresiva, también representada en la figura 23-6 a fines de comparación, la amplitud de oscilación es la misma en todos los puntos y la fase varía continuamente a lo largo del resorte.

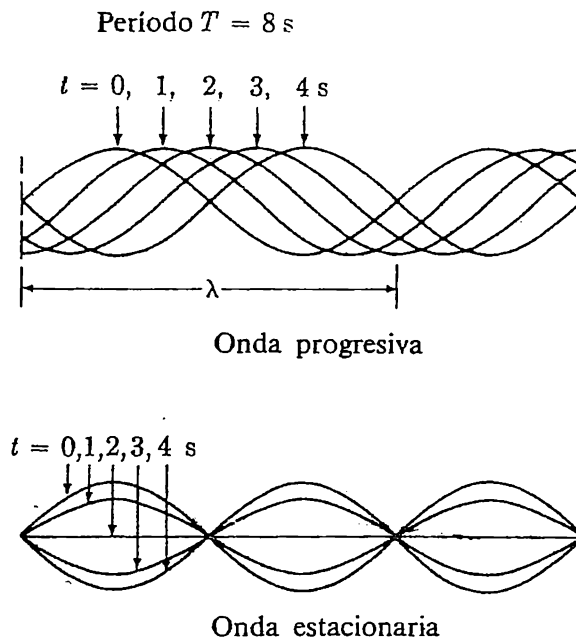


Fig. 23-6. Onda progresiva armónica y onda estacionaria transversal en un resorte. En ambos casos, la frecuencia y el período ( $T = 8 \text{ s}$ ) son iguales. El resorte adopta las formas indicadas en  $t = 0, 1, 2, 3$  y  $4 \text{ s}$ .

La descripción matemática de una onda estacionaria es, simplemente, la suma de una onda  $y_1 = y_0 \sin \omega(t - x/c)$  que se propaga en el sentido positivo de  $x$ , con otra onda  $y_2 = y_0 \sin \omega(t + x/c)$  que se propaga en el sentido negativo de  $x$ . Cuando estas ondas representan una onda incidente y una reflejada, respectivamente, contendrán fases iniciales  $\phi_1$  y  $\phi_2$  que dependen de dónde y cómo se generó y reflejó la onda y de la elección de origen para  $t$  y para  $x$ . Sin embargo, eligiendo adecuadamente los orígenes de  $t$  y de  $x$  se pueden eliminar dichas fases iniciales y si hacemos  $\phi_1 = \phi_2 = 0$  la onda estacionaria viene dada por

$$y = y_0 \sin \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) + y_0 \sin \omega \left( t + \frac{x}{c} \right) = \left( 2y_0 \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right) \sin \omega t$$

Esta expresión se obtiene desarrollando las dos funciones sinusoidales, aplicando  $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$ . En cambio, si para la onda incidente tomamos  $y_1 = y_0 \sin \omega(t - x/c + \pi) = -y_0 \sin \omega(t - x/c)$  que corresponde a  $\phi_1 = \pi$ , obtenemos

$$y = -y_0 \sin \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) + y_0 \sin \omega \left( t + \frac{x}{c} \right) = \left( 2y_0 \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \right) \cos \omega t \quad (23-9)$$

Esta forma resultará más conveniente para ser utilizada más adelante, al estudiar las oscilaciones características y el movimiento forzado de ondas estacionarias.

Vemos ahora que en cada punto  $x$  tenemos un movimiento armónico expresado por el factor  $\cos \omega t$  dependiente del tiempo. En cambio, la amplitud del movimiento varía de un punto a otro, según indica el factor dependiente de  $x$ ,  $2y_0 \sin(2\pi x/\lambda)$ . La amplitud mínima será, evidentemente, cero y la amplitud máxima es  $2y_0$ . Los nodos, o puntos de amplitud nula, están determinados por  $\sin(2\pi x/\lambda) = 0$ , y se deduce que la distancia  $d$  que separa dos nodos debe satisfacer a  $2\pi d/\lambda = \pi$ ; es decir,  $d = \lambda/2$ .

Las ondas estacionarias se originan corrientemente a consecuencia de reflexiones, según veremos con más detalle en el apartado próximo. Sin embargo, también pueden originarse mediante dos focos perturbadores independientes, uno de los cuales origine una onda que se propague hacia la derecha y el otro una onda que se propague hacia la izquierda. Estos dos focos independientes deben tener frecuencias exactamente iguales, ya que si no la onda estacionaria sufriría un arrastre hacia la derecha o hacia la izquierda a una velocidad que depende de la diferencia de las frecuencias. Desde luego, cuando se emplean reflexiones para originar una de las ondas progresivas, las frecuencias de las dos ondas son necesariamente iguales.

Cuando una onda que se propaga por un resorte se refleja en el extremo fijo de éste, o cuando una onda sonora que se propaga por un tubo se refleja

en una pared rígida situada en el tubo, es evidente que la velocidad de las partículas y su desplazamiento son cero en la terminación considerada. (El coeficiente de reflexión de la velocidad es  $-1$ .) La onda estacionaria resultante tendrá un nodo en el extremo fijo y los demás nodos están situados a las distancias  $\lambda/2, \lambda, 3\lambda/2$ , etc., del extremo. En cambio, si la onda se refleja en el extremo libre de un resorte o de una barra maciza (coeficiente de reflexión de la velocidad  $+1$ ), el desplazamiento y velocidad de las partículas serán máximos en el extremo y los nodos de la onda estacionaria estarán situados en este caso a las distancias  $\lambda/4, 3\lambda/4, 5\lambda/4$  del extremo. Cuando una onda reflejada en el extremo fijo de un resorte vuelve hacia el extremo accionado, suele volver a reflejarse y podríamos considerar que el movimiento permanente de un resorte continuamente accionado debe considerarse como suma de un número infinito de ondas que se propagan por el resorte en uno y otro sentido. Sin embargo, no es difícil demostrar (prob. 23-10) que se puede sustituir un número arbitrario de ondas armónicas de igual frecuencia y que se propaguen en el mismo sentido, por una onda armónica progresiva única. Por tanto, el movimiento armónico permanente de un resorte podrá siempre considerarse como superposición de dos ondas armónicas que se propagan en sentidos opuestos.

Con relación a la energía, la diferencia entre una onda progresiva y una estacionaria es que en la primera existe un flujo energético no nulo, mientras que en la segunda, no. En la onda estacionaria la energía está «aprisionada» y la densidad de energía varía de un punto a otro de igual forma que lo hace  $\sin^2(2\pi x/\lambda)$ . En la onda progresiva, la densidad de energía es independiente de  $x$ . Si es  $u_m$  la amplitud máxima de la velocidad de las partículas en la onda estacionaria y es  $\epsilon_1$  la masa por unidad de longitud, la densidad de energía en la onda estacionaria, promediada para  $t$  y  $x$  es

$$h = \frac{\epsilon u_m^2}{4} \quad (23-10)$$

según puede demostrarse fácilmente (prob. 23-11).

**EJEMPLO.** La distancia entre dos nodos consecutivos de una onda estacionaria en un resorte es de 20 cm y la amplitud máxima de desplazamiento es  $y_m = 2$  cm. La frecuencia de oscilación es de 100 Hz y la masa por unidad de longitud del resorte es  $\epsilon = 0,2$  kg/m. (a) ¿Cuál es la tensión del resorte? (b) ¿Cuál es la energía contenida en el resorte entre dos nodos?

(a) La distancia entre dos nodos es  $\lambda/2$  y, en consecuencia, la longitud de onda de las ondas que forman la onda estacionaria es  $\lambda = 40$  cm = 0,4 m. De la relación  $c = \lambda f$  obtenemos, con  $f = 100$  Hz,  $c = 0,4 \cdot 100 = 40$  m/s. De la relación  $c = \sqrt{S/\epsilon}$  hallamos  $S = \epsilon c^2 = 0,2 \cdot 1600 = 320$  N.

(b) La amplitud máxima de la velocidad de las partículas del resorte (en el punto medio entre dos nodos) es  $u_m = 2\pi f y_m = 2\pi \cdot 100 \cdot 0,02 = 4\pi$  m/s, y la velocidad

de las partículas en los demás puntos entre los nodos está dada por  $u_m \cos(2\pi x/\lambda) \sin \omega t$ . Como un elemento de masa  $\epsilon dx$  del resorte efectúa un movimiento armónico, la energía total de oscilación de este elemento de masa es igual a la energía cinética máxima  $\epsilon[u_m \cos(2\pi x/\lambda)]^2/2$  y la energía total contenida entre dos nodos resulta ser

$$H = \int_0^{\lambda/2} \frac{\epsilon}{2} u_m^2 \cos^2 \left( \frac{2\pi x}{\lambda} \right) dx = \frac{\lambda}{8} \epsilon u_m^2 = 0,04\pi \text{ J}$$

**23-3 Frecuencias propias y períodos propios.** Ya tratamos de frecuencias propias en nuestro estudio del oscilador armónico y, por tanto, no son nuevas para nosotros. Podemos recordar que una masa  $m$  que se mueve bajo la acción de una fuerza de resorte  $F = -Kx$  tiene una frecuencia propia  $f = 2\pi\sqrt{K/m}$ . Un oscilador que parta de un estado inicial vuelve a él  $f$  veces por segundo, o sea cada  $T = 1/f$  segundos. El oscilador armónico tiene *una* sola frecuencia propia. Nuestra experiencia cotidiana nos indica que también otros cuerpos, tales como las cuerdas y columnas de aire de los instrumentos musicales, tienen frecuencias propias. Sin embargo, en contraste con el oscilador masa-resorte, una cuerda finita tiene *muchas* frecuencias propias. En realidad, todos los cuerpos deformables que tienen una distribución continua de masa y un tamaño finito (cuerdas, alambres, columnas de aire, etc.) tienen un número infinitamente grande de frecuencias propias. En este apartado estudiaremos la naturaleza de estas frecuencias características y sus relaciones con la naturaleza geométrica y física de los medios.

Consideremos una cuerda tensa cuyos extremos estén sujetos a soportes rígidos. Según puede verse en la figura 23-7, la cuerda se deforma en un punto arbitrario, por ejemplo, el  $C$ , y luego se suelta en el instante  $t = 0$ . La deformación original  $P$  la dividimos en dos partes  $P'$  y  $P''$ , cada una de las cuales con una amplitud de desplazamiento mitad de la de la deformación original. Las partes  $P'$  y  $P''$  se propagan con velocidad  $c$  hacia la derecha y hacia la izquierda, respectivamente. En un tiempo  $t_1 = x/c$ ,  $P''$  alcanza el extremo izquierdo de la cuerda y se refleja, después de lo cual su desplazamiento está dirigido hacia abajo en vez de hacia arriba. Al cabo de un tiempo  $t_2 = L/c$ ,  $P''$  alcanza el extremo derecho de la cuerda, se refleja, y vuelve a tener un desplazamiento ~~dirigido hacia arriba~~. Al cabo de un tiempo  $t_3 = (L - x)/c$ ,  $P''$  vuelve a encontrarse en el punto  $C$ , habiendo transcurrido desde el principio un tiempo  $T_1 = t_1 + t_2 + t_3 = 2L/c$ . El otro pulso  $P'$ , sufre una sucesión de reflexiones enteramente análoga y en el instante  $t = T_1 = 2L/c$ , ambos pulsos alcanzan el punto  $C$  y se combinan para dar la deformación inicial  $P$ . El tiempo  $T_1$ , llamado *período propio* de la cuerda, y su recíproco, la *frecuencia propia* de la cuerda son, pues,

$$T_1 = \frac{2L}{c}, \quad f_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{c}{2L} \quad (23-11)$$

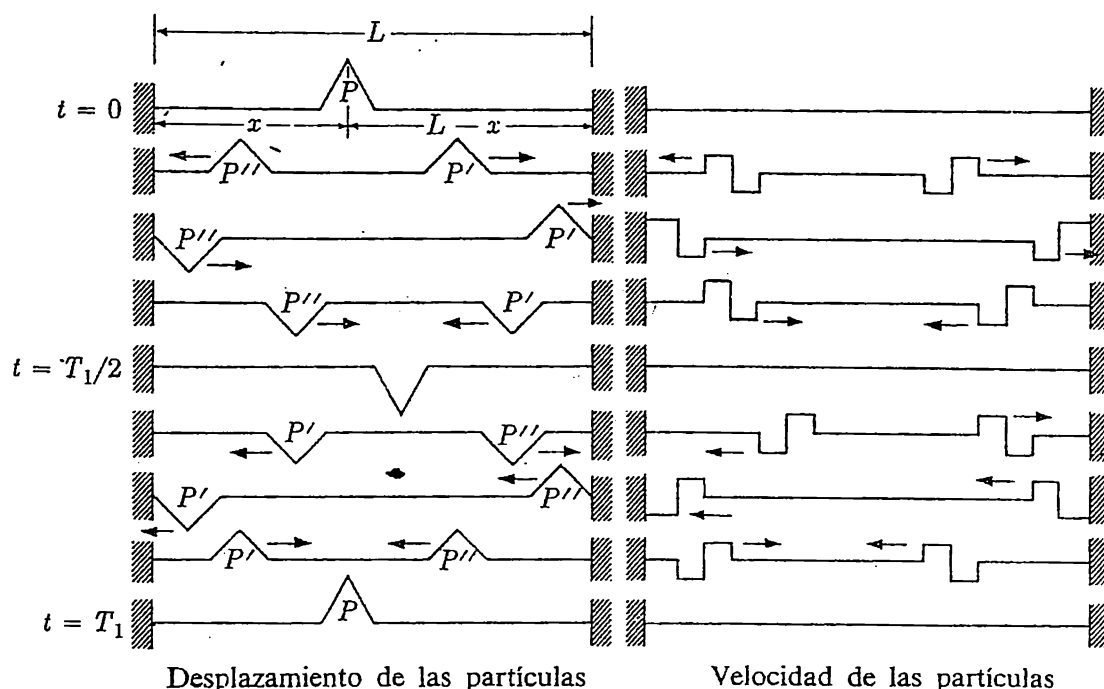


Fig. 23-7. Se deforma una cuerda de longitud  $L$  dándole la forma  $P$  y se suelta en el instante  $t = 0$ . Se originan dos pulsos  $P'$  y  $P''$ , uno que se propaga hacia la derecha y otro hacia la izquierda. La cuerda vuelve a adquirir su forma inicial al cabo de un tiempo  $T_1 = 2L/c$ . En el instante  $t = 0$  no hay energía cinética en los pulsos ondulatorios, ya que todos los elementos de masa de la cuerda tienen velocidad nula.

La deformación inicial de una cuerda con sus extremos fijos reaparecerá al cabo del período propio  $T_1$ , o sea que se repetirá con una frecuencia  $f_1$ . Para el período y frecuencia propios de la cuerda aparecerán siempre expresiones de la forma de (23-11), porque la propia cuerda está caracterizada por su longitud  $L$  y por la velocidad de propagación  $c$ . El cociente  $L/c$  tiene las dimensiones de un tiempo. Obsérvese que solamente pueden tener períodos y frecuencias propios, los cuerpos de dimensiones *finitas*.

Como el pulso considerado en la figura 23-7 es arbitrario, del principio de superposición se deduce que en un tiempo igual al período propio  $T_1$  reaparecerá en la cuerda un número cualquiera de pulsos, o cualquier desplazamiento continuo.

Algunos tipos especiales de deformación reaparecerán con frecuencia superior a una vez cada tiempo  $T_1$ . Consideremos de nuevo la figura 23-7. Al cabo de un tiempo  $T_1/2$  ha aparecido una deformación como la inicial, pero que está dirigida hacia abajo y no hacia arriba y se halla a una distancia  $x$  del extremo derecho de la cuerda en vez de a una distancia  $x$  del extremo izquierdo. Si la deformación inicial de la cuerda constara de dos partes, una a distancia  $x$  de la izquierda y otra a distancia  $x$  de la derecha, y si una de las deformaciones

estuviera dirigida hacia arriba y la otra hacia abajo, reaparecería la forma inicial de la cuerda al cabo de un tiempo  $T_1/2$ . En efecto, las dos deformaciones iniciales, habrían intercambiado sus puestos. Otro ejemplo de deformación que se repite con el período  $T_2 = T_1/2 = L/c$  y otro que se repite con el período  $T_3 = T_1/3 = 2L/3c$  son los indicados en la figura 23-8. Las frecuencias propias correspondientes son  $f_2 = 2f_1$  y  $f_3 = 3f_1$ . Obsérvese que la deformación que tiene la frecuencia propia  $f_2 = 2f_1$  está compuesta de *dos* partes que son antisimétricas respecto al centro de la cuerda. Análogamente, la deformación de frecuencia  $f_3 = 3f_1$  divide la cuerda en *tres* partes antisimétricas. Análogamente, una deformación que divida la cuerda en  $n$  partes antisimétricas tiene como frecuencia propia

$$f_n = nf_1 = \frac{nc}{2L} \quad (23-12)$$

que puede interpretarse como frecuencia fundamental o primera frecuencia de una cuerda de longitud  $L/n$ . En la figura 23-9 puede verse un ejemplo de deformación que se repite  $15f_1 = 15c/2L$  veces por segundo.

En resumen, una cuerda de longitud finita (y el mismo razonamiento general vale para otros medios tales como columnas gaseosas, resortes, etc.) posee un número infinito de frecuencias propias. Éstas no sólo dependen de la velocidad de propagación, sino también de la longitud del medio. En los casos de cuerdas con ambos extremos libres, o con un extremo fijo y otro libre, existen sistemas análogos de frecuencias propias.

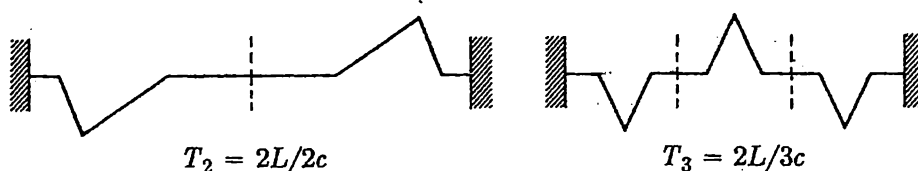


Fig. 23-8. (a) Deformación en una cuerda que reaparece  $f_2 = c/L = 2f_1$  veces por segundo, y (b) otra que reaparece  $f_3 = 3c/2L = 3f_1$  veces por segundo. Obsérvese la simetría respecto a las líneas de trazos.

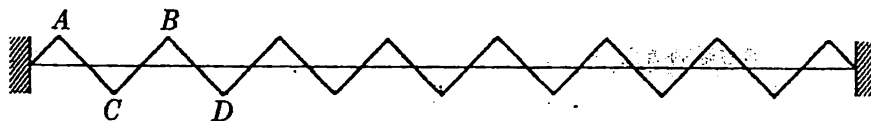


Fig. 23-9. Deformación que reaparece  $15c/2L$  veces por segundo. En un tiempo  $2L/15c$ , la mitad de  $B$  se mueve hacia la izquierda para formar la mitad de una nueva  $A$ , mientras que la mitad de  $C$  se mueve hacia la izquierda, se refleja y luego se mueve hacia la derecha para formar la otra mitad de la nueva  $A$ . Entre tanto,  $A$  se ha dividido en dos mitades, una de las cuales forma parte de la nueva  $B$  y la otra forma parte de la nueva  $C$ .



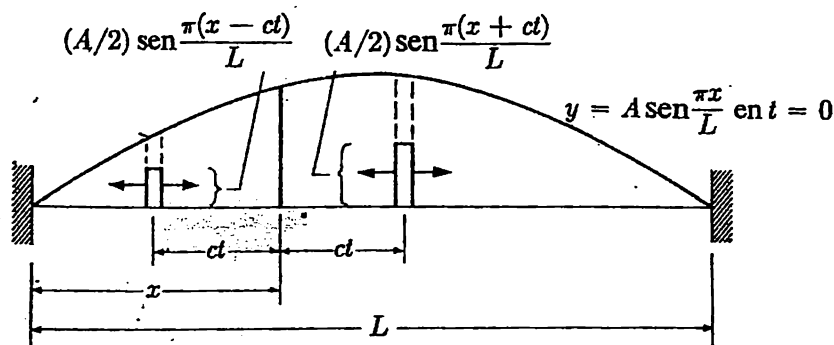


Fig. 23-10. El desplazamiento  $x$  en el instante  $t$  está constituido por la suma de las mitades de los desplazamientos elementales situados en  $x - ct$  y  $x + ct$  en  $t=0$ .

*Modos normales de movimiento.* Tiene especial importancia el caso de una deformación inicial de forma sinusoidal en una cuerda, porque entonces el movimiento resultante es función armónica del tiempo. Ya nos encontramos con este fenómeno al estudiar las ondas estacionarias. Consideremos ahora una cuerda con un desplazamiento inicial  $y(0, t) = A \sin \pi x/L$ , según se indica en la figura 23-10. Queremos determinar el desplazamiento  $y(t, x)$  en una posición  $x$  arbitraria en un instante  $t$  posterior. Según se vio en el apartado anterior, cada desplazamiento elemental se dividirá en dos mitades, una que se propaga hacia la derecha y la otra hacia la izquierda. El desplazamiento de la cuerda en  $x$  en el instante  $t$  constará, pues, de dos partes, que darán la suma de las mitades de los desplazamientos elementales existentes en  $x - ct$  y  $x + ct$  en  $t = 0$ . El desplazamiento total  $x$  en el instante  $t$  será, pues,

$$\begin{aligned} y_1(x, t) &= \frac{A}{2} \sin \frac{\pi}{L} (x - ct) + \frac{A}{2} \sin \frac{\pi}{L} (x + ct) \\ &= A \sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi ct}{L} \end{aligned} \quad (23-13)$$

o sea

$$y_1 = A \sin \frac{\pi x}{L} \cos 2\pi f_1 t = A \sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{2\pi t}{T_1},$$

donde

$$f_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{c}{2L}.$$

De manera totalmente análoga encontramos que si el desplazamiento inicial de la cuerda es  $y(x, 0) = A \sin (n\pi x/L)$ , el desplazamiento subsiguiente viene dado por

$$y_n(x, t) = A \sin \frac{n\pi x}{L} \cos 2\pi f_n t \quad (23-14)$$

donde

$$f_n = nf_1 = \frac{nc}{2L}$$

Comparando con la ecuación (23-9) se ve que los movimientos  $y_1$  e  $y_n$  pueden considerarse como ondas estacionarias resultantes de la superposición de ondas progresivas de longitudes de onda  $\lambda_1$  y  $\lambda_n$  dadas por  $\lambda_1/2 = L$ ,  $n\lambda_n/2 = L$  respectivamente. La longitud de onda de la primera oscilación  $y_1$  es, pues, tal que la longitud de la cuerda sea igual a la distancia entre dos nodos de la onda estacionaria y la oscilación  $n$ -sima divide a la cuerda en  $n$  partes, cada una de ellas igual a la distancia  $\lambda_n/2$  entre dos nodos. Los extremos de la cuerda deberán coincidir con dos nodos, ya que aquéllos se mantienen fijos. Así pues, si introducimos en la ecuación (23-13) la longitud de onda  $\lambda_n = 2L/n$  y el período  $T_n = 1/f_n = 2L/cn$  obtenemos

$$y_n(x, t) = A \sin \frac{n\pi x}{L} \cos 2\pi f_n t = A \sin \frac{2\pi x}{\lambda_n} \cos \frac{2\pi t}{T_n} \quad (23-15)$$

Queda implícito que  $x$  se mide a partir de un extremo de la cuerda, de manera que en  $x = 0$  y  $x = L$  el desplazamiento es nulo. Las oscilaciones de este tipo, que son armónicas en  $t$  y en  $x$ , reciben el nombre de *oscilaciones características* y también *modos normales* de la cuerda.

EJEMPLO. Una cuerda de masa 0,2 kg/m y longitud  $L = 0,6$  m está sujeta por ambos extremos y sometida a una tensión  $S = 80$  N. Inicialmente, la cuerda está de-

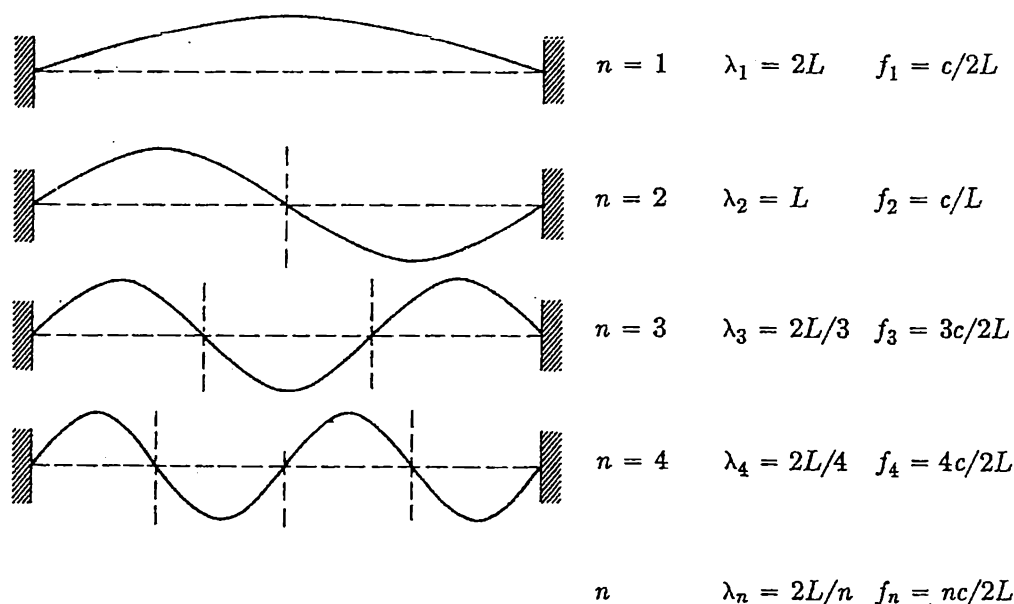


Fig. 23-11. Modos normales de una cuerda fija por ambos extremos. Obsérvese que el modo  $n$ -simo divide a la cuerda en  $n$  partes antisimétricas.

formada adoptando la forma de su tercer modo normal y tiene una amplitud  $A = 0,5$  cm. (a) ¿Cuál es la frecuencia de la oscilación? (b) ¿Cuál es la amplitud máxima de la velocidad transversal? (c) ¿Cuál es la energía total de la oscilación?

La velocidad de propagación es  $c = \sqrt{S/\epsilon} = \sqrt{80/0,2} = 20$  m/s. En el tercer modo normal, la cuerda tiene una longitud igual a  $3/2$  de longitud de onda, y por tanto  $3\lambda/2 = L = 0,6$  m y  $\lambda_3 = 0,4$  m. La frecuencia es, pues,  $f_3 = c/\lambda_3 = 20/0,4 = 50$  Hz y  $T_3 = 0,02$  s.

El desplazamiento de la cuerda es

$$y(x, t) = A \sin \frac{3\pi x}{L} \cos \omega_3 t$$

y la velocidad transversal de las partículas es

$$u(x, t) = - \left( \omega_3 A \sin \frac{3\pi x}{L} \right) \sin \omega_3 t$$

La amplitud máxima de la velocidad es, pues,

$$u_m = \omega_3 A = 2\pi \cdot 50 \cdot 0,5 = 50\pi \text{ cm/s}$$

Solamente tendrán esta amplitud máxima de velocidad los elementos de cuerda situados en  $x = \lambda/4$ ,  $3\lambda/4$  y  $5\lambda/4$  ( $x = 0,1$  m,  $0,3$  m y  $0,5$  m)

Cada elemento de masa de la cuerda se mueve como un oscilador armónico simple y por tanto la energía total de la oscilación debe ser igual a la energía cinética máxima. (Cuando la energía cinética es máxima, el desplazamiento  $y$  es nulo.) En  $x$ , una longitud  $dx$  de cuerda tendrá, pues una energía de oscilación

$$dH = \frac{1}{2} \epsilon dx u_m^2 \sin^2 \frac{2\pi x}{\lambda}$$

Integrando entre  $x = 0$  y  $x = L = 3\lambda/2$ , obtenemos

$$E = \frac{\epsilon u_m^2}{2} \int_0^L \sin^2 \frac{3\pi x}{L} dx = \frac{L \epsilon u_m^2}{4} \simeq 0,075 \text{ joule}$$

Obsérvese que  $L \epsilon u_m^2/4$  es la mitad de la energía cinética que tendría una cuerda de longitud  $L$  si oscilara armónicamente toda su longitud con una amplitud  $A$  y una pulsación  $\omega$ .

Si se mantiene fijo un extremo de una cuerda y el otro se deja libre, lo que corresponde aproximadamente al caso de que estuviera unida a una cuerda de mucho menor masa por unidad de longitud, se obtiene un nuevo sistema de oscilaciones características. En el extremo fijo, el desplazamiento ha de ser,

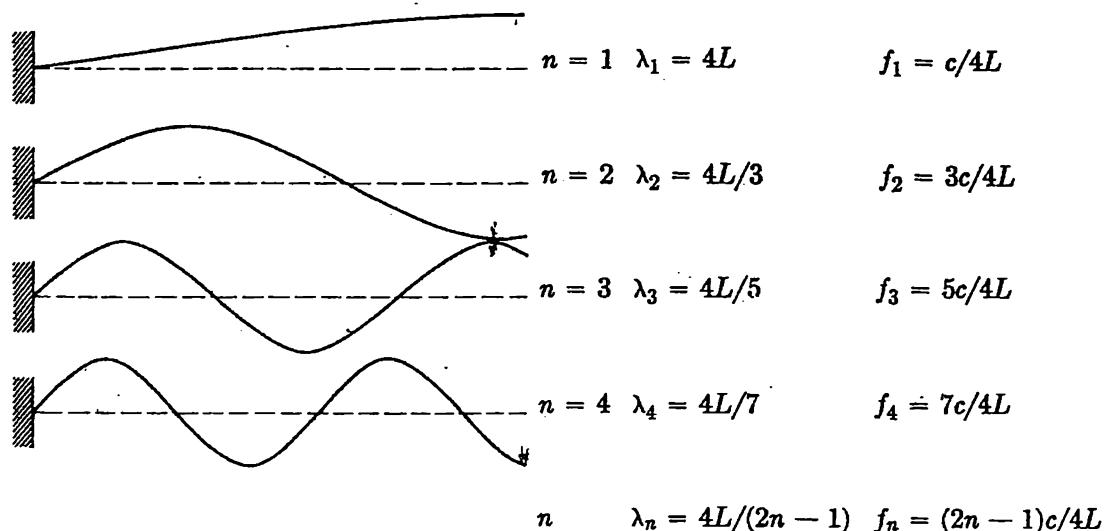


Fig. 23-12. Oscilaciones características de una cuerda que tiene un extremo fijo y uno libre.

desde luego, nulo y en el extremo libre, la fuerza transversal y por tanto la pendiente de la cuerda han de ser nulas. Así pues, el extremo libre tiene máximos el desplazamiento y la velocidad de las partículas. En la figura 23-12 se han representado las cuatro primeras oscilaciones características correspondientes a este caso.

**EJEMPLO.** Un resorte con un extremo fijo y otro libre se halla sobre una mesa horizontal sin rozamiento. El resorte oscila con movimiento longitudinal según su oscilación característica armónica fundamental. La longitud del resorte indeformado es  $L$ , la masa es  $M$  y la constante del resorte es  $K$ . Determinar la frecuencia de oscilación.

La velocidad de propagación de una onda longitudinal es  $c = \sqrt{1/\kappa\epsilon}$  donde  $\kappa = 1/KL$  y  $\epsilon = M/L$ . Obtenemos  $c = L\sqrt{K/M}$  y la frecuencia fundamental es

$$f_1 = \frac{c}{4L} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{K}{M}}$$

En otras palabras, la frecuencia de oscilación es igual a la de un oscilador ideal masa-resorte consistente en una masa  $M_1 = 4M/\pi^2$  situada al extremo de un resorte sin masa de constante  $K$ .

*Oscilaciones características en dos y tres dimensiones.* Cada frecuencia característica del movimiento unidimensional de un resorte, columna gaseosa, barra sólida, o cualquier otro sistema elástico análogo, corresponde a un cierto modo característico de oscilación. Dicho modo se describe mediante una *función de onda*. En el caso de un resorte sujeto por ambos extremos, la función de onda para el modo  $n$ -simo es  $y_n = A \sin(n\pi x/L) \cos(2\pi t/T_n)$ , donde  $n$  pue-

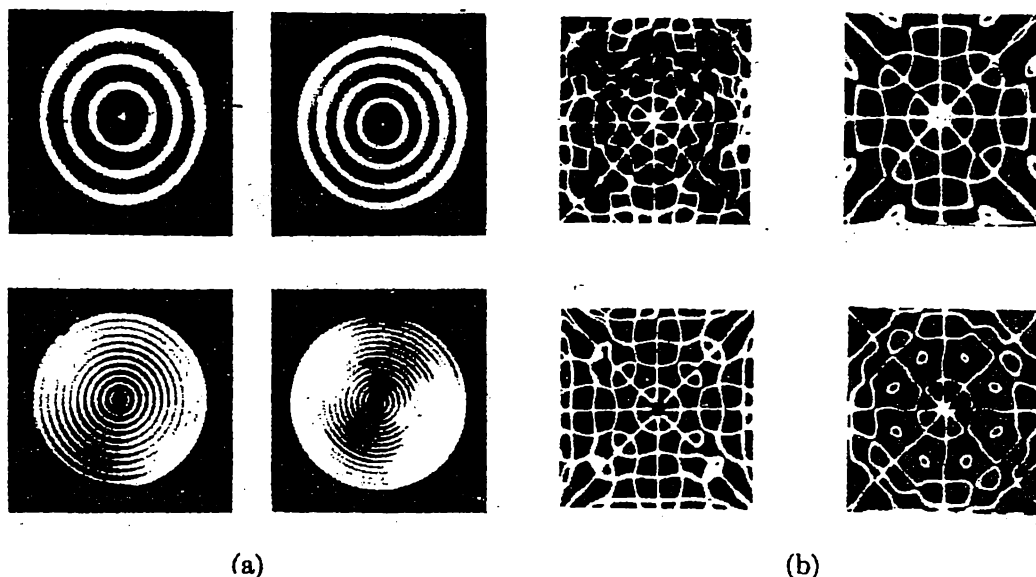


Fig. 23-13. Oscilaciones características de una membrana circular y de una membrana cuadrada de agua jabonosa. Cortesía de LUDWIG BERGMANN.

de considerarse que es el número de secciones en que los nodos de la onda estacionaria dividen al resorte.

También aparecen frecuencias y oscilaciones características análogas al considerar las condiciones más generales de movimiento ondulatorio en un plano o en el espacio. Es particularmente sencillo poner de manifiesto dichas oscilaciones características en una membrana delgada tal como una película de agua jabonosa. En la figura 23-13 pueden verse algunas de dichas oscilaciones obtenidas por medio de una película de agua jabonosa excitada por una onda sonora de frecuencia adecuada. Las partes (a) y (b) de la figura ilustran series de oscilaciones características de una membrana circular y de una cuadrada, respectivamente. Las líneas blancas de las fotografías indican máximos de desplazamiento, no nodos.

Las funciones de onda características que describen las oscilaciones de la membrana cuadrada son muy parecidas a las que describen una cuerda. En efecto, el desplazamiento de una membrana cuadrada está dado por

$$y_{mn}(x, z, t) = A \sin \frac{m\pi x}{L_x} \sin \frac{n\pi z}{L_z} \cos 2\pi f_{mn}t \quad (23-16)$$

donde  $m$  y  $n$  pueden tomar valores enteros cualesquiera. Se deduce que existe una «doble infinitud» de oscilaciones posibles cuyas frecuencias propias pueden expresarse como

$$f_{mn} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_z}\right)^2} \quad (23-17)$$

donde  $m, n = 1, 2, 3, \dots$  y  $L_x, L_z$  son las longitudes de los lados de la membrana.

Entre las oscilaciones características de los casos unidimensional y bidimensional (o tridimensional) existe una diferencia importante. En una dimensión, existe una correspondencia biunívoca entre las frecuencias propias y las oscilaciones características. En cambio, en los casos bi- y tridimensional pueden existir varias oscilaciones características que tengan *la misma* frecuencia. Por ejemplo, si  $L_x/L_z$  es un entero igual a  $q$ , las oscilaciones descritas por el par de números ( $m = 0, n = q$ ) tienen la misma frecuencia que la oscilación descrita por el par de números ( $m = q, n = 0$ ). Las oscilaciones de este tipo se dice que son *degeneradas*.

Análogamente, un volumen cerrado tal como una sala rectangular ordinaria tiene una «triple infinitud» de oscilaciones características posibles, con frecuencias propias dadas por

$$f_{klm} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{k}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{l}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{m}{L_z}\right)^2} \quad (23-18)$$

donde  $k, l, m = 0, 1, 2, \dots$ . Existe una probabilidad aún mayor de que aparezcan oscilaciones características degeneradas y cuanto mayor sea la simetría de la sala, mayor es la degeneración. En el diseño de salas para la reproducción del sonido, es importante evitar estas degeneraciones. Con un grado de degeneración elevado, las oscilaciones se «agolpan» y se refuerzan en forma nociva las frecuencias o regiones de frecuencia correspondientes del espectro.

*Desarrollo de Fourier.* Cuando el desplazamiento inicial de una cuerda es una combinación de modos fundamentales (la fig. 23-14 constituye un ejemplo sencillo) cada uno de los modos oscilará independientemente de los otros. Esto constituye una nueva ilustración del principio de superposición. El despla-

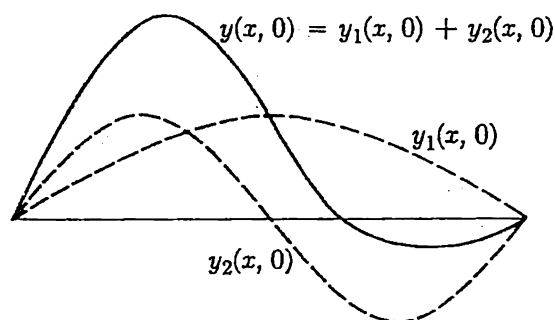


Fig. 23-14. Si el desplazamiento inicial de la cuerda es  $y(x, 0) = y_1(x, 0) + y_2(x, 0)$ , el desplazamiento de la cuerda variará con el tiempo en la forma  $y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$ .

miento inicial de la figura 23-14 es  $y(x, 0) = y_1(x, 0) + y_2(x, 0)$ , o sea

$$y(x, 0) = A \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} + A \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L} \quad (23-19)$$

Si el desplazamiento inicial estuviera especificado por  $y_1(x, 0)$  o por  $y_2(x, 0)$  tendríamos

$$y_1(x, t) = A \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \cos \frac{2\pi t}{T_1}$$

o

$$y_2(x, t) = A \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L} \cos \frac{2\pi t}{T_2}$$

respectivamente, donde  $T_1 = 2L/c$  y  $T_2 = L/c$ . Cuando el desplazamiento inicial es la suma  $(y_1 + y_2)$ , el desplazamiento en función del tiempo es

$$y(t, x) = A \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \cos \frac{2\pi t}{T_1} + A \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L} \cos \frac{2\pi t}{T_2} \quad (23-20)$$

según determina el principio de superposición.

El matemático francés J. B. FOURIER (1768-1830) demostró que, inversamente, todo desplazamiento inicial arbitrario puede descomponerse en funciones sinusoidales de amplitudes adecuadamente elegidas. Cada uno de estos desplazamientos producirá una oscilación característica. Si es  $f(x)$  la forma inicial de una cuerda, el llamado desarrollo de Fourier de esta función es\*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (23-21)$$

donde los valores de  $A_n$  están dados por

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx \quad (23-22)$$

El movimiento subsiguiente será una superposición de oscilaciones características

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{2\pi t}{T_n} \quad (23-23)$$

donde  $T_n = 2L/nc$ .

\* Véase, por ejemplo, THOMAS, *loc. cit.*, p. 821.

**23-4 Movimiento forzado y resonancia.** Las oscilaciones características de resortes finitos o de columnas gaseosas finitas son análogas al movimiento libre del oscilador masa-resorte. De igual manera que estudiamos los movimientos forzado y libre del oscilador masa-resorte, estudiaremos brevemente ahora el movimiento forzado de una cuerda.

En el movimiento forzado del oscilador masa-resorte, la amplitud de oscilación en resonancia sólo está limitada por el amortiguamiento del sistema. La respuesta de una cuerda finita o de una columna gaseosa a una fuerza accionante es enteramente análoga. La diferencia fundamental estriba en que estos últimos sistemas tienen un número infinito de frecuencias propias, en vez de una sola. A cada una de estas frecuencias propias, el sistema puede alcanzar una gran amplitud con una fuerza accionante muy pequeña (en realidad, nula).

Como en la mayoría de nuestros estudios anteriores, limitaremos nuestras consideraciones cuantitativas al caso de ondas transversales en una cuerda o en un resorte. Consideremos, como en la figura 23-15, una cuerda de longitud  $L$ , con su extremo izquierdo fijo y su extremo derecho en  $x = L$  accionado según la ley  $y_m \cos \omega t$ , donde  $\omega = 2\pi f$  es la pulsación, que puede variarse. A consecuencia de este desplazamiento periódico de un extremo de la cuerda, en ella se originará una onda estacionaria de la forma (comparar con la ec. 23-9)

$$y(x, t) = A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t \quad (23-24)$$

En el punto  $x = L$  debemos tener

$$y(L, t) = y_m \cos \omega t = A \sin \frac{2\pi L}{\lambda} \cos \omega t \quad (23-25)$$

y esto determina  $A$  en función de  $y_m$ :

$$A = \frac{y_m}{\sin (2\pi L/\lambda)} \quad (23-26)$$

Aquí  $\lambda = c/f = 2\pi c/\omega$  y  $f$  es la frecuencia aplicada. Tenemos pues,

$$y(x, t) = y_m \frac{\sin (2\pi x/\lambda)}{\sin (2\pi L/\lambda)} \cos \omega t = y_m \frac{\sin (2\pi x/\lambda)}{\sin (\pi f/f_1)} \cos 2\pi f t \quad (23-27)$$

donde  $f_1 = c/2L$  es la primera frecuencia propia de una cuerda fija por sus dos extremos. Cuando sea muy pequeña la frecuencia aplicada, por ejemplo una vez por día, la longitud de onda es muy grande. Entonces (23-27) se reduce a

$$y(x, t) \simeq y_m(x/L) \cos \omega t \quad (f \ll f_1)$$



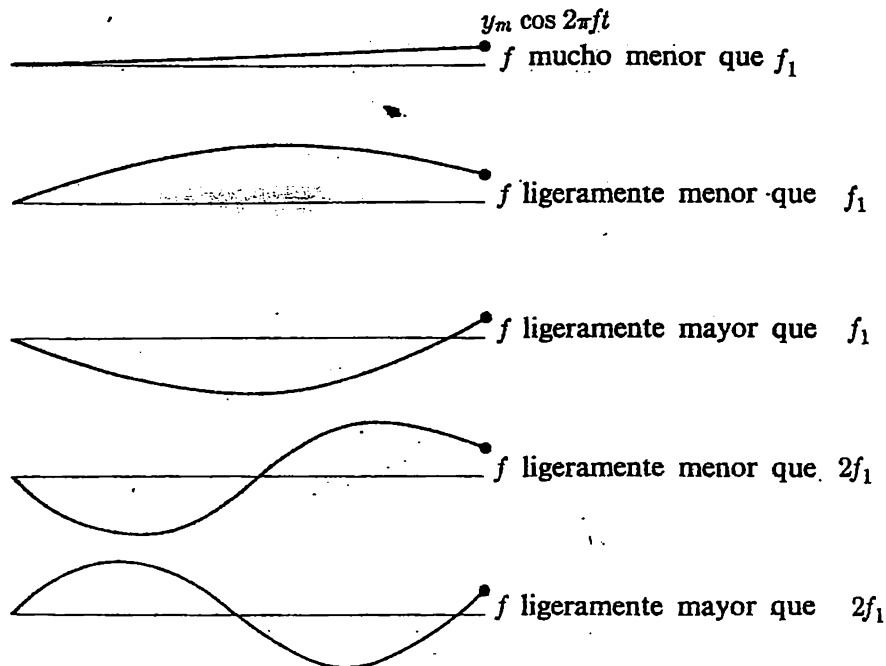


Fig. 23-15. La cuerda está accionada por su extremo derecho en la forma  $y = y_m \cos 2\pi ft$ . La cuerda está en resonancia a las frecuencias  $f = nf_1 = n 2L/c$ .

La cuerda está recta y tensa desde el extremo fijo en  $x = 0$ ,  $y = 0$  hasta el punto accionado en  $x = L$ ,  $y = y_m \cos \omega t$ . Al ir aumentando la frecuencia, la amplitud de las ondas estacionarias tiende a infinito cuando  $f$  tiende a  $f_1$  y la cuerda se halla en resonancia con la frecuencia aplicada. Análogamente, cada vez que  $f$  coincida con una frecuencia propia, es decir que  $f = f_n = nf_1$  se anula el valor de  $\sin(\pi f/f_1)$  del denominador de (23-27) y la amplitud se hace infinita.

Debe recalcar que estas consideraciones sólo se refieren al movimiento estacionario de la cuerda. Si se somete bruscamente una cuerda, inicialmente en reposo, a un desplazamiento oscilante en uno de sus extremos, se origina una onda progresiva. Ésta se reflejará en el extremo fijo y durante un tiempo se tendrá un movimiento muy complicado seguido, por último, del movimiento estacionario que hemos estudiado. Cuando se alcanza este movimiento permanente de onda estacionaria, no se propaga energía a lo largo de la cuerda y, por término medio, no se suministra energía desde el extremo accionado. En cambio, durante el tiempo que tarda en establecerse el régimen permanente o estacionario, se suministra energía desde el extremo accionado.

Nuestro análisis indica que a una frecuencia propia cualquiera, la amplitud se haría infinita en el régimen estacionario del movimiento ondulatorio. Sin embargo, en la práctica aparecen varios factores que limitan la amplitud de la onda. Por ejemplo, siempre existen fuerzas disipativas. El aire absorbe energía al ser accionado por la cuerda y para vencer el rozamiento interno de ésta se

requiere energía. La pérdida energética en estos efectos disipativos aumenta siempre con la amplitud del movimiento ondulatorio y se llega a alcanzar un punto en que la energía que se pierde es igual a la cedida a la cuerda. Además, debemos recordar que todo nuestro análisis es válido tan sólo si la velocidad de las partículas es mucho menor que la velocidad de propagación o, lo que es equivalente, cuando la amplitud del desplazamiento es muy inferior a una longitud de onda.

En el análisis anterior hemos expresado el desplazamiento de la cuerda mediante el desplazamiento  $y = y_m \cos \omega t$  en el punto accionado  $x = L$  (véase fig. 23-15). Si se mantiene constante  $y_m$  mientras se varía la frecuencia aplicada, la fuerza accionante en este punto debe variar con la frecuencia. (Para mantener un valor constante de  $y_m$  a las frecuencias de resonancia, la fuerza accionante debería ser infinita, si suponemos que no hay amortiguamiento).

### PROBLEMAS

23-1. La velocidad de propagación de las ondas transversales en un resorte  $A$  de 2 m de longitud es de 10 m/s y en un resorte  $B$  es de 20 m/s. Se unen los resortes  $A$  y  $B$  y la tensión es de 50 N. Se genera en  $A$  un pulso ondulatorio de velocidad de las partículas constante e igual a 2 m/s. (a) ¿Cuáles son las masas por unidad de longitud de los resortes  $A$  y  $B$ ? (b) ¿Cuáles son las amplitudes de velocidad de los pulsos transmitido y reflejado? (c) Dibújese la forma de todo el resorte ( $A$  y  $B$ ) en  $t = 0,05$  s, 0,2 s, 0,225 s, 0,25 s y 0,3 s. (d) ¿Qué fracción de la energía incidente se transmite y qué fracción se refleja?

23-2. Un depósito está lleno de helio y aire. Supóngase que existe una separación bien definida entre los dos gases. Sobre esta separación incide una onda sonora procedente del aire. Determinar los coeficientes de reflexión y transmisión de la presión para incidencia normal. Si la amplitud de la presión del sonido de la onda incidente es  $p_0$ , ¿cuál será la amplitud de la presión del sonido en la separación?

23-3. ¿Qué fracción de la energía sonora se transmite al agua cuando sobre la superficie de un lago incide normalmente una onda sonora?

23-4. ¿Cómo varía con la temperatura la impedancia característica del aire a las ondas, si se conserva constante la presión estática? Supóngase que la temperatura en la columna de aire es de 20° C en la región entre  $x = 0$  y  $x = x_0$  y 100° C en la región  $x > x_0$ . Una onda sonora originada en  $x = 0$  alcanza la superficie límite en  $x = x_0$ . Si la amplitud de la presión incidente es 1 baría, ¿cuáles son las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida?

23-5. Se une un extremo de una barra de cobre a un extremo de una barra de aluminio. Las secciones de las barras son iguales. En la barra de cobre se genera un pulso ondulatorio de energía total 100 J que se propaga hacia la barra de aluminio. (a) ¿Cuánta energía se transmite a la barra de aluminio? (b) Supongamos ahora que el pulso ondulatorio se propaga de la barra de aluminio hacia la de cobre. La forma y energía total del

pulso son las mismas de antes. ¿Qué energía se transmite a la barra de cobre? (c) ¿En cuál de los dos casos (a) y (b) es mayor la velocidad de las partículas en la superficie de separación?

23-6. Se da un movimiento transversal a un extremo de un resorte de masa por unidad de longitud y tensión  $S$  y su otro extremo se une a un anillo (de masa despreciable) que puede deslizarse a lo largo de una barra horizontal perpendicular al resorte, según se indica en la figura 23-16. (a) ¿Cuál es el coeficiente de reflexión para la onda transversal de desplazamiento al final del resorte, si la barra está exenta de rozamiento? (b) Supongamos ahora que se emplea una barra con rozamiento, con lo que la fuerza de rozamiento que se ejerce sobre el anillo tiene por magnitud  $ru$ , donde  $u$  es la velocidad del anillo. ¿Cuál debe ser el valor de  $r$  para eliminar la reflexión de la onda en el extremo del resorte?

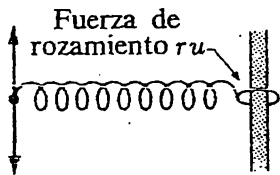


Figura 23-16

23-7. Sobre una superficie sin rozamiento se halla un resorte de masa por unidad de longitud  $\epsilon = 4 \text{ kg/m}$  y que se mantiene a una tensión  $S = 64 \text{ N}$  mediante dos hilos largos ligeros de  $\epsilon' = 1 \text{ g/m}$ . (a) En un pulso que se propague a lo largo del resorte, ¿qué fracción de la energía se refleja y qué fracción se transmite? (b) Si la longitud del resorte tenso es de  $4 \text{ m}$ , ¿qué tiempo  $\Delta t$  empleará un pulso en recorrerlo de uno a otro extremo? (c) A un extremo del resorte se

aplica una fuerza transversal  $F_0$  durante un tiempo  $\Delta t/2$ . Dibujar las ondas de desplazamiento y de velocidad en el resorte en  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 0,8 \Delta t$ ,  $t_3 = \Delta t$ ,  $t_4 = 1,20 \Delta t$ ,  $t_5 = 1,6 \Delta t$ , donde  $t$  se mide a partir del instante de aplicación de la fuerza  $F_0$ . (d) Repetir la parte (c) para una fuerza  $F_0$  aplicada durante un tiempo  $\Delta t$  y durante un tiempo  $2\Delta t$ .

23-8. Una barra de acero de  $100 \text{ m}$  de longitud y  $10 \text{ cm}$  de diámetro se halla en reposo inicialmente. Se le da un impulso a uno de sus extremos. La velocidad de las partículas es de  $2 \text{ m/s}$ . Supongamos que el impulso consiste en una fuerza constante  $F_0$  aplicada durante un tiempo  $\Delta t$ . (a) ¿Cuál es el tiempo  $\Delta t_1$  que emplea la onda compresiva para alcanzar el extremo alejado? (b) ¿Cuál es la velocidad de las partículas de las distintas partes de la barra en este instante? (c) ¿Cuánto ha de valer  $\Delta t$  para que todas las partes de la barra tengan la misma velocidad de las partículas en todo momento? ¿Hay más de un valor posible para  $\Delta t$ ? (d) ¿Cuál debe ser  $F_0$ ? (e) ¿Qué trabajo ha realizado  $F_0$ ?

23-9. Consideremos dos ondas armónicas  $A$  y  $B$ , de igual amplitud y longitud de onda, que se propaguen en sentidos opuestos. En el instante  $t = 0$  las dos ondas están en una posición tal que los desplazamientos de ambas están en concordancia de fase. Indicar gráficamente los desplazamientos individuales de  $A$  y  $B$  en los instantes  $t = 0$ ,  $T/4$ ,  $T/2$ ,  $3T/4$  y  $t = T$ , donde  $T$  es el período. Sumar gráficamente los desplazamientos de  $A$  y de  $B$  y discutir las propiedades de la onda estacionaria resultante.

23-10. Con referencia a la discusión del texto, demostrar que la suma de un número arbitrario de ondas armónicas que se propaguen en la misma dirección y sentido con la misma velocidad de pro-

pagación, siendo todas ellas de igual longitud de onda, puede describirse mediante una onda armónica única. [Es suficiente realizar el análisis con sólo las dos ondas:

$$y_1 = A \sin(\omega t - 2\pi x/\lambda)$$

y

$$y_2 = B \sin(\omega t - 2\pi x/\lambda + \phi).]$$

23-11. Demostrar que en una onda estacionaria la energía por unidad de longitud, promediada para el espacio y el tiempo, es  $h = \epsilon u_m^2/4$  [véase ec. (23-10) del texto], donde  $u_m$  es la amplitud máxima de la velocidad de las partículas en la onda y  $\epsilon$  es la masa por unidad de longitud.

23-12. Demostrar que la suma de las dos ondas  $A \sin(t + \phi_1 - 2\pi x/\lambda)$  y  $A \sin(t + \phi_2 + 2\pi x/\lambda)$  es una onda estacionaria.

23-13. En una tubería se introduce sonido mediante dos tubos delgados  $A$  y  $B$  separados una distancia  $d$ , según se indica en la figura 23-17. En estos tubos, el sonido está generado por altavoces exactamente iguales que, a su vez, están excitados por un oscilador único. Cada tubo genera en la tubería una onda sonora en cada sentido. Los tubos son tan pequeños que

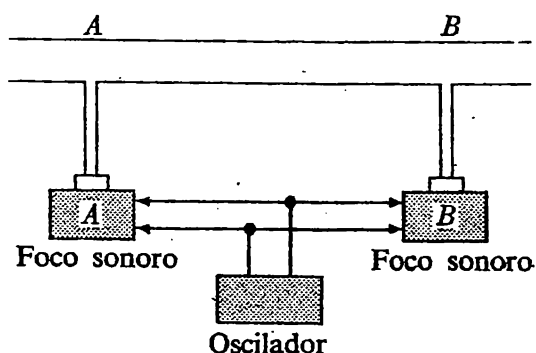


Figura 23-17

las ondas generadas por uno no están perturbadas por la presencia del otro. Los tubos tienen longitudes iguales y los altavoces funcionan en concordancia de fase. (a) Describir la naturaleza de las ondas de presión sonoras en la región a la derecha de  $B$ , a la izquierda de  $A$  y entre  $A$  y  $B$ . (b) Si cada tubo genera una onda en cada sentido con una amplitud  $p_m$ , ¿cuál es la amplitud de la presión en la onda a la derecha de  $B$ , expresada en función de  $d$  y de la longitud de onda  $\lambda$  del sonido creado? ¿Cuál es la potencia total generada por los altavoces? (c) ¿Cuál es la amplitud máxima de la presión en la región comprendida entre  $A$  y  $B$ ? Representar gráficamente la distribución de la presión entre  $A$  y  $B$ . (d) En particular, ¿cuáles son las amplitudes de la presión en (b) y (c) si  $d = 2\lambda$ ,  $d = 2,25\lambda$  y  $d = 2,5\lambda$ ? (e) ¿Qué les ocurre a las amplitudes de (b), (c) y (d) si se invierten los hilos que van a uno de los altavoces, con lo que los focos sonoros funcionan en oposición de fase?

23-14. Entre dos barras paralelas se mantiene tensa una cuerda, según se indica en la figura 23-18. Cada extremo de la cuerda está sujeto a un anillo que puede deslizarse sin rozamiento a lo largo de las barras. Se suelta la cuerda partiendo de un desplazamiento inicial como el indicado. La longitud de la cuerda

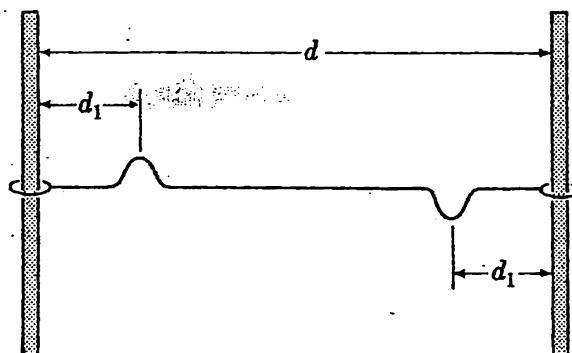


Figura 23-18

es  $d$  y la velocidad de propagación es  $c$ . ¿Qué tiempo transcurrirá hasta que la cuerda recupere el desplazamiento inicial, si (a) los anillos pueden moverse libremente a lo largo de las barras? (b) está fijo un anillo? (c) ambos anillos están fijos?

23-15. Un pájaro se posa sobre un hilo telefónico tendido entre postes separados 30 m. El impulso que aplica el pájaro al hilo origina pulsos ondulatorios transversales que se propagan a 60 m/s. ¿Cuándo y en qué sentido (hacia arriba o hacia abajo) volverán las ondas transversales al pájaro si éste (a) se posa en el punto medio de la luz? (b) se posa a 10 m de un extremo? (c) se posa a 7,5 m de un extremo?

23-16. Un alambre de masa por unidad de longitud  $\epsilon = 0,2$  g/m se fija por ambos extremos y vibra con su frecuencia propia más baja, igual a 200 Hz. La longitud del alambre es 1 m. (a) ¿Cuál es la tensión? (b) ¿Cuáles son las frecuencias de las oscilaciones características 2, 3, 4 y 5? (c) Si fuera constante la tensión, ¿cómo habría que alterar la longitud del alambre para que la frecuencia fundamental tomara los valores hallados en (b)?

23-17. Una cuerda  $A$  de masa 200 g y longitud 2 m se ata a una cuerda

$B$  de masa 50 g y longitud 1 m. Las cuerdas atadas se tensan a una tensión  $S = 490$  N y se sujetan sus extremos libres. La longitud combinada resulta ser, así, de 3 m. (a) Hallar el cociente entre las longitudes de onda en  $A$  y  $B$  para vibraciones de igual frecuencia. (b) Hallar la frecuencia más baja de una onda estacionaria del sistema que tuviera un nodo en la unión  $M$  de las dos cuerdas.

23-18. ¿Cuál es la energía total de oscilación de la  $n$ -ésima oscilación característica de una cuerda de longitud  $L$  con una amplitud  $A$ ? La tensión de la cuerda es  $S$ .

23-19. Una cuerda de longitud  $L$  que está sujeta por sus dos extremos y tiene una tensión  $S$ , se desplaza una distancia  $h$  en su punto medio y se suelta. (a) ¿Cuál es la energía de la oscilación subsiguiente? (b) ¿Con qué frecuencia reaparecerá la forma? Véase la figura 23-19.

23-20. El desplazamiento inicial de una cuerda es

$$y = 10 \sin(\pi x/d) + 5 \sin(3\pi x/d)$$

La frecuencia propia más baja de la cuerda es 25 Hz y su longitud es  $L = 100$  cm. ¿Cuál es el desplazamiento de la cuerda en  $t = 0,01$  s, 0,02 s, 0,03 s y 0,04 s?

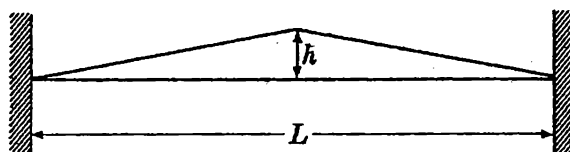


Figura 23-19



# APÉNDICES





## APÉNDICE A

## VAPORES APROXIMADOS DE ALGUNAS CONSTANTES FÍSICAS

$G$ , constante de la gravitación universal	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m <sup>2</sup> /kg <sup>2</sup> o bien $6,67 \cdot 10^{-8}$ dyna·cm <sup>2</sup> /g <sup>2</sup>
$g$ , aceleración de la gravedad (nominal)	9,8 m/s <sup>2</sup> o bien 980 cm/s <sup>2</sup>
$c$ , velocidad de la luz en el vacío	$3 \cdot 10^{10}$ m/s
$N_0$ , número de Avogadro	$6,02 \cdot 10^{23}$ moléculas/mol
$k$ , constante de Boltzmann	$1,38 \cdot 10^{-16}$ erg/°K o bien $1,38 \cdot 10^{-23}$ J/°K
$R$ , constante de los gases	$8,31 \cdot 10^7$ erg/mol.°K o bien 0,082 atm·litro/mol.°K o bien 1,99 cal/mol.°K
$M$ , masa del protón	$1,67 \cdot 10^{-24}$ g
$m$ , masa del electrón	$9,1 \cdot 10^{-28}$ g
$h$ , constante de Planck	$6,62 \cdot 10^{-27}$ erg·s
$e$ , carga eléctrica del electrón	$1,6 \cdot 10^{-19}$ C
1 cal, equivalente mecánico del calor	4,1855 J
1 atm, presión atmosférica	1,033 kp/cm <sup>2</sup> o bien $1,013 \cdot 10^6$ barías

## FACTORES DE CONVERSIÓN

1 pulgada = 2,54 cm
1 pie = 30,48 cm
1 ångström = $10^{-8}$ cm
1 milla = 5280 pies = 1609 metros
1 joule = $10^7$ erg
1 newton = $10^5$ dynas
1 C.V. = 75 kpm/s = 736 watt
1 H.P. = 76 kpm/s = 746 watt

## APÉNDICE B

## DATOS APROXIMADOS DEL SISTEMA SOLAR

<i>Planeta</i>	<i>Masa (Tierra = 1)</i>	<i>Diámetro (Tierra = 1)</i>	<i>Período (T)</i>	<i>Excentricidad de la órbita</i>	<i>Distancia media al Sol (Tierra = 1)</i>
Mercurio	0,54	0,38	87,97 d	0,206	0,39
Venus	0,814	0,97	224,7 d	0,007	0,72
Tierra	1,0	1,0	365,3 d	0,017	1,0
Marte	0,107	0,52	1,88 a	0,093	1,52
Júpiter	318,35	10,97	11,86 a	0,048	5,2
Saturno	95,3	9,03	29,46 a	0,056	9,54
Urano	14,58	3,72	84,02 a	0,047	19,19
Neptuno	17,26	3,38	164,79 a	0,009	30,07
Plutón	0,1	0,45	247,7 a	0,249	39,51

## CONSTANTES DEL SISTEMA SOLAR

## Tierra

Masa	$6 \cdot 10^{24}$ kg
Radio ecuatorial	$6,4 \cdot 10^6$ m
Distancia media al Sol	$1,49 \cdot 10^{11}$ m

## Luna

Masa	$7,3 \cdot 10^{22}$ kg
Radio	$1,7 \cdot 10^6$ m
Distancia media a la Tierra	$3,84 \cdot 10^8$ m

## Sol

Masa	$2 \cdot 10^{30}$ kg
Radio	$7 \cdot 10^8$ m

## APÉNDICE C

## FUERZA GRAVITATORIA DE UNA ESFERA

Queremos demostrar que la fuerza que se ejerce sobre un cuerpo pequeño situado en el exterior de una esfera uniforme de masa  $M$  es  $F = -G(mM/r^2)$ , donde  $r$  es la distancia del cuerpo al centro de la esfera. Podremos lograrlo si demostramos que la energía potencial de dicha masa es  $V = -G(mM/r)$ . Entonces, la fuerza se deduce directamente de la energía potencial, ya que  $F = -\partial V/\partial r$ . Recordemos nuestro estudio del capítulo 7, donde recalcábamos que la energía potencial que resulta de muchas fuerzas individuales que se ejercen sobre un cuerpo se puede obtener, simplemente, sumando las distintas contribuciones a la energía potencial. Por tanto, busquemos la energía potencial de una cáscara esférica delgada de radio  $a$ . Luego sumaremos las energías potenciales de todas las cáscaras en que podamos imaginar descompuesta una esfera. En este desarrollo, supondremos constante la densidad de la materia que constituye una cáscara esférica cualquiera. Consideremos un anillo de anchura  $a d\theta$ , donde  $a$  es el radio de la cáscara. El área de este anillo es  $2\pi a^2 \sin \theta d\theta$ , y si la masa por unidad de superficie de la cáscara es  $\epsilon$  la masa del anillo será  $2\pi a^2 \epsilon \sin \theta d\theta$ . La energía potencial de una masa  $m$  situada a una distancia  $r$  del centro de la cáscara es

$$dV = -G \frac{2\pi a^2 \epsilon \sin \theta d\theta}{z} m$$

(véase fig. C-1). La distancia  $z$  viene dada por el teorema del coseno:

$$z^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta \quad (\text{C-1})$$

Integraremos ahora para todos los anillos delgados que constituyen la cáscara

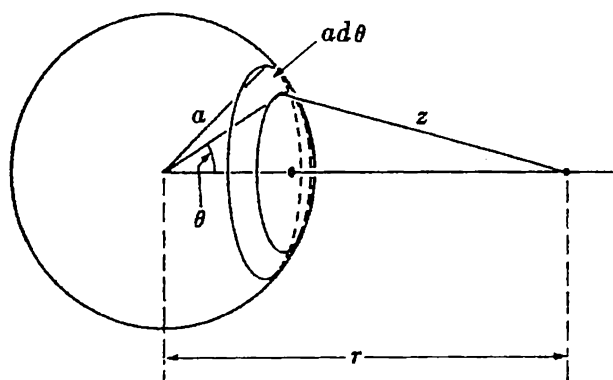


Figura C-1

y esta integración se efectúa mejor para  $z$  que para  $\theta$ . De la ecuación (C-1) tenemos

$$z \, dz = ar \, \sin \theta \, d\theta$$

y así tenemos, para  $dV$

$$dV = -G \frac{2\pi a \epsilon}{r} m \, dz \quad (C-2)$$

La integración para  $z$  debe efectuarse desde  $z = r - a$  hasta  $z = r + a$ . Luego tenemos

$$V = -G \frac{2\pi a \epsilon m}{r} \int_{r-a}^{r+a} dz = -G \frac{4\pi a^2 \epsilon m}{r} = -G \frac{m m_s}{r} \quad (C-3)$$

donde  $m_s$  es la masa de la cáscara delgada. Evidentemente, al sumar los efectos de todas las cáscaras concéntricas que constituyen la esfera, obtenemos

$$V = -G \frac{M m}{r}$$

Obsérvese que hemos supuesto que la densidad de la esfera, si varía sólo lo hace con la distancia al centro. Nuestro resultado no sería cierto si en todos los puntos de una capa esférica delgada no se mantuviera constante la densidad.

## APÉNDICE D

## TRAYECTORIAS EN EL CAMPO GRAVITATORIO

Partiremos de la expresión (10-8a) del texto, correspondiente a la fuerza. A continuación, sustituiremos el valor conocido  $F = -GMm/r^2 = -K/r^2 = -Ku^2$  con lo que  $(l^2/m)u^2(u + d^2u/d\theta^2) = Ku^2$ . La ecuación de la trayectoria es, entonces,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{Km}{l^2}$$

que, con  $w = u - Km/l^2$  se reduce a

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} = -w \quad (\text{D-1})$$

(Esta ecuación es una vieja conocida. En el estudio del movimiento armónico del cap. 8, encontramos este tipo de ecuación, con la única diferencia que allí se utilizaban otros símbolos.) La solución podemos escribirla inmediatamente en la forma

$$w = A \cos(\theta + \phi)$$

o, introduciendo  $u$ , en la forma

$$u = \frac{1}{r} = A \cos(\theta + \phi) + \frac{Km}{l^2} \quad (\text{D-2})$$

La ecuación (D-2) puede escribirse ahora de la manera siguiente:

$$r = \frac{b^2/a}{1 + e \cos(\theta + \phi)} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta + \phi)} \quad (\text{D-3})$$

donde

$$\frac{b^2}{a} = \frac{l^2}{Km} \quad (\text{D-4})$$

y

$$e = \frac{Al^2}{Km}$$

La Geometría Analítica nos dice que la ecuación (D-3) representa una elipse cuando  $e < 1$ , una hipérbola cuando  $e > 1$ , y una parábola cuando  $e = 1$ . Hasta ahora, sólo hemos considerado órbitas elípticas. De nuestro estudio anterior sacamos la conclusión de que las trayectorias parabólicas e hiperbólicas

corresponderían a trayectorias de escape y a  $H \geq 0$ , mientras que las órbitas aprisionadas sólo son elípticas y circulares y corresponden a  $H < 0$ .

Este resultado podemos establecerlo en forma convincente expresando  $e$  (y por tanto la constante  $A$ ) en función de la energía total del cuerpo en el punto en que la velocidad es perpendicular al eje menor, es decir, en el punto en que  $r = a$ . La velocidad  $v_1$  en dicho punto se puede expresar en función del momento cinético  $l = mv_1b$  y por tanto, la energía cinética es  $E_1 = l^2/2mb^2$ . Evidentemente, la energía potencial es  $V_1 = -K/a$  y la energía total es, pues,  $H = l^2/2mb^2 - K/a$ . Utilizando la ecuación (D-4), vemos que esta expresión de  $H$  se reduce a  $H = -K/2a$ , o sea

$$a = -\frac{K}{2H} = -\frac{GMm}{2H} \quad (\text{D-5})$$

Se deduce entonces de la ecuación (D-4) el valor de  $b$ :

$$b = l\sqrt{\frac{a}{mK}} = l\sqrt{-\frac{1}{2mH}} \quad (\text{D-6})$$

El valor correspondiente de  $e$  deducido de  $e^2 = 1 - b^2/a^2$  se convierte en

$$e = \sqrt{1 + \frac{2l^2H}{K^2m}} \quad (\text{D-7})$$

En otras palabras, sólo cuando  $H < 0$  tenemos  $e < 1$ , indicando una órbita elíptica. Cuando  $H = 0$ , tenemos  $e = 1$  y una órbita parabólica; y cuando  $H > 0$ , tenemos  $e > 1$  y una órbita hiperbólica.

Es interesante observar, en la ecuación (D-5), que en el caso de una órbita elíptica, el eje mayor de la órbita elíptica de una partícula dada está determinado *exclusivamente por la energía total de la partícula*. Obsérvese también en la ecuación (D-4) que, para una energía dada, el eje menor es proporcional al momento cinético  $l$ , según era de esperar.

## APÉNDICE E

## LISTA ALFABÉTICA DE ELEMENTOS

<i>Elemento</i>	<i>Símbolo</i>	<i>Número atómico Z</i>	<i>Elemento</i>	<i>Símbolo</i>	<i>Número atómico Z</i>
Actinio	Ac	89	Francio	Fr	87
Aluminio	Al	13	Gadolinio	Gd	64
Americio	Am	95	Galio	Ga	31
Antimonio	Sb	51	Germanio	Ge	32
Argón	A	18	Hafnio	Hf	72
Arsénico	As	33	Helio	He	2
Astatino	At	85	Hidrógeno	H	1
Azufre	S	16	Hierro	Fe	26
Bario	Ba	56	Holmio	Ho	67
Berkelio	Bk	97	Indio	In	49
Berilio	Be	4	Iodo	I	53
Bismuto	Bi	83	Iridio	Ir	77
Boro	B	5	Kriptón	Kr	36
Bromo	Br	35	Lantano	La	57
Cadmio	Cd	48	Litio	Li	3
Calcio	Ca	20	Lutecio	Lu	71
Californio	Cf	98	Magnesio	Mg	12
Carbono	C	6	Manganeso	Mn	25
Cerio	Ce	58	Mendelevio	Md	101
Cesio	Cs	55	Mercurio	Hg	80
Cloro	Cl	17	Molibdeno	Mo	42
Cobalto	Co	27	Neodimio	Nd	60
Cobre	Cu	29	Neón	Ne	10
Cromo	Cr	24	Neptunio	Np	93
Curio	Cm	96	Níquel	Ni	28
Disprosio	Dy	66	Niobio	Nb	41
Einsteinio	E	99	Nitrógeno	N	7
Erbio	Er	68	Nobelio	No	102
Escandio	Sc	21	Oro	Au	79
Estaño	Sn	50	Osmio	Os	76
Estroncio	Sr	38	Oxígeno	O	8
Europio	Eu	63	Paladio	Pd	46
Fermio	Fm	100	Plata	Ag	47
Flúor	F	9	Platino	Pt	78
Fósforo	P	15	Plomo	Pb	82

## LISTA ALFABÉTICA DE ELEMENTOS (Continuación)

<i>Elemento</i>	<i>Símbolo</i>	<i>Número atómico Z</i>	<i>Elemento</i>	<i>Símbolo</i>	<i>Número atómico Z</i>
Plutonio	Pu	94	Talio	Tl	81
Polonio	Po	84	Tántalo	Ta	73
Potasio	K	19	Tecnecio	Tc	43
Praseodimio	Pr	59	Teluro	Te	52
Promecio	Pm	61	Terbio	Tb	65
Protactinio	Pa	91	Torio	Th	90
Radio	Ra	88	Tulio	Tm	69
Radón	Rn	86	Titanio	Ti	22
Renio	Re	75	Uranio	U	92
Rodio	Rh	45	Vanadio	V	23
Rubidio	Rb	37	Wolframio	W	74
Rutenio	Ru	44	Xenón	Xe	54
Samario	Sm	62	Yterbio	Yb	70
Selenio	Se	34	Ytrio	Y	39
Silicio	Si	14	Zinc	Zn	30
Sodio	Na	11	Zirconio	Zr	40



## APÉNDICE F

## FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS NATURALES

Angulo		Seno	Coseno	Tan- gente	Angulo		Seno	Coseno	Tan- gente
Grados	Radianes				Grados	Radianes			
0	,000	0,000	1,000	0,000					
1	,000	,018	1,000	,018	46	0,803	0,719	0,695	1,036
2	,035	,035	0,999	,035	47	,820	,731	,682	1,072
3	,052	,052	,999	,052	48	,838	,743	,669	1,111
4	,070	,070	,998	,070	49	,855	,755	,656	1,150
5	,087	,087	,996	,088	50	,873	,766	,643	1,192
6	,105	,105	,995	,105	51	,890	,777	,629	1,235
7	,122	,122	,993	,123	52	,908	,788	,616	1,280
8	,140	,139	,990	,141	53	,925	,799	,602	1,327
9	,157	,156	,988	,158	54	,942	,809	,588	1,376
10	,175	,174	,985	,176	55	,960	,819	,574	1,428
11	,192	,191	,982	,194	56	,977	,829	,559	1,483
12	,209	,208	,978	,213	57	,995	,839	,545	1,540
13	,227	,225	,974	,231	58	1,012	,848	,530	1,600
14	,244	,242	,970	,249	59	1,030	,857	,515	1,664
15	,262	,259	,966	,268	60	1,047	,866	,500	1,732
16	,279	,276	,961	,287	61	1,065	,875	,485	1,804
17	,297	,292	,956	,306	62	1,082	,883	,470	1,881
18	,314	,309	,951	,325	63	1,100	,891	,454	1,963
19	,332	,326	,946	,344	64	1,117	,899	,438	2,050
20	,349	,342	,940	,364	65	1,134	,906	,423	2,145
21	,367	,358	,934	,384	66	1,152	,914	,407	2,246
22	,384	,375	,927	,404	67	1,169	,921	,391	2,356
23	,401	,391	,921	,425	68	1,187	,927	,375	2,475
24	,419	,407	,914	,445	69	1,204	,934	,358	2,605
25	,436	,423	,906	,466	70	1,222	,940	,342	2,747
26	,454	,438	,899	,488	71	1,239	,946	,326	2,904
27	,471	,454	,891	,510	72	1,257	,951	,309	3,078
28	,489	,470	,883	,532	73	1,274	,956	,292	3,271
29	,506	,485	,875	,554	74	1,292	,961	,276	3,487
30	,524	,500	,866	,577	75	1,309	,966	,259	3,732
31	,541	,515	,857	,601	76	1,326	,970	,242	4,011
32	,559	,530	,848	,625	77	1,344	,974	,225	4,331
33	,576	,545	,839	,649	78	1,361	,978	,208	4,705
34	,593	,559	,829	,675	79	1,379	,982	,191	5,145
35	,611	,574	,819	,700	80	1,396	,985	,174	5,671
36	,628	,588	,809	,727	81	1,414	,988	,156	6,314
37	,646	,602	,799	,754	82	1,431	,990	,139	7,115
38	,663	,616	,788	,791	83	1,449	,993	,122	8,144
39	,681	,629	,777	,810	84	1,466	,995	,105	9,514
40	,698	,643	,766	,839	85	1,484	,996	,087	11,43
41	,716	,656	,755	,869	86	1,501	,998	,070	14,30
42	,733	,669	,743	,900	87	1,518	,999	,052	19,08
43	,751	,682	,731	,933	88	1,536	,999	,035	28,64
44	,768	,695	,719	,966	89	1,553	1,000	,018	57,29
45	,785	,707	,707	1,000	90	1,571	1,000	,000	∞



# RESULTADOS DE LOS PROBLEMAS IMPARES

## CAPÍTULO 1

1-1. (b)  $\bar{v}_{1-2} = -14,7 \text{ m/s}$ ,  $\bar{v}_{1-1,5} = -12,2 \text{ m/s}$ ,  $\bar{v}_{1-1,1} = -10,0 \text{ m/s}$   
 $\bar{v}_{1-1,01} = -9,8 \text{ m/s}$   
(c)  $v_1 = -9,8 \text{ m/s}$

1-3. (b) 7 cm. (c)  $\bar{v}_{1-2} = 7 \text{ cm/s}$ ,  $v_1 = 3 \text{ cm/s}$ ,  $v_{1,5} = 6,75 \text{ cm/s}$ ,  
 $v_2 = 12 \text{ cm/s}$ .

1-5. 32,15 pie/s<sup>2</sup>, 9,754 m/s<sup>2</sup>

1-7.  $|X| = \sqrt{153} \text{ km}$ . Dirección 14,1° suroeste.

1-9. (a) A, B y C son paralelos. (b) B = 0. (c) A perpendicular a B. (d) A y B están dirigidos en sentidos opuestos.

1-11. (a) Boga perpendicularmente a la orilla, con lo que alcanza la orilla opuesta 0,9 km aguas abajo. Tiempo 1/5 de hora.  
(b) Contra corriente con un ángulo  $\theta = \arccos 4,5/7,5 = 53,2^\circ$  respecto a la perpendicular a la corriente. Tiempo 1/4 de hora.

1-13.  $v_b = \frac{28,5}{1 + 4,4 \cdot 10^{-16}} \simeq 28,5 \text{ m/s}$ .

1-15.  $v_{ab} = 0,996c$ ,  $v_{ba} = -0,996c$ .

1-17.  $\cos \theta = \frac{24}{\sqrt{17 \cdot 41}}$ ;  $\theta \simeq 25^\circ$

## CAPÍTULO 2

2-1. (a) 2 kg. (b) 2,44 kg.

## CAPÍTULO 3

3-1.  $v'_b = 2 \text{ m/s}$  en sentido opuesto al inicial de B.

3-3. 2370 m/s.

3-5.  $2,72 \cdot 10^7 \text{ cm/s}$ .

3-7. No puede suceder a menos que  $V_2 = 0$ . En tal caso, la velocidad de la segunda bola será nula después del choque para cualquier velocidad inicial.

3-9. (a) 4 m/s. (b) 4 m/s. (c) 8 m/s y 0 m/s.

3-11. (a)  $\frac{2m_a}{m_a + m_b}$ . (b)  $\frac{m_a}{m_a + m_b}$ . (c) El límite superior es  $v'_a = 2v_b$  cuando  $m_a/m_b = 0$ .

3-13.  $|v'_a| = \frac{11}{13}v_0$

3-15.  $d = \frac{60}{83}R \simeq 0,72 R$  del centro de la Tierra.

3-17.  $L/4$ .

3-19. (a) - 200 dynas. (b) - 200 dynas, 0.

3-21. (a)  $m_b = 4$  kg.

3-23.  $t_1 = v_0/3g \simeq 0,34$  s. Separación  $2v_0t_1 \simeq 6,8$  m.  $t_2 = 3v_0/g \simeq 3,06$  s. Separación  $2v_0t_2 \simeq 61,2$  m. (Hay dos soluciones.)

3-25. 9,8 cm a partir de la posición de deformación nula.

3-27.  $v = \frac{2}{9} \frac{r^2}{\eta} \rho g \simeq 3020$  cm/s.

3-29. (a) a 30 cm de la pared de la izquierda. (b)  $150 \text{ m/s}^2$ .

3-31.  $F$ .

3-33.  $T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2} g$ .

3-35. 64 N.

3-37.  $v = \sqrt{\frac{F}{A\varrho}} \simeq 510$  m/s.

3-39. (a)  $V = \frac{mvN}{Nm + M}$ .

#### CAPÍTULO 4

4-1.  $v_a = 5$  m/s,  $v_b = \sqrt{10}$  m/s,  $34,5^\circ$ .

4-5.  $p = 1,27$  kg.m/s,  $m = 2,5$  g.

4-7. (a)  $X = 1/4$  m,  $Y = 3/8$  m. (b)  $V_x = 5/4$  m/s,  $V_y = 0$ .

4-9. El centro de masa se halla a una distancia  $\pi L/(64 - 4\pi)$  a la izquierda de centro de la placa.

4-15.  $K = 37$  N/m;  $F_x = 3,27$  N,  $F_y = 0$ .

4-17.  $q = 2,5 \cdot 10^{-6}$  C.

4-21. (b)  $a = g/2$ , dirigida tangencialmente hacia la parte baja del aro;  $F = \omega(3 - \sqrt{3}/2)$  dirigida radialmente hacia afuera.

4-23. (a)  $w_1 \sin \phi_1 = w_2 \sin \phi_2$ . (b)  $S = w_1 \sin \phi_1 = w_2 \sin \phi_2$ ,  $F_1 = w_1 \cos \phi_1$ ,  $F_2 = w_2 \cos \phi_2$ , ambas dirigidas hacia el centro del cilindro.

4-25.  $m_1$  se hallará a 10 cm de  $P$ .

- 4-27. (a)  $(a_A)_x = 2,5 \text{ m/s}^2$ ;  $(a_B)_x = -5/3 \text{ m/s}^2$ ;  $(a_B)_y = -5/2 \text{ m/s}^2$ ;  
 $(a_C)_y = 15/8 \text{ m/s}^2$ .  
 (b)  $(a_{AB})_y = -3/2 \text{ m/s}^2$ . (c) 0.  
 4-29. (b)  $\tan \theta = \mu$ .  
 4-31. (b)  $S = g \cos \theta (\mu_b - \mu_a) m_a m_b / (m_a + m_b) = 0,57 \text{ N}$ .  
 4-33.  $a = g \sin \theta - qv_0 / (m_0 - qt)$  hasta  $t = (m_0 - M)/q$ , a partir de este instante  $a = g \sin \theta$ .

## CAPÍTULO 5

- 5-1.  $t = \sqrt{2h/g}$  en ambos casos.  
 5-3.  $\tan \theta = 4h/l$ ,  $v_0^2 = \frac{gl^2}{8h} \left[ 1 + \left( \frac{4h}{l} \right)^2 \right]$   
 5-5.  $\tan \theta_1 = 1$  y  $\tan \theta_2 = 3$ . ( $\theta_1 = 45^\circ$ ,  $\theta_2 \simeq 71,6^\circ$ ).  
 5-7.  $T = 2\pi\sqrt{(R+h)/g} \simeq 1,44 \text{ h}$ . Desde un punto de la Tierra en el plano de la órbita, el satélite sería visible durante un tiempo  $t = T\theta/\pi$ , donde  $\theta = \arccos(R/R+h)$ .  
 5-9.  $\frac{1}{2\pi} \sqrt{10g/R} \simeq 0,735 \text{ Hz} \simeq 44 \text{ r.p.m.}$   
 5-11.  $v = \sqrt{rg/\mu} \simeq 14 \text{ m/s}$ .  
 5-13. (a)  $v = \sqrt{\mu gr}$ . (b)  $\tan \theta = v^2/rg$ .  
 5-15. Aproximadamente  $1,6 \cdot 10^8 \text{ cm/s}$ .  
 5-17.  $v'_x = v$ ,  $v'_y = Eqx_0/mv$ ;  $v'^2 = v^2 + (Eqx_0/mv)^2$   
 5-19. Igual que en 5-18 con la diferencia de que la pendiente aumenta con el tiempo, puesto que la partícula tiene una aceleración ( $Eq/m$ ) dirigida según el campo.  
 5-21. La partícula empieza a volver en el instante  $t = t_0[1 + (\frac{3}{2})^{1/3}]$  en la posición

$$x = \frac{F_0 t_0^2}{2m} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} \right)^{1/3} \right].$$

- 5-23.  $F = (2\pi)^2 mR/T^2 \simeq 3,5 \cdot 10^{21} \text{ N} \simeq 3,6 \cdot 10^{20} \text{ kp}$  ( $3,6 \cdot 10^{16}$  cuerdas).

## CAPÍTULO 6

- 6-1. (a)  $J = mg \Delta t = 19,6 \text{ N}\cdot\text{s}$  en el primero y en el segundo segundos. Al cabo de  $t$  segundos  $J = 19,6 t \text{ N}\cdot\text{s}$ .  
 (b)  $19,6 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$ ,  $t = 1 \text{ s}$ .  
 $39,2 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$ ,  $t = 2 \text{ s}$ .  
 $J = mgt = 19,6 t \text{ kg}\cdot\text{m/s}$ .

$$(c) J = m \sqrt{2gh} = 88,4 \text{ N}\cdot\text{s}.$$

$$\bar{F} = \frac{J}{\Delta t} = 442 \text{ N}.$$

$$6-3. (a) J \simeq 6,18 \text{ N}\cdot\text{s} \text{ con un ángulo } -\arctan(1/4) \text{ con el eje } x.$$

$$(b) v \simeq 6,94 \text{ m/s con un ángulo } +\arctan(17/12) \text{ con el eje } x.$$

$$6-5. (a) p = (5/\pi) (1 - \cos 4\pi t) \text{ N}\cdot\text{s}:$$

$$(b) J = 20/\pi \text{ N}\cdot\text{s}.$$

$$(c) J = 0.$$

$$6-7. J = 1,89 \text{ N}\cdot\text{s}, \bar{F} = 189 \text{ N}.$$

$$6-9. \Delta p = 50 \text{ g}\cdot\text{cm/s en cada caso:}$$

$$\text{Las velocidades finales son: arena, } V = 5 \cdot 10^6 \text{ cm/s,}$$

$$\text{hielo, } V = 50 \text{ cm/s,}$$

$$\text{auto, } V = 5 \cdot 10^{-5} \text{ cm/s.}$$

$$\text{Energía cinética adquirida: arena} = 1,25 \cdot 10^8 \text{ erg.}$$

$$\text{hielo} = 1250 \text{ erg.}$$

$$\text{auto} = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ erg.}$$

$$6-11. (a) \text{ Pequeñas. } (b) 3,21 \text{ m/s. No. } (c) \text{ No.}$$

$$6-13. F = 4000 \text{ N, } P = 1,6 \cdot 10^6 \sqrt{x} \text{ watt.}$$

$$6-15. (a) E = 2 mgr = 1,96 \cdot 10^5 \text{ erg.}$$

$$(b) \text{ La fuerza normal es siempre perpendicular a } v.$$

$$(c) \text{ No. Obsérvese que el trabajo total por componentes es nulo.}$$

$$6-17. \Delta E = 3x_0(4F_0 + mg).$$

$$\bar{P} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{3x_0}{t_0} (4F_0 + mg).$$

$$6-19. \text{ Calculando en forma no relativista, } v' = 3,95c, \text{ donde } c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}$$

es la velocidad de la luz. La celeridad correcta, calculada relativísticamente, es  $v = 0,9935c$ .

$$6-23. v_A = J/m \text{ hacia } B.$$

$$E = \frac{J^2}{2m}.$$

$$V_0 = \frac{J}{2m}.$$

$$6-25. V_i = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \left[ 2\mu gx + \frac{Kx^2}{m_1 + m_2} \right]^{1/2}$$

$$6-27. (a) dp/dt = 20 \text{ dynas. } (b) F_b = \sqrt{500} \text{ dynas. } (c) 39 \text{ cm. } (d) 780 \text{ erg.}$$

$$6-29. E = 2K^2/mv_0^2 d^2$$

$$6-31. (a) F = 10 \text{ N. } (b) t = 3/20 \text{ s.}$$

$$6-33. v = 600 \text{ cm/s. } (b) 0,98.$$

$$6-35. \quad T = \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\sqrt{\frac{2h}{g}} \left( \frac{\sqrt{1-e}}{1 - \sqrt{1-e}} \right).$$

$$6-37. \quad x = Ft^2/2m. \quad x = 2\sqrt{2P/m} t^{3/2}/3.$$

$$6-39. \quad \Delta E = 33 \text{ J.}$$

## CAPÍTULO 7

$$7-1. \quad (a) K = mv^2/x^2 = 200 \text{ N/m.} \quad (c) J = 2 mv = 2 \text{ N} \cdot \text{s.}$$

7-3. Si  $y = 0$  cuando la cara inferior del cubo coincide con la superficie del agua, tenemos

$$\begin{aligned} V_1 &= \rho d^3 gy & (y > 0) \\ V_2 &= \rho d^3 gy + \rho_0 d^2 gy^2/2 & (0 > y > -d) \\ V_3 &= \rho d^3 gy + \rho_0 d^4 g/2 - \rho_0 d^3 g(y + d) & (y < -d) \end{aligned}$$

donde  $d$  es la longitud de la arista del cubo y  $\rho_0$  es la densidad del agua.

$$7-5. \quad E_a = 8, E_b = 12, E_c = 6 \text{ erg.}$$

7-7.  $S = mg \cos \theta + mv^2/l = (2H/l) + mg (3 \cos \theta - 2)$ , donde  $H$  es la energía mecánica total y  $l$  la longitud del péndulo. La tensión sólo podrá ser nula cuando  $mgl < H < \frac{5}{2}mgl$  y el ángulo está dado por  $\cos \theta = -\frac{2}{3}[(H/mgl) - 1]$ .

$$7-9. \quad (a) F_x = -Kx + \frac{C}{L-x}. \quad (b) V = \frac{Kx^2}{2} + C \ln \left( \frac{L-x}{L} \right).$$

$$(c) x = \frac{L}{2} \left( 1 \pm \frac{\sqrt{5}}{3} \right). \quad (d) H = V_{\max} = \frac{5}{36}KL^2 \left( \frac{5}{2} - \ln 6 \right).$$

$$7-11. \quad (a) E_1 = \frac{GM_T}{R} \left( 1 - \frac{R}{r_T} \right) - \frac{GM_L}{D-r_T} \left( 1 - \frac{D-r_T}{D-R} \right)$$

$$(b) E_2 = \frac{GM_e}{R} \left( 1 - \frac{R}{r_e} \right) + \frac{GM_m}{D+R} \left( 1 - \frac{D+R}{D+r_e} \right)$$

donde  $R$  = radio terrestre. (Demás notaciones, véase problema 7-10.)

$$7-13. \quad v = 2\pi D/T \simeq 10^3 \text{ m/s.}$$

$$r_2 = 2D \simeq 7.68 \cdot 10^8 \text{ m} \quad (D = \text{distancia Tierra-Luna}).$$

$$7-15. \quad (a) 275 \text{ 500 J.} \quad (b) 468 \text{ kg.}$$

$$7-17. \quad (a) 34,5 \text{ N.} \quad (b) 518 \text{ J.} \quad (c) 15 \text{ m/s.}$$

$$7-19. \quad (a) F_x = -12x + 9x^2. \quad (b) \frac{32}{9} \text{ joules.}$$

$$(c) t = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{m}{2(H-V)}} dx.$$

7-21. (a)  $V = -mgR(1 - \cos \theta) + \frac{1}{8}KR^2[\sqrt{1 + 4(1 - \cos \theta)} - 1]^2$ .

(b)  $(mv^2/2)_{\min} = \frac{KR^2}{2} - 2mgR$ .

(c)  $N_1 = 5mg - KR, N_2 = KR - mg$ .

El problema sólo puede resolverse si  $4mg/R < K < 5mg/R$ .

7-27. (a)  $m_b = m_a$ . (b)  $m_a > m_b$ . (c)  $m_a < m_b$ .

7-29. (a)  $V = 10$  cm/s. (b)  $P = 20$  g·cm/s. (c)  $v_1 = 0$  cm/s,  $v_2 = 20$  cm/s (o recíprocamente).

7-31. Movimiento en el mismo sentido,  $\Delta E = 2,5 \cdot 10^3$  erg.  
Movimiento en sentido contrario  $\Delta E = -0,5 \cdot 10^3$  erg.

## CAPÍTULO 8

8-5.  $K = 4 \cdot 10^5$  dynas/cm.

8-7.  $K \simeq 9000$  N/m.

8-9. (a)  $x = L(2K_2 + K_1)/(K_2 + K_1)$ , donde  $x$  se mide desde la pared izquierda.  
(b)  $\omega = \sqrt{(K_2 + K_1)/m}$ .

8-11. No. El período se acortaría para amplitudes mayores.

8-15.  $x = 10 \cos \pi/4 = 7,07$  cm,  $v = -v_0 \sin \pi/4 = -890$  cm/s,  
 $K = 1,6 \cdot 10^5$  dynas/cm.

8-17. En el punto de desplazamiento máximo  $J = \sqrt{3}$  N·s;  
En el punto de velocidad máxima:  $J = +1$  ó  $-3$  N·s.

8-19. (a)  $x_1/x_2 = 4$ , (b)  $\omega_1/\omega_2 = 1/2$ , (c)  $E_1/E_2 = 1/4$ .

8-21. (a)  $v = 58$  cm/s. (b)  $118$  cm/s<sup>2</sup> dirigida según la tangente a la trayectoria circular. (c)  $T = \pi$  s.

8-23.  $\omega_p/\omega_T = 2\sqrt{2}$ .

8-25. (a) El período aumenta

(b)  $T = 4 \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{(2g/l)(\cos \theta - \cos \theta_0)}}$

(c)  $T = 4 \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{m}{2[H - V(x)]}} dx$ , donde  $V(x) = \frac{K}{2} (\sqrt{l^2 + x^2} - l)^2$

$H = V(x_0)$ , y  $l$ , longitud del resorte indeformado, es la distancia del origen al punto fijo del resorte.

8-27. (a) El cuerpo 1 se desplaza una distancia  $d$  hacia la izquierda.

(b)  $V_0 = \sqrt{K/m} d/2$ ,  $x_0 = d/\sqrt{2}$ .



- 8-29. (a)  $\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$ . (b)  $Q = 30\pi$ ,  $\tau = 6\pi \text{ s}$ . (c)  $R = \frac{1}{3}\pi \text{ N} \cdot \text{s/cm}$ .  
 (d)  $F_f = Rv \simeq \pi \text{ N}$  cuando la masa pasa por la posición de equilibrio por primera vez.
- 8-33. (a)  $F_1 = Kx_0 \cos \omega t$ . (b)  $F_2 = -m\omega^2 x_0 \cos \omega t$   
 (c)  $F_3 = m(\omega_0^2 - \omega^2)x_0 \cos \omega t$ . (d) 0. (e) El sistema se comporta como en (b).
- 8-35.  $x_0 = 1,28 \cdot 10^{-4}$ ;  $6,75 \cdot 10^{-4}$ ;  $1,19 \cdot 10^{-3}$ ;  $4,22 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ .  
 $F_0 = Kx_0$ , donde  $K = 1,97 \cdot 10^5 \text{ N/m}$ .
- 8-37. (a)  $T = 2\pi\sqrt{l/g} \simeq 3,45 \text{ s}$ .  
 (b)  $\theta_0 = 0,0185 \text{ rad}$ .  
 (e) La bala habría que dispararla cuando el péndulo se hallara en  $\theta = 0$ , moviéndose en el mismo sentido que la bala.
- 8-39. (a)  $x = \frac{x_0}{1 - (\omega^2/\omega_0^2)} \sin \omega t$ . (b)  $4x_0/3$ . (c)  $f = 1,32f_0$ .  
 (d)  $F_s = -\frac{m\omega^2 x_0}{1 - (\omega^2/\omega_0^2)} \sin \omega t$ .

## CAPÍTULO 9

- 9-1. (a)  $p_\theta \simeq 20$ ; 14,1; 1,67; 0,1  $\text{kg} \cdot \text{m/s}$ . (b)  $p_\theta r = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ .
- 9-3. Todos los impulsos están dirigidos hacia 0 y tienen las siguientes componentes, expresadas en  $\text{kg} \cdot \text{m/s}$ :
- $$J_{Ax} = -10, \quad J_{Ay} = 4; \quad J_{Bx} = -2,5, \quad J_{By} = -4;$$
- $$J_{Cx} = +2,5, \quad J_{Cy} = -4; \quad J_{Dx} = +10, \quad J_{Dy} = +4.$$
- 9-5.  $R = l^2/mA$ .
- 9-7. (a)  $\omega = (r_0/r)^2 \omega_0$ . (b)  $3m(r_0 \omega_0)^2/2$ .
- 9-9. (a)  $500 \text{ cm}^2/\text{s}$  (b)  $3000 \text{ g} \cdot \text{cm}^2/\text{s}$   
 (c) 0,05; 0,735; 0,10;  $0,05 \text{ s}^{-1}$ .
- 9-15. Velocidad del centro de masa  $m_2 v_0/(m_1 + m_2)$ . Rotación en torno al centro de masa con su velocidad angular  $\omega = v_0/d$ . (b)  $S = \mu v_0^2/d$  donde  $\mu$  es la masa reducida:  $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ .
- 9-17. (a)  $(\frac{35}{36})(ML^2/3)$ . (b)  $ML^2/3$ .
- 9-19.  $R/\sqrt{2}$ ,  $L/\sqrt{3}$ ,  $L/\sqrt{12}$ .
- 9-21. (a)  $28 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ . (b) 0.
- 9-23. (a)  $p_x = 50\sqrt{3}$ ,  $p_y = 50 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$   
 (b)  $l = -50(4\sqrt{3} - 3) \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ .

- 9-25. (a)  $l_x = -21$ ,  $l_y = -9$ ,  $l_z = 13$ ,  $l = \sqrt{691}$   
 (b)  $d = \sqrt{691}/\sqrt{14}$   
 (c) El momento cinético es nulo respecto a cualquier punto de la línea de movimiento.
- 9-33. (a)  $L_x = 6$ ,  $L_z = -4$ ,  $L = \sqrt{52} \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$  · (b) No.
- 9-35 No. Si.
- 9-37.  $\tau_x = -13$ ,  $\tau_y = 14$ ,  $\tau_z = 4$ ,  $\tau = 19,5 \text{ N}\cdot\text{m}$ ,  $\cos \theta_x = -0,665$ ;  
 $\cos \theta_y = 0,72$ ;  $\cos \theta_z = 0,205$ .
- 9-41. No.
- 9-43. Sí.

## CAPÍTULO 10

- 10-1.  $\rho = 3g/4\pi RG = 5450 \text{ kg}/\text{m}^3 = 5,45 \text{ g}/\text{cm}^3$ .
- 10-5. (a)  $F = Gm^2/4r^2 = 0,04 \text{ N}$   
 (b)  $V = 0,0752 \text{ J}$   
 (c)  $v = 1,26 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$
- 10-7.  $v = \sqrt{GM/R} = 7900 \text{ m/s}$ ,  $T = 2\pi R/v = 5080 \text{ s}$ ,  $t = 255 \text{ s}$ .
- 10-9. (a) 7760 km. (b)  $e = 0,134$   
 (c)  $H = -GMm/2a = -mgR^2/2a = -3,88 \cdot 10^8 \text{ J}$   
 (d)  $v_a = 6,3 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ , (e)  $v_p = 8,2 \cdot 10^3 \text{ m/s}$   
 (f)  $l = 8,3 \cdot 10^{11} \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ .
- 10-11.  $v = \sqrt{GM/R}$
- 10-13. (a)  $H_A/H_B = 4$ , pero obsérvese que A tiene la energía total mayor.  
 (b)  $T_A/T_B = 1/8$ .
- 10-17.  $H = -GMm/2r$ ,  $l = m\sqrt{GMr} \sin \phi$ ,  $a = r$ ,  $b = r \sin \phi$ .  
 $\cos \theta_1 = -\cos \phi$ , donde  $r = R_{\text{tierra}} + 320 \text{ km}$
- 10-19.  $r \leq 5,7 \cdot 10^{-12} \text{ cm}$ .
- 10-21. (a)  $\sigma = 2,55 \cdot 10^{-12} \text{ cm}$ . (b)  $n = 3,9 \cdot 10^{18}$ . (c)  $t = 2,65 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$ .

## CAPÍTULO 11

- 11-1.  $x' = 2 \text{ m}$ ,  $y' = 5 \text{ m}$ ;  $x' = -2 \text{ m}$ ,  $y' = +5 \text{ m}$ .
- 11-3. (a)  $E' = 22 \text{ J}$ ,  $E = 110 \text{ J}$   
 (b)  $E' = 22 \text{ J}$ ,  $E = 198 \text{ J}$   
 (c)  $E' = 22 \text{ J}$ ,  $E = 22 \text{ J}$   
 (d) Hacia atrás con  $v' = 2 \text{ m/s}$ .

$$11-5. \quad \operatorname{tg} \theta' = \frac{v \operatorname{sen} \theta}{v \cos \theta - V} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1}, \quad \theta' \simeq 54^\circ.$$

$$11-7. \quad (a) \quad V = \frac{m_a}{m_a + m_b} v_a.$$

$$(b) \quad v_a^* = \frac{m_b}{m_a + m_b} v_a, \quad v_b^* = -\frac{m_a}{m_a + m_b} v_a.$$

$$(c) \quad v_a^{*'} = -\frac{m_b}{m_a + m_b} v_a, \quad v_b^{*'} = \frac{m_a}{m_a + m_b} v_a.$$

$$(d) \quad v_a' = \frac{m_a - m_b}{m_a + m_b} v_a, \quad v_b' = \frac{2m_a}{m_a + m_b} v_a.$$

$$(e) \quad E_a^{*'} = \left( \frac{m_a m_b}{m_a + m_b} \right)^2 \frac{v_a^2}{2m_a}, \quad E_b^{*'} = \left( \frac{m_a m_b}{m_a + m_b} \right)^2 \frac{v_a^2}{2m_b};$$

$$E_a' = \left( \frac{m_a - m_b}{m_a + m_b} \right)^2 \frac{m_a v_a^2}{2}, \quad E_b' = \frac{4m_a m_b}{(m_a + m_b)^2} \frac{m_a v_a^2}{2}.$$

11-9. La energía perdida es  $E^*$  (véase problema 8).

11-15. (a) Hacia la parte trasera del tren. (b)  $t = \sqrt{2h/g} \simeq 0,43$  s.  
Caerá 28 cm, detrás de la vertical del punto del tren desde donde se soltó la moneda.

11-17. La fuerza de interacción del movimiento es la fuerza del resorte  $F_x = -Kx$ . Fuerza de inercia  $-ma$  de igual dirección y sentido contrario que la aceleración. (b)  $x_{\max} = 2ma/K$ . (c) Movimiento armónico. Amplitud  $x_0 = ma/K$ . (d)  $2ma - ma \cos \omega t$ .

11-19. (a) Fuerzas de interacción: gravedad y tensión del hilo. Fuerza de inercia:  $mg \operatorname{sen} \theta$  de igual dirección y sentido contrario que la aceleración del coche. (b)  $mg \operatorname{sen} \theta$ ,  $s \operatorname{sen} \alpha$ ,  $-mg \operatorname{sen} \theta$  (c)  $\alpha = 0$ . (d)  $mg \cos \theta$ . (e) Oscilatorio. (f)  $T = 2\pi\sqrt{l/g \cos \theta}$ , amplitud  $\theta$ .

11-21.  $T = 2\pi\sqrt{R^3/GM} = T_0$ , donde  $T_0$  es el periodo orbital.

11-25. (a)  $F_r = -GmM/R^2 = -m\omega^2 R$ . (b)  $m\omega^2 r$ , donde  $R$  y  $r$  son las distancias del centro de la Tierra al objeto y al origen del sistema de coordenadas del satélite, respectivamente. (c) No. Sólo cuando el objeto está en el centro del sistema de coordenadas.

11-29.  $f = (1/2\pi)\sqrt{g/R} \simeq 0,2$  rev/s = 12 rpm.

11-31.  $v' = g/2\omega \simeq 6,75 \cdot 10^4$  m/s.

11-33.  $v' \simeq \omega R/2$ .

11-35.  $2m\omega v' \operatorname{sen} \lambda \simeq 195$  N

11-37.  $x = (\omega g/3)(2h/g)^{3/2}$ .

11-39. (a)  $F_r = -[(GmM/R^3) - m\omega^2]r$ .

(b)  $T = \pi\sqrt{R^3/(GM - R^3\omega^2)}$ .

(c)  $|F_c| = 2m\omega R\sqrt{(GM/R^3) - \omega^2}$ .

## CAPÍTULO 12

12-1. 6, 5.

12-3. Circular, con  $v = 12,3$  m/s.12-5. (a)  $V_x = 3$  m/s,  $V_y = 0$ ,  $\omega = 0$ .(b)  $V_x = 1,5$  m/s,  $V_y = 0$ ,  $\omega = -1,5$  s<sup>-1</sup>.(c)  $V_x = 2$  m/s,  $V_y = 0$ ,  $\omega = -1$  s<sup>-1</sup>.(d)  $V_x = 3$  m/s,  $V_y = 3$  m/s,  $\omega = -1$  s<sup>-1</sup>.12-9. (a)  $a_x = a_y = 3F/m$ . (b)  $a_x = 7F/2m$ ,  $a_y = F/2m$ .(c)  $a_x = a_y = 2F/m$ . (d)  $a_x = 29F/2m$ ,  $a_y = 27F/2m$ .12-13. Un punto a la distancia  $L/6$  del centro, medida hacia el extremo libre.

12-15. 4 : 1.

12-17. (a)  $V = A \Delta t = F \Delta t / [M + (4mk^2/r^2)]$ , donde  $M$  es la masa del carrito incluídas las ruedas.  $M_{ef} = M + 4mk^2/r^2$ .(b)  $V^2 = 2F \Delta x / [M + (4mk^2/r^2)]$ .  $M_{ef}$  como en el apartado (a).12-19. (a)  $a = -4g/5$ . (b)  $T = mg/5$ . (c)  $v = 4\sqrt{gR}$ .12-21.  $h = \pi^2 R^2 g / 8V^2$ .

12-23. Si el impulso se aplica a la derecha del centro de masa, dicho punto se hallará a la izquierda de éste. Al aproximar la recta de acción del impulso al centro de masa, el punto se aleja y se hallaría en el infinito si el impulso pasara por el centro de masa. Si el impulso se aplicara a la izquierda del centro de masa, el punto estaría a la derecha y sucede lo mismo que en el caso anterior.

12-25. No necesariamente.

12-27. Sí.

12-29. (a)  $V' = V/2$ . (b)  $\omega' = V/3R$ . (c)  $\omega' = 0$ . (d)  $E = MV^2/2$ .12-31. (a)  $V_b^2 = 8gR/3$ ,  $\omega = V_b/R$ . (b)  $V_c^2 = 8gR/3 + 4gR$ ,  $\omega = V_b/R$ .12-33. 
$$a_{\max} = \frac{g(\mu \cos \theta - \sin \theta)}{(k_o / MR^2) + 1}$$
12-35. (a)  $ML^2/3$ . (b)  $2MR^2$ . (c)  $3MR^2/2$ . (d)  $3MR^2/2$ .12-37.  $T = 2\pi\sqrt{ML^2/3Kd^2}$ .12-39.  $x = (24\sqrt{5/3}\sqrt{94}) R$  desde el punto fijo.12-41. (a)  $T_a/T_b = 2$ .12-43.  $V_{\max}^2 = 4\sqrt{2} gd/3$ .12-45. (b) 7,2 kp (c)  $F_x = -7,2$  kp,  $F_y = 25$  kp.12-47.  $T = 57,5$  kp.12-49.  $\mu = \sqrt{3}/8$ .12-51.  $\mu = 1/3$ .

CAPÍTULO 13

- 13-1. (a)  $l_1 = l_z = m_1 \omega d^2$ ,  $l_2 = l_z = -m_2 \omega d^2/2$ .  
 Total  $|l| = \sqrt{l_x^2 + l_z^2}$ .  
 (b)  $\Delta l_{2z} = m_2 \omega d^2(4 - \sqrt{2})/8$ ,  $\Delta l_{2z} = -m_2 \omega d^2/4\sqrt{2}$ ,  $\Delta l_2 = -\Delta l_1$ .  
 (c) El mismo.  
 (d)  $\tan \theta = m_2(4 - \sqrt{2})/(8m_1 + m_2\sqrt{2})$  donde  $\theta$  es el ángulo que forma  $l_1$  con el eje  $z$  en el plano  $xz$ .
- 13-3. (a)  $l_z = mR^2\omega/2$ ,  $l_x = mR^2\omega/2$ . (b)  $\Delta l_x = mR^2\omega$ .  
 (c)  $|l| = \sqrt{5} mR^2\omega/2$ .
- 13-5.  $\Omega = 2gd/R^2\omega \simeq 0,37 \text{ s}^{-1}$ .
- 13-7. Desviación angular  $\Delta\theta = \tau\Delta t/l \simeq 0,13$  (7,6°).
- 13-9.  $|l| = \sqrt{(I_0\omega)^2 + (mv d)^2}$ , donde  $I_0 = mR^2/2$  y  $v = \sqrt{2gd}$ .
- 13-11.  $\omega_2 < gd/2k^2\omega_1$ .
- 13-13. (a)  $mR^2/2$ ,  $m[(R^2/4) + (d^2/12)]$ ;  $4mr^2/5$ ,  $2mR^2 + (4mr^2/5)$ , donde  $2R$  es la distancia que separa las esferas de radio  $r$  y masa  $m$ .  
 (b)  $d = \sqrt{3} R$ .
- 13-15. (a)  $-y = 40 \text{ cm}$ .  
 (b)  $L_x = 40,8 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ ,  $L_y = -7,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$  en el instante dado.
- 13-17. (a) Dirección vertical.  
 (b)  $\omega \sin \theta$  y  $\omega \cos \theta$ .  
 (c)  $l = (Md^2/3) \omega \sin \theta$  en el plano vertical normal a la barra.  
 (d)  $(Md^2/3) \omega^2 \sin \theta \cos \theta$ .

CAPÍTULO 14

- 14-1. (a) Baja en la región  $0 - 100^\circ \text{ C}$ , alta en la región  $100 - 500^\circ \text{ C}$ .  
 (b)  $0^\circ$  y  $100^\circ \text{ C}$ .
- 14-5.  $m(T - 100) = 113\,000$ , donde  $m$  es la masa de cobre en gramos y  $T$  es su temperatura. Un kilogramo de cobre estaría a  $213^\circ \text{ C}$ .
- 14-9.  $200 \text{ s}$ .
- 14-11. (a)  $T = 83^\circ \text{ C}$ . (b)  $0,115 \text{ g/min}$ .
- 14-13. (a)  $dT/dr = -31,3^\circ/\text{cm}$ . (b)  $q = 0,0395 \text{ cal/cm}\cdot\text{s}$ .
- 14-17.  $\Delta T = (T_1 - T_2)e^{-t/\tau}$ ,  $\tau = Lmc/2KA$ .
- 14-19.  $363 \text{ W/m}^2$ .

## CAPÍTULO 15

- 15-1.  $m_m/m_0 = 1,52 \ n_0/n_m$ , donde  $n_0$  y  $n_m$  son enteros.  
 15-3.  $d = (M/N_0\rho)^{1/3}$  Con  $\rho = 1,43 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$  obtenemos  $d \simeq 3 \cdot 10^{-7}, 10^{-7}, 8 \cdot 10^{-6}, 3,5 \cdot 10^{-7} \text{ cm}$ .  
 15-5.  $2N_0; 6N_0; N_0/238$ , donde  $N_0 = 6 \cdot 10^{23}$ .  
 15-7.  $M/\rho \simeq 7,2 \text{ cm}^3$ .

## CAPÍTULO 16

- 16-1. (a)  $2mv$ .  
 (b)  $Nv/6l$  choques de moléculas contra cada pared por segundo.  
 (c)  $Nmv^2/3l, Nmv^2/3l, Nmv^2/3l^3$ .  
 (d)  $P = Nmv^2/3V$ .  
 (e)  $mv^2/2 = 3kT/2$ .  
 16-3. (a)  $2nmv^2 \cos^2 \phi$ . (b)  $(\sin \phi \, d\phi)/2$ .  
 16-5. (a) 1. (b) 4.  
 16-7.  $4,7 \cdot 10^4, 9,95 \cdot 10^4, 3,66 \cdot 10^4 \text{ cm/s}$ .  
 16-9.  $E \simeq 10^{-46} \text{ erg}, kT = 4 \cdot 10^{-14} \text{ erg}$ .  
 16-11.  $1,5 \cdot 10^9 \text{ s}$  o sea unos 50 años.  
 16-13.  $l = 1/4\pi\sqrt{2}(r_1 + r_2)^2 n$ .  
 16-17. 0,014 independiente de la temperatura.  
 16-21.  $2 \cdot 10^{-6} \text{ dynas}$ .  
 16-23. (a)  $1,06 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}, 2,12 \cdot 10^{-27} \text{ s}^{-1}$ .  
 (b)  $n = 2,95 \cdot 10^{27}$ .  
 (c)  $1 + 0,34 \cdot 10^{-27} \text{ rev/s}$ .  
 16-29.  $r = 3\bar{v} \Delta t/4$ , donde  $\Delta t = 1 \text{ s}$   
 16-31. (a)  $3,1 \cdot 10^{-15} \text{ cm}^2$ . (b)  $1,1 \cdot 10^{-9} \text{ g}$ .

## CAPÍTULO 17

- 17-3. Trabajo total = calor absorbido total.  
 17-7.  $\Delta T \simeq 0,12^\circ \text{ C}$   
 17-9. (a) Nuevo volumen  $V_1 = V[1 + (mg/AP)]^{-1/\gamma}$ .  
 (b)  $V_2 = V[1 - (mg/AP)]^{-1/\gamma}$ .  
 (c) Trabajo de la gravedad  $(mg/A)(V - V_1)$  y  $(mg/A)(V_2 - V)$ ;  
 $T_1 = T[1 + (mg/AP)]^{(\gamma-1)/\gamma}$ ,  
 $T_2 = T[1 - (mg/AP)]^{(\gamma-1)/\gamma}$ ,  
 donde  $\gamma = \frac{7}{5}$  y  $P = RT/V$ .

- 17-11.  $P_2 = 5^{1/\gamma} = 5^{3/5} \simeq 2,62 \text{ atm.}$   
 17-13.  $\Delta Q = \mu C_p \Delta T = \frac{5}{2}(P_1 V_1 / T_1) \Delta T \simeq 1,9 \text{ cal (He) y}$   
 $\frac{7}{2}(P_1 V_1 / T_1) \Delta T \simeq 2,65 \text{ cal (O}_2\text{).}$   
 17-15.  $\omega_0 = \sqrt{(A^2/Vm)(\gamma_0 + \gamma_H)P}$  ( $\gamma_0 = \frac{7}{5}; \gamma_H = \frac{5}{3}$ ).

## CAPÍTULO 18

- 18-5. (a)  $T = 107^\circ \text{ C.}$  (b)  $T = 130,4^\circ \text{ C.}$   
 18-7. El segundo día.  
 18-11. (a)  $\sigma = L\rho a_0/2.$  (b)  $\Delta L = L^2\rho a_0/2Y.$   
 (c)  $\sigma = 3,9 \cdot 10^6 \text{ dynas/cm}^2, \Delta L = 3,9 \cdot 10^{-4} \text{ cm.}$   
 18-13.  $\sigma = \frac{\rho\omega^2}{3r} (R^3 - r^3).$   
 18-15. (a)  $d \simeq 2,3 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$   
 (b)  $K \simeq 4,6 \cdot 10^4 \text{ dynas/cm, } f_0 \simeq 3,34 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}.$   
 (c)  $1,35 \cdot 10^{-9} \text{ cm.}$   
 (d)  $597^\circ \text{C.}$   
 18-17.  $\kappa = 3(1 - 2\mu)/Y.$   
 18-19.  $1,5 \cdot 10^{-3} K \text{ cal.}$   
 18-23.  $\Delta L = 2 \cdot 10^{-2} \text{ cm, } F/A = 1,54 \cdot 10^9 \text{ dynas/cm}^2 \text{ for } Y_{\text{Fe}} = 10^{12}$   
 $\text{dynas/cm}^2.$

## CAPÍTULO 19

- 19-13.  $\oint P dV = \text{trabajo útil total y } \oint T dS = \oint dQ = \text{calor absorbido total.}$   
 19-17. (a)  $\Delta S_1 = \mu C_v \ln [1 - (\Delta T/T)].$   
 (b)  $\Delta S_2 = \mu C_v \ln [1 + (\Delta T/T)],$  donde  $\mu = \text{número de moles.}$   
 (c)  $\Delta S = -\mu C_v (\Delta T/T)^2 \simeq -1,4 \cdot 10^{-16} \text{ erg/}^\circ \text{K.}$   
 (d)  $X_1/X_2 \simeq 2,73.$   
 19-19. (a)  $g \simeq 2650 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-2}.$   
 (b)  $h_A \simeq 2,5 \cdot 10^5 \text{ cm (2,5 km), } h_{\text{He}} \simeq 1,06 \cdot 10^6 \text{ cm (10,6 km).}$   
 19-21. (a)  $6 \cdot 10^{23} \exp (-1,2 \cdot 10^{16}).$

## CAPÍTULO 20

20-1. (a) La barra vertical y por encima del eje será estable si  $\rho > \rho_0$ , donde  $\rho$  es la densidad de la madera y  $\rho_0$  la del agua. La barra vertical y por debajo del eje es inestable.

(b)  $\omega_0 = \sqrt{3g(\rho_0 - \rho)/2L\rho}.$

20-3.  $0^\circ$ .

20-5. (b) El globo se mueve en la dirección de la aceleración.

20-7.  $u = Q/2\pi\rho r$ .

20-11.  $u = \sqrt{2gh}$

20-13.  $a = 2A\rho gH/(m_0 + M_0)$ .

## CAPÍTULO 21

21-1. (a) 9 m/s (c)  $\frac{2}{3}$  s (d)  $2\sqrt{6}/9 \simeq 0,54$  s

21-3. (a)  $l_a = \frac{5}{3}l$ ,  $l_b = \frac{7}{3}l$ . (b)  $\sqrt{\frac{5}{7}}$ .

21-5. (a)  $6\sqrt{4,5} \simeq 12,7$  m/s (c)  $0,4\sqrt{4,5} \simeq 0,85$  n·s  
(d)  $\sqrt{m/K} = 0,47$  s

21-7.  $4,7 \cdot 10^3$ ,  $5 \cdot 10^3$ ,  $1,1 \cdot 10^3$ ,  $3,7 \cdot 10^3$  m/s

21-9. (a)  $\Delta t = \frac{2m(v_1 - v_2)}{A\rho c(v_1 + v_2)} \simeq 0,8 \cdot 10^{-4}$  s  
( $v_1 = 10$ ,  $v_2 = -2$  m/s).

(b)  $l > \frac{c \Delta t}{2} = \frac{m(v_1 - v_2)}{A\rho(v_1 + v_2)} \simeq 0,2$  m.

(c)  $V = v_1 + v_2 = 8$  m/s

21-13. (a)  $2,4 \cdot 10^3$  cm/s (b)  $\delta \simeq 0,07 \epsilon_0$ ,  $\theta \simeq 0,029 T_0$ .

## CAPÍTULO 22

22-3. (a)  $l = 10$  m. (b)  $u = +40$  m/s en los lados de delante,  $-40$  m/s en los lados de detrás. (d) Triángulo de altura 40 cm, base 1 m. La velocidad de las partículas es instantáneamente nula en todos los puntos.

22-5. (d)  $3/40$  J, 0.

22-7. (a)  $z_0 = 0,32$  cm para el acero,  $z_0 = 47$  cm para el aire.

(b)  $H = A\varrho \cdot cz_0^2/3t_0^2$ ,  $H = 1,3 \cdot 10^7 z_0^2$  erg para el acero.  
 $H = 1,5 \cdot 10^2 z_0^2$  erg para el aire.

(c) Sí.

22-9.  $y_0 = 0,25$  m,  $\lambda = 2$  m,  $c = 5$  m/s,  $f = 0,4$  s $^{-1}$ .

$F_0 = 0,3\pi$ ,  $R = 0,3 \pi^2$  W,  $h = 0,06 \pi^2$  J/m.

22-11.  $I = 27,3 \cdot 10^7$  erg·cm $^{-2}$ ·s $^{-1} = 27,3$  W·cm $^{-2}$ .

22-13.  $z_0 = 1,1 \cdot 10^{-7}$  cm.

22-15. (a)  $\omega_0 = \sqrt{K/m} = 40$  s $^{-1}$ .



- (b) La cuerda hace el efecto de una fuerza de rozamiento o freno  $F = -Ru = -5u$ , donde  $u$  es la velocidad.  
 (c)  $Q = \omega_0 m/R = 16$ .

### CAPÍTULO 23

- 23-1. (a)  $\epsilon_a = 1/2$ ,  $\epsilon_b = 1/8$  kg/m.  
 (b)  $u_t = 8/3$  m/s,  $u_r = 2/3$  m/s.  
 (d)  $8/9$  y  $1/9$ .
- 23-3.  $E_t/E_i \simeq 4/r \simeq 1,2 \cdot 10^{-3}$ .
- 23-5. (a) 82 J. (b) 82 J. (c) En (a).
- 23-7. (a)  $15/16$ ,  $1/16$ , (b) 1 s.
- 23-13. (a) Ondas progresivas a la izquierda de  $A$  y a la derecha de  $B$ . Onda estacionaria entre  $A$  y  $B$ .  
 (b)  $2D \cos \pi d/\lambda$ ,  $4A/\rho c p_m^2 \cos (2\pi d/\lambda)$ , donde  $A = \text{área}$ .  
 (c)  $2p_m$ .  
 (e)  $2p_m \sin \pi d/\lambda$ ,  $2p_m$ .
- 23-15. (a)  $1/2$  s (hacia arriba), 1 s (hacia abajo), etc.  
 (b)  $2/3$  s (hacia arriba),  $4/3$  s (hacia arriba), 1 s (hacia abajo), etc.  
 (c)  $1/4$  s (hacia arriba),  $3/4$  s (hacia arriba), 1 s (hacia abajo), etc.
- 23-17. (a)  $\lambda_a/\lambda_b = 1/2 \sqrt{2}$ . (b)  $f = 70/\sqrt{2}$  Hz.
- 23-19. (a)  $(2S/L)h^2$ . (b)  $c/2L$  veces por segundo.



## ÍNDICE ALFABÉTICO

- Absorción del calor, 454.
- Aceleración, 27, 37.
  - angular, 279.
  - centrípeta, 138.
  - instantánea, 27, 37.
  - media, 27, 37.
- Alcance de un proyectil, 133.
- Amortiguamiento, 233.
  - crítico, 235.
- Aniquilamiento de materia, 210, 211.
- ARISTARCO, 8, 10.
- ARISTÓTELES, 7.
- Arquímedes, principio de, 594.
- Átomo, 462.
  - de Rutherford, 305.
- AVOGADRO, A., 461, 462.
  
- Barómetro de Torricelli, 476.
- BERNOULLI, D., 468, 514.
- Bernoulli, teorema de, 604, 607.
- BLACK, J., 456.
- BOHR, N., 455, 558.
- BOLTZMANN, L., 468, 485, 565.
- Boltzmann, relación de, 584.
- BOYLE, R., 474, 476, 477, 478.
- Boyle-Mariotte, ley de, 474.
- BRAHE, TYCHO, 11, 514.
- British thermal unit, 443.
- BRUNO, GIORDANO, 11.
- Btu, 443.
  
- Caballo de vapor, 170.
- Caída de cuerpos, 30.
- Calibrado de un termómetro de gas, 437.
- Calidad, 235.
- Calor, 433, 442, 515.
- Calor, absorción del, 454.
  - circulación del, 578.
  - conducción del, 445, 502.
  - convección del, 445.
  - de fusión, 444.
  - de sublimación, 444.
  - de vaporización, 444, 548.
  - en trabajo, conversión del, 566.
  - equivalente mecánico del, 515.
  - específico, 440, 441, 456, 488.
    - — a presión constante, 522.
    - — a volumen constante, 489, 523.
    - — de los sólidos, 557.
    - — de un gas diatómico, 491, 494.
    - — — poliatómico, 491, 494.
    - — estudio cuántico del, 495.
    - — unidades de, 443, 489.
  - latente, 444, 456.
  - molar, 488.
    - — a presión constante, 490.
    - — a volumen constante, 489.
  - radiación del, 445, 453.
  - unidad de, 443.
  - y energía, 444.
- Calores específicos, 442.
  - — de los gases, 490.
  - — relativos, 442.
  - latentes de fusión, 444.
  - — de vaporización, 444.
  - molares de sólidos, 557.
- Caloría, 443.
  - grande, 443.
  - pequeña, 443.
- Calórico, 513.
- Campo, 143.
  - de velocidades, 600.

- Campo eléctrico, 143.  
 — electrostático, 143.  
 — gravitatorio, 143, 296.  
 — magnético, 145.  
 — newtoniano, 192.  
 — — energía de un, 192.  
 Cantidad de movimiento, 54, 317, 361.  
 — — componentes polares de la, 251.  
 — — conservación de la, 54, 62, 63, 100, 101, 103, 104, 108.  
 Cantidades escalares, 30.  
 — vectoriales, 30.  
 Cardan, suspensión, 420.  
 Cargas eléctricas, movimiento de, 142.  
 CARNOT, S., 568.  
 CAVENDISH, 18, 294.  
 Cavendish, experimento de, 72, 294.  
 Cefeida, 21.  
 Celeridad, 27, 188.  
 — más probable, 486, 487.  
 — media, 34, 486, 487.  
 Celeste, movimiento, 8.  
 CELSIUS, A. C., 434.  
 Centímetro de mercurio, 436.  
 Centro de masa, 61, 105, 107.  
 — — de un cuerpo rígido, 106.  
 — — movimiento del, 79, 118, 160, 172, 362, 402.  
 — — movimiento respecto al, 316.  
 — — rotación en torno al, 402.  
 — — sistema del, 316.  
 — — velocidad del, 62.  
 — de percusión, 384.  
 Cesión de energía en un choque, 203.  
 Ciclo, 519.  
 — de Carnot, 568.  
 — — rendimiento del, 568.  
 — frigorífico, 571.  
 — — rendimiento del, 571.  
 Ciencia, 5.  
 Circulación del calor, 578.  
 — lamelar, 600.  
 — turbulenta, 600.  
 Cizalladura, 556.  
 — módulo de, 557.  
 Clapeyron, diagrama de, 519.  
 Clasificación periódica de los elementos, 463.  
 CLAUSIUS, R., 468.  
 Coeficiente de dilatación lineal, 559.  
 — de Poisson, 555.  
 — de reflexión de la fuerza, 661.  
 — — de la presión, 661.  
 — — de la velocidad, 658.  
 — de rozamiento, 121.  
 — de transmisión de la energía, 659.  
 — — de la fuerza, 661.  
 — — de la presión, 661.  
 — — de la velocidad, 658.  
 — de viscosidad, 505.  
 — — de algunos gases, 506.  
 Cohete, movimiento de un, 91.  
 Componentes polares de la cantidad de movimiento, 250, 251.  
 Compresibilidad adiabática de un gas, 531.  
 — de un gas, 530.  
 — isotérmica de un gas, 531.  
 — lineal, 623.  
 Compresión isotérmica de un gas real, 539.  
 Condensación, 546.  
 Conducción del calor, 445, 502.  
 — — problema de la barra, 446.  
 Conductibilidad calorífica, 447, 448, 504, 505.  
 — — de algunos gases, 506.  
 Conservación de la cantidad de movimiento, 54, 62, 63, 100, 101, 103, 104, 108.  
 — de la energía, 182, 206, 513, 515.  
 — de la masa, 45, 461, 601.  
 — del momento cinético, 250, 257.  
 Constante de Boltzmann, 474.  
 — de los gases, 474.  
 Convección, 445, 453.  
 Conversión del calor en trabajo, 566.  
 Coordenadas en rotación, 337.  
 — polares, 140.  
 COPÉRNICO, NICOLÁS, 10, 12.  
 Copérnico, sistema de, 10.

- Coriolis, fuerza de, 344, 349, 350, 351.  
 Cortadura, 556.  
 — módulo de, 557.  
 Cosenos directores de un vector, 33.  
 COULOMB, 18, 142.  
 Coulomb, ley de, 142.  
 Cristal, 550.  
 Cuerda vibrante, 668.  
 Cuerpo negro, 454.  
 — rígido, 106, 359, 360.  
 — — centro de masa de un, 106.  
 — — ecuaciones del movimiento de un, 403.  
 — — equilibrio de un, 387.  
 — — estática de un, 387.  
 — — momento cinético de un, 420.  
 — — movimiento de un, 106, 402.  
 — — velocidad angular de un, 420.  
 — — en rotación, energía cinética de un, 426.  
 — — — momento cinético de un, 421.
- CHARLES, J., 474.  
 Choque, 53, 63, 108, 201, 374.  
 — elástico, 59, 109, 319, 512.  
 — — energía en el, 203.  
 — energía cinética en el, 201.  
 — explosivo, 59.  
 — inelástico, 59, 109, 202, 319, 512.  
 Choques moleculares, 496.  
 Chorro de partículas, 89.
- DALTON, J., 461, 462.  
 DEBYE, 558.  
 Deformación, 551.  
 DEMÓCRITO, 460.  
 Desarrollo de Fourier, 676.  
 Destello múltiple, 23, 25.  
 — repetido, 23, 25.  
 Diagrama de Clapeyron, 519.  
 — energético, 186, 187.  
 — — de una molécula, 207.  
 —  $P$ - $V$ , 519.  
 Diferencia vectorial, 33.  
 Difusión, 505.
- Dilatación lineal, coeficiente de, 559.  
 — térmica, 559.  
 Dispersión, 498.  
 — de Rutherford, 303.  
 Distribución de las celeridades, función de, 484.  
 — de Maxwell-Boltzmann, 483, 485, 487, 488.  
 DULONG, 557.  
 Dulong y Petit, ley de, 557.  
 Dyna, 66.
- Ebullición, 549.  
 Ecuación de estado, 476.  
 — — de van der Waals, 541.  
 — de la difusión, 453.  
 — de los gases, 474.  
 — de onda, 649.  
 — normalizada de van der Waals, 545.  
 Ecuaciones del movimiento, 361.  
 — — de un sólido, 403.  
 Efecto Joule-Thomson, 536.  
 EINSTEIN, 19, 36, 334, 336, 455, 558.  
 Eje principal, 416, 418.  
 Ejes principales, 416, 418, 424.  
 Elasticidad, 550.  
 Elementos químicos, 463.  
 Empuje, 594.  
 Energía, 180.  
 — cedida en un choque, 203.  
 — cinética, 60, 161, 319, 367.  
 — — de un cuerpo en rotación, 426.  
 — — en el choque, 201.  
 — coeficiente de transmisión de la, 659.  
 — conservación de la, 182, 206, 515.  
 — de una onda, 620, 624, 642.  
 — de un campo newtoniano, 192.  
 — en el choque elástico, 203.  
 — equipartición de la, 557.  
 — interna, 516, 520.  
 — — de un gas perfecto, 525.  
 — mecánica, 182.  
 — molecular, 433.  
 — no mecánica, 205.  
 — nuclear, 208.

- Energía potencial, 181, 182, 184, 189, 191, 194, 206.  
 — de una molécula, 207.  
 — — de un oscilador lineal, 221.  
 — química, 207.  
 — unidades de, 164.
- Entropía, 573, 576.  
 — e irreversibilidad, 588.  
 — y desorden, 588.  
 — y probabilidad, 580, 583.
- Eötvös, 47, 334.
- Equilibrio, 84.  
 — de un cuerpo rígido, 387.  
 — de un fluido, 593.  
 — estable, 218.  
 — térmico, 440, 441.  
 — traslatorio, 84, 85.
- Equipartición de la energía, 490, 493, 557.
- Equivalencia entre energía y calor, 516.  
 — principio de la, 334.
- Equivalente mecánico del calor, 515.
- Erq, 164.
- Escala absoluta de temperaturas, 435, 438.  
 — Celsius, 434.  
 — centigrada, 434.  
 — del termómetro de gas, 436.  
 — de temperaturas, 434.  
 — Fahrenheit, 434.  
 — termodinámica de temperaturas, 572.
- Escalares, 30.
- Esfuerzo, 551.  
 — cortante, 556.
- Espectro mecánico de frecuencias, 242.
- Estabilidad de la rotación, 426.
- Estadística de Maxwell-Boltzmann, 485, 487, 488.
- Estado de un gas, 476, 519.  
 — — perfecto, 522.
- Estados correspondientes, ley de los, 545.
- Estática, 84, 85.  
 — de un cuerpo rígido, 387.
- Estructura atómica de la materia, 460.
- Expansión libre, 522, 535, 577.
- Experimento de Cavendish, 72, 294.  
 — de Joule, 536.
- Experimento de Michelson-Morley, 36.  
 — de Rutherford, 305.  
 — de Torricelli, 477, 547.
- FAHRENHEIT, 434, 456.
- FARADAY, 18.
- Fase, 225.
- Fenómenos de transporte, 452, 502.
- Filosofía natural, 5.
- Física, 5.
- Fisión nuclear, 209.
- Fluido acelerado, 596.  
 — compresible, 607.  
 — en rotación, 599.  
 — equilibrio de un, 593.  
 — movimiento de un, 600.
- Flujo calorífico, 446, 452, 504, 578.  
 — — dependiente del tiempo, 450.
- Foucault, péndulo de, 352.
- FOURIER, J. B., 677.
- Fourier, desarrollo de, 676.
- Frecuencia, 645.  
 — característica, 224.  
 — ciclotrónica, 146.  
 — del oscilador, 224.  
 — de oscilación, 221.  
 — propia, 224, 668, 675, 676.
- Fuerza, 1, 64, 66, 109.  
 — central, 250.  
 — centrífuga, 344, 348.  
 — centripeta, 137.  
 — coeficiente de reflexión de la, 661.  
 — — de transmisión de la, 661.  
 — de contacto, 119.  
 — de Coriolis, 344, 349, 350, 351.  
 — de inercia, 322, 343.  
 — electrostática, 142.  
 — gravitatoria, 70, 143.  
 — instantánea, 67.  
 — magnética, 144.  
 — media, 66, 158.  
 — momento de una, 278.  
 — unidades de, 66.
- Fuerzas centrales, 191.  
 — conservativas, 183.

- Fuerzas exteriores, 364, 365.
  - interatómicas, 550.
  - no conservativas, 183.
  - que no trabajan, 165, 166.
  - superposición de, 116.
  - vivas, teorema de las, 163, 368.
- Función de distribución de celeridades, 484, 485, 487, 488.
  - — de Maxwell-Boltzmann, 485, 487, 488.
  - de onda, 674.
- Fusión, 443.
  - calor de, 444.
  - nuclear, 209.
- GALILEO, 1, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 290, 455, 514.
- Galileo, principio de, 312.
  - transformaciones de, 315.
- Gas, compresibilidad, 530.
  - — adiabática de un, 531.
  - — isotérmica de un, 531.
  - licuación de un, 537.
  - perfecto, energía interna de un, 525.
  - — estado de un, 522.
  - — transformaciones de un, 522, 525.
  - presión crítica de un, 540.
  - punto crítico de un, 540.
  - real, 538.
  - — compresión isotérmica de un, 539.
  - — isothermas de un, 539.
  - temperatura crítica de un, 540.
  - volumen específico crítico de un, 540.
- Gases perfectos, 516.
  - — constante universal de los, 474.
  - — ecuación de estado de los, 474.
- Gauss, teorema de, 602.
- GAY-LUSSAC, 536.
- Geocentrismo, 8, 10.
- Giro-péndulo, 414.
- Giroscopio, 410.
  - nutación del, 414.
- Gradiente de presión, 596.
  - de temperaturas, 446.
  - térmico, 446.
- Grado absoluto, 439.
  - Celsius, 434.
  - centigrado, 434.
  - Fahrenheit, 434.
  - Kelvin, 439.
- Gramo, 48.
- Gravedad, 132.
- Gravitación, 290.
  - ley de la, 298.
- GAY-LUSSAC, J., 461, 462, 474.
- Haces moleculares, 481, 498,
- HAMPSON, 537.
- Heliocentrismo, 8, 10.
- HELMHOLTZ H. von, 515.
- HENRY, 18.
- Hilo flexible, 87.
- Hiperestáticos, problemas, 388.
- Hipótesis de Avogadro, 462.
- Hooke, ley de, 551.
- Impedancia a las ondas, 658.
  - característica, 658.
  - — por unidad de superficie, 660.
- Impulso, 155, 156, 157, 158, 159, 160.
  - angular, 276, 277.
  - — instantáneo, 404.
  - central, 252.
  - instantáneo, 372, 404.
  - sobre un sistema, 160.
- Impulsos aplicados al eje, 407.
- Inercia, 42, 43.
  - fuerza de, 322.
  - fuerzas de, 343.
- Intensidad del campo, 143.
  - — gravitatorio, 143.
  - de un movimiento ondulatorio, 648.
- Interacción de dos cuerpos, 52.
  - de más de dos cuerpos, 62.
  - térmica, 440, 445.
- Interpretación cinética de la temperatura, 474.
- Isothermas de un gas real, 539.
  - de van der Waals, 542, 543, 545.

- JOULE, J. P., 444, 514, 536.  
 Joule; 164.  
 — Thomson, experimento de, 536.
- KELVIN, 438, 573.  
 KEPLER, J., 11, 291, 514.  
 Kepler, leyes de, 12, 291, 299.  
 Kilocaloría, 443.  
 Kilográmetro, 164.  
 Kilogramo, 48.  
 Kilopond, 67.
- LAVOISIER, A. L., 461.  
 Ley de Boyle-Mariotte, 474.  
 — de Coulomb, 142.  
 — de Dulong y Petit, 557.  
 — de Gay-Lussac, 462.  
 — de Hooke, 551.  
 — de la conservación de la masa, 461.  
 — de la gravitación, 298.  
 — de las atmósferas, 586.  
 — de las proporciones definidas, 461.  
 — — múltiples, 460.  
 — — múltiplo, 461.  
 — de los estados correspondientes, 545.  
 — de los gases, 475.  
 Leyes de Kepler, 12, 291, 299.  
 — de Newton, 69.  
 Licuación de los gases, 537.  
 LINDE, 537.  
 Líneas de corriente, 600.  
 Longitud, 18.  
 — de onda, 646, 665.  
 — equivalente de un péndulo, 383.  
 — reducida de un péndulo, 383.
- Magnitud de un vector, 32, 33.  
 Máquina frigorífica, 570.  
 Mareas, 329.  
 Masa, 44, 71.  
 — asociada a la energía, 46, 47.  
 — atómica, 464.  
 — conservación de la, 45, 461.  
 — -energía, 209.  
 — en reposo, 47.
- Masa inerte, 42, 44, 70, 71, 72, 334.  
 — molecular, 464.  
 — — gramo, 464.  
 — pesante, 70, 71, 295, 334.  
 — reducida, 228.  
 — unidades de, 48.  
 MAXWELL, 18, 468, 483, 485.  
 Maxwell-Boltzmann, distribución de, 483, 485, 487, 488.  
 MAYER, J., 444, 514.  
 Mecánica cuántica, 455.  
 Metro, 19.  
 Mezcla de dos gases, 579.  
 Michelson-Morley, experimento de, 36.  
 Modelo atómico, 304.  
 Modos normales de una cuerda, 672.  
 Módulo de cizalladura, 557.  
 — de cortadura, 557.  
 — de rigidez, 557.  
 — de un vector, 32, 33.  
 — de Young, 550, 552.
- Mol, 464.  
 Molécula, 462.  
 — diagrama energético de una, 207.  
 — energía potencial de una, 207.  
 Moléculas diatómicas, 491, 494.  
 — poliatómicas, 491, 494, 495.  
 — tamaño de las, 466.
- Momento, 276, 278.  
 — centrífugo, 416.  
 — cinético, 249, 252, 264, 361, 408.  
 — — conservación del, 250, 257.  
 — — de la peonza, 412.  
 — — de rotación, 273, 274, 402.  
 — — de una partícula, 404.  
 — — de un cuerpo rígido, 420.  
 — — de un sólido en rotación, 421.  
 — — en dos dimensiones, 403.  
 — — en tres dimensiones, 403.  
 — — orbital, 273, 274.  
 — — total, 271, 281.  
 — — unidades del, 254.  
 — — de inercia, 258, 262.  
 — de una fuerza, 278.  
 — resultante, 281.



- Móvil perpetuo de 1.<sup>a</sup> especie, 206, 520.  
 — — de 2.<sup>a</sup> especie, 565, 572.
- Movimiento, 7.  
 — armónico, 142, 220.  
 — browniano, 470.  
 — celeste, 8.  
 — circular, 135.  
 — de cargas eléctricas, 142.  
 — del centro de masa, 79, 118, 160, 171, 172, 362, 402.  
 — de rotación, 360.  
 — de traslación, 106, 360.  
 — de un cuerpo rígido, 106, 402.  
 — — — ecuaciones del, 403.  
 — de un fluido, 600.  
 — de un proyectil, 131.  
 — ecuaciones del, 361.  
 — en el espacio, 189.  
 — forzado, 236, 678.  
 — lunar, 327.  
 — perpetuo, 60, 206.  
 — planetario, 327.  
 — plano, 189, 366.  
 — respecto al c.d.m., 316.  
 — uniformemente acelerado, 29.  
 — vertical, 72.  
 — vinculado, 166.
- NEWTON, 1, 11, 13, 18, 71, 290, 514.
- Newton, 66.  
 — primera ley de, 69.  
 — segunda ley de, 69.  
 — tercera ley de, 69.
- Nodos, 665.
- Núcleo, 305.
- Número de Avogadro, 464.
- Nutación, 411, 413.  
 — de la peonza, 414.  
 — del giroscopio, 414.
- Onda armónica, 645.  
 — — intensidad de una, 648.  
 — — progresiva, 646.  
 — descripción matemática de una, 643.  
 — ecuación de, 649.
- Onda, función de, 674.  
 — longitud de, 646.  
 — longitudinal, 616, 621, 626, 629, 641.  
 — sonora, 641.  
 — transversal, 616, 617, 641.
- Ondas de fuerza, 660.  
 — estacionarias, 664.  
 — — descripción matemática de, 666.  
 — reflexión de las, 655.  
 — progresivas, 665.  
 — superposición de, 636.
- Órbitas, 300.
- Oscilaciones, 217.  
 — características, 672.  
 — — en 2 dimensiones, 674.  
 — — en 3 dimensiones, 674.  
 — degeneradas, 676.  
 — forzadas, 236, 678.  
 — libres amortiguadas, 233.  
 — transitorias, 236.
- Oscilación forzada de una cuerda, 678.
- Oscilador armónico, 217, 219.  
 — de dos cuerpos, 228.  
 — gobernado por la masa, 238.  
 — — por la rigidez, 237.  
 — lineal, 217, 219, 221, 236.  
 — energía potencial de un, 221.  
 — no lineal, 220.  
 — «partícula en caja», 220.  
 — «pozo cuadrado», 220.
- Paralaje, 8, 10.
- Par de fuerzas, 364, 407.
- PASCAL, 476, 477.
- Péndulo, 381.  
 — de Foucault, 352.  
 — longitud equivalente de un, 383.  
 — — reducida de un, 383.  
 — simple, 227.
- Peonza, 411.  
 — momento cinético de la, 412.  
 — nutación de la, 414.
- Percusión, centro de, 384.
- Período, 645.  
 — del oscilador, 224.

- Período de oscilación, 221, 234.  
 — propio, 668.  
 Perturbaciones, 294.  
 Peso, 47, 72.  
 PETIT, 557.  
 PLANCK, M., 454, 558.  
 Poisson, coeficiente de, 555.  
 Postulado de Einstein, 334.  
 Potencia, 170.  
 — unidades de, 170.  
 Precesión, 410.  
 Presión, 593, 595.  
 — atmosférica, 476.  
 — coeficiente de reflexión de la, 661.  
 — — de transmisión de la, 661.  
 — crítica, 540.  
 — del vapor de agua, 548.  
 — de un gas, 435, 470.  
 — de vapor saturante, 547, 548.  
 — gradiente de, 596.  
 — reducida, 545.  
 Primera ley de Newton, 69.  
 Primer principio de la Mecánica, 312.  
 — — de la Termodinámica, 206, 518.  
 Principio de Arquímedes, 594.  
 — de conservación de la masa, 461.  
 — de equipartición de la energía, 491, 494.  
 — de Galileo, 312.  
 — de la equivalencia, 334.  
 — de la inercia, 312.  
 — de superposición, 116, 636, 640, 656.  
 — — de las fuerzas, 69.  
 Probabilidad de un estado, 580.  
 Problemas hiperestáticos, 388.  
 Producto escalar, 38, 170.  
 — vectorial, 267.  
 Propagación, velocidad de, 614, 617, 629.  
 Proporciones definidas, ley de las, 461.  
 — múltiples, ley de las, 460, 462.  
 — múltiplo, ley de las, 461.  
 PROUST, J. L., 461.  
 Proyectoil, alcance de un, 133.  
 — movimiento de un, 131.  
 Punto crítico, 540, 544.  
 Puntos fijos, 455.  
 Quantum de energía, 455.  
 Radiación calorífica, 453.  
 — del calor, 445.  
 — térmica, 453.  
 Radio de giro, 264.  
 RAYLEIGH, LORD, 465.  
 Recorrido libre medio, 496, 497.  
 — — — medida del, 499.  
 Red cristalina, 550.  
 Reflexión de la fuerza, coeficiente de, 661.  
 — de la presión, coeficiente de, 661.  
 — de las ondas, 655.  
 — de la velocidad, coeficiente de, 658.  
 Relación de Boltzmann, 584.  
 Relámpago múltiple, 23, 25.  
 Relatividad, 36, 46, 209, 210.  
 — generalizada, 334, 336.  
 — restringida, 19.  
 Rendimiento del ciclo de Carnot, 568.  
 — — frigorífico, 571.  
 Resonancia, 238, 678.  
 Resta vectorial, 33.  
 Reversibilidad, 211, 565.  
 Rigidez, 556.  
 — módulo de, 557.  
 Rodadura, 375.  
 — rozamiento por, 376.  
 Rotación alrededor de un eje, 379.  
 — bidimensional, 403.  
 — de la peonza, 412.  
 — de un cuerpo rígido, 421.  
 — en torno al c.d.m., 402.  
 — estabilidad de la, 426.  
 — movimiento de, 360.  
 — terrestre, 348.  
 Rozamiento, 120.  
 — coeficiente de, 121.  
 — estático, 120, 121.  
 — por deslizamiento, 121.  
 — por rodadura, 376.  
 RUMFORD, conde de, 514.  
 RUTHERFORD, 304.

- Rutherford, átomo de, 305.  
— dispersión de, 303.
- Salida de un gas por un orificio, 479.
- Sección eficaz, 499.
- Segunda ley de Newton, 69.
- Segundo principio de la Termodinámica, 564, 582.
- Sistema acelerado, 321.  
— C, 316.  
— cgs, 66.  
— de Copérnico, 10.  
— del centro de masa, 316.  
— del laboratorio, 316.  
— de Tolomeo, 12.  
— de Tycho Brahe, 11.  
— en rotación, 337.  
— Giorgi, 66.  
— inercial, 314.  
— — movimiento respecto a un, 314.  
— L, 316.  
— terrestre, 66.
- Sistemas de fuerzas equivalentes, 363.
- Sólido en rotación, momento cinético de un, 421.
- Sólidos elásticos, 550.
- Sonido, velocidad del, 627, 631.
- Spin, 273, 274, 402.
- Steiner, teorema de, 379.
- Suma vectorial, 32.
- Superficies equipotenciales, 191, 200.
- Superposición de las fuerzas, 69, 76, 78, 116.  
— de ondas, 636.  
— principio de, 116, 656.
- Suspensión Cardan, 420.
- Sustracción vectorial, 33.
- Tabla periódica de los elementos, 463.
- Tamaño de las moléculas, 466.
- Tamaños atómicos, 466.
- Temperatura, 433, 434.  
— absoluta, 438.  
— crítica, 540.  
— interpretación cinética de la, 474.
- Temperatura Kelvin, 438.  
— reducida, 545.
- Tensión, 87.
- Teorema de Bernoulli, 604, 607.  
— — aplicaciones del, 608.  
— de Gauss, 602.  
— de las fuerzas vivas, 163, 368.  
— de Steiner, 379.
- Teoría atómica de la materia, 460.  
— cinética, 468.  
— — de los gases, 469.  
— de Dalton, 460.
- Tercera ley de Newton, 69.
- Termodinámica, primer principio de la, 206.
- Termómetro, 434.  
— Celsius, 455.  
— de gas, 435.  
— — calibrado de un, 437.  
— Fahrenheit, 455.
- THOMPSON, B., 514.
- THOMSON, WILLIAM, 438.
- Tiempo, 18.  
— de relajación, 480.  
— de retardo, 643.  
— de tránsito, 188.
- TOLOMEO, 8.
- Tolomeo, sistema de, 12.
- TORRICELLI, E., 476.
- Torricelli, experimento de, 477, 547.
- Trabajo, 155, 161, 162, 165, 169, 171.  
— unidades de, 164.
- Transformación adiabática, 526.  
— a presión constante, 522.  
— a temperatura constante, 525.  
— cerrada, 519.  
— isobárica, 522.  
— isotérmica, 525.
- Transformaciones cuasi-estáticas, 565.  
— de Galileo, 315.  
— de un gas perfecto, 522, 525.  
— irreversibles, 522.  
— reversibles, 522, 565.
- Transmisión de la energía, coeficiente de, 659.

- Transmisión de energía por ondas, 648.  
 — de la fuerza, coeficiente de, 661.  
 — de la presión, coeficiente de, 661.  
 — de la velocidad, coeficiente de, 658.  
 Transporte, fenómenos de, 502.  
 Traslación, 402.  
 — movimiento de, 106, 360.  
 Trayectoria, 150.  
 Triangulación, 21.  
 Tubo de corriente, 602.  
 TYCHO BRAHE, 11, 514.  
 Tycho Brahe, sistema de, 11.  
  
 Ultrasonidos, 242.  
 Unidad de calor, 443.  
 Unidades de calor específico, 443, 489.  
 — de conductibilidad calorífica, 447.  
 — de energía, 164.  
 — de fuerza, 66.  
 — del momento cinético, 254.  
 — de masa, 48.  
 — de potencia, 170.  
 — de trabajo, 164.  
 — sistema cgs de, 66.  
 — — Giorgi de, 66.  
 — — terrestre de, 66.  
  
 Vacío, 478.  
 Valores reducidos, 545.  
 VAN DER WAALS, 541.  
 Van der Waals, ecuación de estado de, 541.  
 — — — normalizada de, 545.  
 Vapor de agua, presión del, 548.  
 — saturante, presión de, 547.  
 Vaporización, 443, 546.  
 — calor de, 444, 548.  
 Variables de estado, 476.  
  
 Variación del momento cinético, 404.  
 Vector, 30.  
 — cosenos directores de un, 33.  
 — de posición, 32.  
 — libre, 32.  
 — magnitud de un, 32, 33.  
 — módulo de un, 32, 33.  
 — velocidad angular.  
 Velocidad, 23, 34.  
 — angular, 141.  
 — — de un cuerpo rígido, 420.  
 — — vectorial, 420.  
 — areolar, 256.  
 — coeficiente de reflexión de la, 658.  
 — — de transmisión de la, 658.  
 — cuadrática media, 473, 478, 486, 487.  
 — crítica, 135, 137.  
 — del centro de masa, 62.  
 — del sonido, 627, 631.  
 — de propagación, 614, 617, 629.  
 — instantánea, 146.  
 — media, 34, 35.  
 — orbital, 135, 137.  
 — radial, 141.  
 — relativa, 35, 36.  
 Velocidades moleculares, 478.  
 Vibraciones moleculares, 231.  
 — térmicas, 242.  
 — ultrasónicas, 242.  
 Vida de un oscilador, 234.  
 Viscosidad de un gas, 505.  
 Volumen específico crítico, 540.  
 — molar, 464.  
 — reducido, 545.  
  
 Watt, 170.  
  
 Young, módulo de, 550.

# ÍNDICE GENERAL

	Págs.
<b>CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>5</b>
1-1  Ámbito de la Física.....	5
1-2  Movimiento; breve introducción histórica.....	7
1-3  Longitud y tiempo.....	18
1-4  Velocidad y aceleración.....	23
Problemas.....	40
 <b>CAPÍTULO 2. MASA INERTE.....</b>	 <b>42</b>
2-1  Experimentos exploratorios.....	42
2-2  Medida de la masa inerte.....	44
2-3  Unidad de masa.....	48
Problemas.....	49
 <b>CAPÍTULO 3. CANTIDAD DE MOVIMIENTO Y FUERZA—I.....</b>	 <b>51</b>
3-1  Experimentos de choque exploratorios.....	52
3-2  Cantidad de movimiento.....	54
3-3  Conservación de la cantidad de movimiento.....	54
3-4  Choque perfectamente elásticos y totalmente inelásticos.....	59
3-5  Centro de masa.....	61
3-6  Conservación de la cantidad de movimiento durante un choque....	63
3-7  Fuerza.....	64
3-8  Fuerza gravitatoria.....	70
3-9  Fuerza en un resorte.....	75
3-10 Principio de superposición de las fuerzas.....	76
3-11 Movimiento del centro de masa.....	79
3-12 Fuerza originada por un chorro de partículas. Movimiento de un cohete.....	89
Problemas.....	93
 <b>CAPÍTULO 4. CANTIDAD DE MOVIMIENTO Y FUERZA—II.....</b>	 <b>100</b>
4-1  Conservación de la cantidad de movimiento.....	100
4-2  La fuerza es un vector.....	109
4-3  Análisis de un experimento.....	111

	Págs.
4-4 Principio de superposición.....	116
4-5 Movimiento del centro de masa.....	118
4-6 Fuerza de contacto.....	119
Problemas.....	124
CAPÍTULO 5. EJEMPLOS DE FUERZAS Y MOVIMIENTO—I.....	131
5-1 Movimiento de proyectiles.....	131
5-2 Movimiento circular.....	135
5-3 Movimiento de partículas cargadas eléctricamente.....	142
5-4 Fuerza dependiente del tiempo.....	146
Problemas.....	151
CAPÍTULO 6. IMPULSO Y TRABAJO.....	154
6-1 Impulso de una fuerza.....	156
6-2 Trabajo de una fuerza.....	161
Problemas.....	172
CAPÍTULO 7. ENERGÍA.....	180
7-1 Energía potencial.....	181
7-2 Ejemplos. Diagramas energéticos.....	185
7-3 Energía potencial—movimiento en un plano y en el espacio.....	189
7-4 Superposición de energías potenciales.....	194
7-5 La energía cinética en los choques.....	201
7-6 Formas no mecánicas de la energía.....	205
Problemas.....	211
CAPÍTULO 8. EJEMPLOS DE FUERZAS Y MOVIMIENTO—II.....	217
8-1 Oscilaciones.....	217
8-2 Oscilador «pozo cuadrado» o «partícula en caja».....	220
8-3 Oscilador lineal.....	221
8-4 Oscilaciones pequeñas de un péndulo simple.....	227
8-5 Oscilador de dos cuerpos. Masa reducida.....	228
8-6 Vibraciones moleculares.....	231
8-7 Amortiguamiento de las oscilaciones libres.....	233
8-8 Movimiento forzado de un oscilador lineal.....	236
8-9 Espectro mecánico de frecuencias.....	242
Problemas.....	242
CAPÍTULO 9. MOMENTO CINÉTICO.....	249
9-1 Fuerza central ejercida sobre una partícula. Conservación del mo- mento cinético.....	250

	<u>Págs.</u>
9-2 Conservación del momento cinético de dos o más partículas que se ejercen interacciones en un plano.....	257
9-3 El momento cinético como vector.....	264
9-4 Momento cinético orbital y de spin.....	273
9-5 Impulso angular y momento.....	276
Problemas.....	283
 CAPÍTULO 10. EJEMPLOS DE FUERZAS Y MOVIMIENTO—III.....	 290
10-1 Ley de la Gravitación Universal.....	290
10-2 Propiedades de la interacción gravitatoria.....	295
10-3 Campo gravitatorio en el interior de una esfera homogénea.....	296
10-4 Deducción de la ley de la Gravitación a partir de la órbita elíptica de un planeta.....	298
10-5 Órbitas en el campo de fuerzas gravitatorio.....	300
10-6 Dispersión de Rutherford.....	303
Problemas.....	309
 CAPÍTULO 11. SISTEMAS MÓVILES DE COORDENADAS Y FUERZAS DE INERCIA.....	 312
11-1 Movimiento respecto a un sistema de coordenadas que se mueve con velocidad constante.....	314
11-2 Movimiento respecto al centro de masa.....	316
11-3 Movimiento respecto a un sistema de coordenadas acelerado.....	321
11-4 Fuerzas de inercia en los movimientos planetario y lunar.....	327
11-5 Movimiento respecto a un sistema de coordenadas en rotación.....	337
Problemas.....	353
 CAPÍTULO 12. EJEMPLOS DE FUERZAS Y MOVIMIENTO—IV.....	 359
12-1 Cinemática de un cuerpo rígido.....	360
12-2 Ecuaciones del movimiento.....	361
12-3 Movimiento en un plano.....	366
12-4 Rotación en torno a un eje fijo. Péndulo.....	379
12-5 Equilibrio (estática) de un cuerpo rígido.....	387
Problemas.....	391
 CAPÍTULO 13. EJEMPLOS DE FUERZAS Y MOVIMIENTO—V.....	 402
13-1 Variación del momento cinético de una partícula.....	404
13-2 Ejemplos de movimiento de cuerpos simétricos en rotación.....	407
13-3 Momentos centrífugos y ejes principales.....	416
13-4 Relación entre la velocidad angular y el momento cinético de un cuerpo rígido.....	420

	<u>Págs.</u>
Problemas.....	428
<b>CAPÍTULO 14. TEMPERATURA Y CALOR.....</b>	<b>433</b>
14-1 Temperatura.....	434
14-2 Termómetro de gas y escala absoluta de temperaturas.....	435
14-3 Equilibrio térmico. Calor específico. Calorimetría .....	440
14-4 Calor y energía.....	444
14-5 Conducción del calor.....	445
14-6 Flujo calorífico dependiente del tiempo.....	450
14-7 Otros mecanismos de transmisión del calor.....	453
14-8 Notas históricas.....	455
Problemas.....	456
<b>CAPÍTULO 15. ÁTOMOS Y MOLÉCULAS.....</b>	<b>460</b>
15-1 La ley de las proporciones múltiples y la teoría atómica de la materia según Dalton.....	460
15-2 Masas atómicas y moleculares.....	464
15-3 Número de Avogadro. Masas y tamaños de las moléculas.....	464
Problemas.....	467
<b>CAPÍTULO 16. TEORÍA CINÉTICA DE LOS GASES.....</b>	<b>468</b>
16-1 Primeras hipótesis.....	469
16-2 Presión de un gas e interpretación molecular de la presión y de la temperatura.....	470
16-3 Ecuación de estado de los gases perfectos.....	474
16-4 Velocidades moleculares. Experimentos de salida de un gas por un orificio y de haces moleculares.....	478
16-5 Distribución de Maxwell-Boltzmann.....	483
16-6 Calor específico.....	488
16-7 Choques entre moléculas. Recorrido libre medio. Experimento de dispersión.....	496
16-8 Fenómenos de transporte.....	502
Problemas.....	507
<b>CAPÍTULO 17. PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA.....</b>	<b>511</b>
17-1 Introducción.....	511
17-2 Energía interna y primer principio de la Termodinámica.....	516
17-3 Transformaciones de un gas perfecto.....	522
17-4 Compresibilidad de un gas.....	530
Problemas.....	532



CAPÍTULO 18. ALGUNAS PROPIEDADES DE LA MATERIA.....	535
18-1 Expansión libre de un gas. Efecto Joule-Thomson.....	535
18-2 Estudio experimental de un gas real.....	538
18-3 Ecuación de estado de van der Waals.....	541
18-4 Vaporización.....	546
18-5 Propiedades elásticas de los sólidos.....	550
18-6 Calor específico de los sólidos.....	557
18-7 Dilatación térmica.....	559
Problemas.....	560
CAPÍTULO 19. SEGUNDO PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA .....	563
19-1 Sentido de evolución de los acontecimientos en la Naturaleza.....	563
19-2 Transformaciones reversibles e irreversibles.....	565
19-3 Conversión del calor en trabajo.....	566
19-4 Escala termodinámica de temperaturas.....	572
19-5 Entropía.....	573
19-6 Entropía y probabilidad.....	580
Problemas.....	589
CAPÍTULO 20. MECÁNICA DE FLUIDOS.....	593
20-1 Equilibrio de un fluido.....	593
20-2 Descripción del movimiento de un fluido.....	600
20-3 Relación entre la velocidad y la distribución de la presión.....	604
20-4 Extensión del teorema de Bernoulli a un fluido compresible.....	607
20-5 Aplicaciones del teorema de Bernoulli.....	608
Problemas.....	610
CAPÍTULO 21. PULSOS ONDULATORIOS TRANSVERSALES Y LONGITUDINALES.....	614
21-1 Introducción.....	614
21-2 Pulsos ondulatorios transversales en un resorte.....	617
21-3 Pulsos ondulatorios longitudinales en un resorte estirado.....	621
21-4 Pulsos ondulatorios longitudinales en una barra maciza.....	626
21-5 Pulsos ondulatorios en una columna gaseosa.....	629
Problemas.....	633
CAPÍTULO 22. SUPERPOSICIÓN DE PULSOS ONDULATORIOS; ONDAS ARMÓNICAS..	636
22-1 Superposición lineal de ondas.....	636
22-2 Descripción matemática de una onda.....	643
22-3 Ondas armónicas.....	645

	<u>Págs.</u>
22-4 Ecuación de onda.....	649
Problemas.....	651
CAPÍTULO 23. REFLEXIÓN DE ONDAS Y OSCILACIONES CARACTERÍSTICAS. ....	655
23-1 Reflexión de las ondas.....	655
23-2 Ondas estacionarias.....	664
23-3 Frecuencias propias y períodos propios.....	668
23-4 Movimiento forzado y resonancia.....	678
Problemas.....	680
APÉNDICE A. VALORES APROXIMADOS DE ALGUNAS CONSTANTES FÍSICAS.....	687
APÉNDICE B. DATOS APROXIMADOS DEL SISTEMA SOLAR.....	688
APÉNDICE C. FUERZA GRAVITATORIA DE UNA ESFERA.....	689
APÉNDICE D. TRAYECTORIAS EN EL CAMPO GRAVITATORIO.....	691
APÉNDICE E. LISTA ALFABÉTICA DE ELEMENTOS.....	693
APÉNDICE F. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS NATURALES.....	695
RÉSULTADOS DE LOS PROBLEMAS IMPARES.....	697
ÍNDICE ALFABÉTICO.....	713

**L. D. Landau y E. M. Lifshitz**

# **MECÁNICA**

**VOLUMEN I DEL CURSO DE FÍSICA TEÓRICA**

*Un volumen de 228 páginas, de  $22 \times 16$  cm, con 54 ilustraciones*

Este primer volumen del «Curso de Física teórica» está dedicado, naturalmente a los fundamentos del tema, es decir, a la Mecánica clásica newtoniana.

Como en las otras ramas de la física teórica, su exposición no hace uso de la evolución histórica, pues empieza con los principios más generales: principio de la relatividad de Galileo y principio de la mínima acción de Hamilton. Realmente, sólo siguiendo esta evolución puede constituir la exposición un conjunto lógico y evitar definiciones repetidas de las magnitudes mecánicas fundamentales. Es también esencialmente más sencillo, y conduce al procedimiento más completo y directo de resolver los problemas de la Mecánica.

Este tomo contiene los problemas fundamentales de la Mecánica teórica: ecuaciones del movimiento y teoremas de conservación, movimiento del sólido y ecuaciones canónicas, y aborda los problemas clásicos de la teoría de los choques, así como la teoría de las pequeñas oscilaciones lineales y no lineales.

## **EXTRACTO DEL INDICE**

Capítulo I. Ecuaciones del Movimiento. — 1. Coordenadas generalizadas. — 2. El principio de la mínima acción. — 3. El principio de la relatividad de Galileo. — 4. Lagrangiana de una partícula libre. — 5. Lagrangiana de un sistema de partículas. Capítulo II. Teorema de conservación. — 6. Energía. — 7. Impetu. — 8. Centro de masa. — 9. Momento angular o cinético. — 10. Analogías mecánicas. Capítulo III. Integración de las ecuaciones del movimiento. — 11. Movimiento lineal. — 12. Determinación de la energía potencial en función del período de las oscilaciones. — 13. Masa reducida. — 14. Movimiento en un campo central. — 15. El problema de Kepler. Capítulo IV. Choque de partículas. — 16. Desintegración de partículas. — 17. Choques elásticos. — 18. Dispersión de partículas. — 19. Fórmula de Rutherford. — 20. Dispersión bajo pequeños ángulos. Capítulo V. Pequeñas oscilaciones. — 21. Oscilaciones lineales libres. — 22. Oscilaciones forzadas. — 23. Oscilaciones de sistemas con varios grados de libertad. — 24. Vibraciones de las moléculas. — 25. Oscilaciones amortiguadas. — 26. Oscilaciones forzadas con rozamiento. — 27. Resonancia paramétrica. — 28. Oscilaciones anarmónicas. — 29. Resonancia en oscilaciones no lineales. — 30. Movimiento en un campo rápidamente oscilante. Capítulo VI. Movimiento del sólido. — 31. Velocidad angular. — 32. Tensor de inercia. — 33. Momento cinético del sólido rígido. — 34. Ecuaciones del movimiento de un cuerpo rígido. — 35. Ángulos de Euler. — 36. Ecuaciones de Euler. — 37. La peonza asimétrica. — 38. Cuerpos rígidos en contacto. — 39. Movimiento en un sistema de referencia no inercial. Capítulo VII. Ecuaciones canónicas. — 40. Ecuaciones de Hamilton. — 41. Función de Routh. — 42. Paréntesis de Poisson. — 43. La acción como una función de las coordenadas. — 44. Principio de Maupertuis. — 45. Transformaciones canónicas. — 46. Teorema de Liouville. — 47. Ecuación de Hamilton-Jacobi. — 48. Separación de variables. — 49. Invariantes adiabáticas. — 50. Propiedades generales del movimiento en el espacio. El Curso de Física teórica, comprende los nueve volúmenes siguientes:

1. Mecánica. — 2. Teoría de campos. — 3. Mecánica cuántica (teoría no relativista). — 4. Teoría cuántica relativista. — 5. Física estadística. — 6. Hidrodinámica. — 7. Teoría de la elasticidad. — 8. Electrodinámica de los medios continuos. — 9. Cinética física.